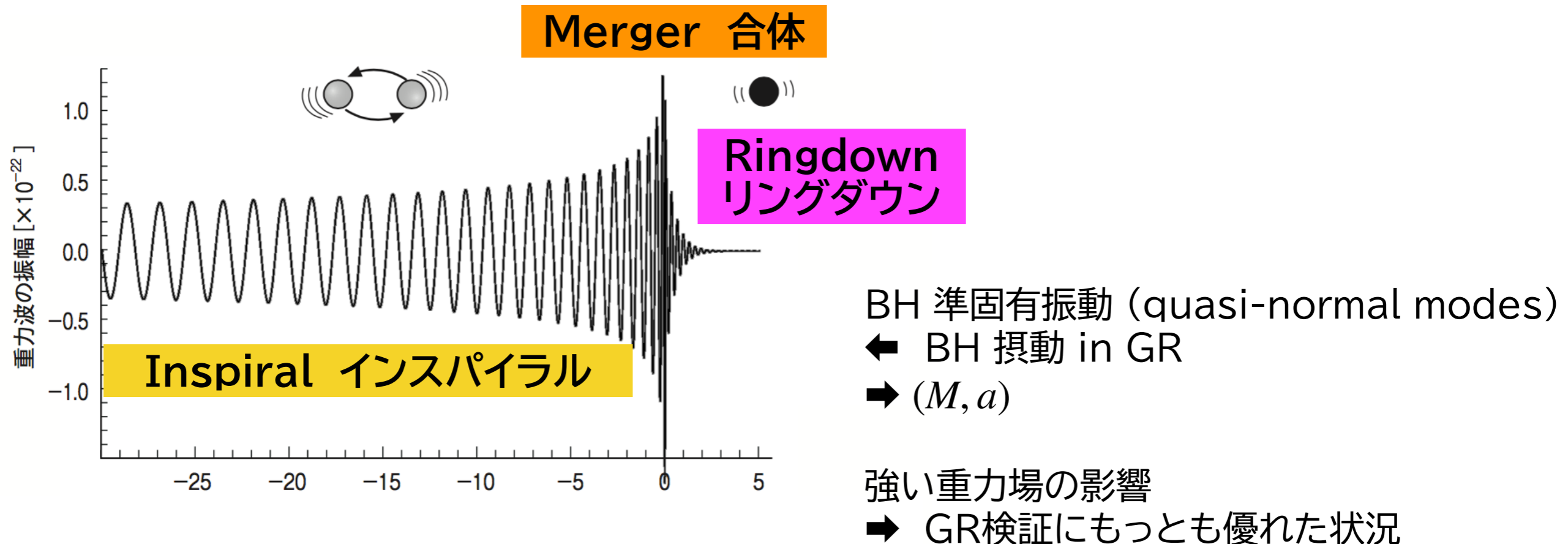


自己回帰モデルを用いた重力波データ解析

O3 a/b 連星ブラックホールイベントのリングダウン波形抽出



“リングダウン部分”は極めて短時間で減衰 (3.7 ms for 60 M_{sun} , $a=0.75$)
独立に抽出するには工夫が必要.

→ 自己回帰モデル (Auto-Regressive model)

→ 実データに応用, 有効性を調べた.

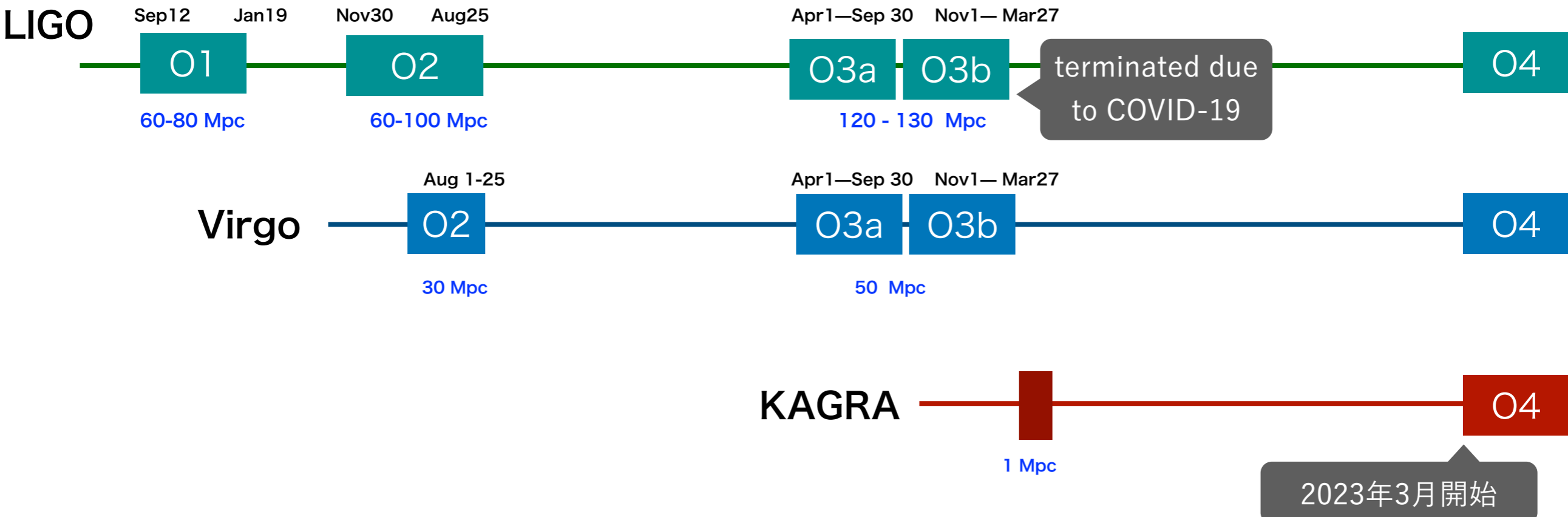
真貝寿明 (大阪工大)

Hisaaki Shinkai (OIT)

<http://www.oit.ac.jp/is/shinkai/>



Observation 1/2/3a/3b & 4



Gravitational Wave Transient Catalog **GWTC-1**
2018/12/3

GWTC-2
2020/10/28

GWTC-2.1
2021/8/2

GWTC-3
2021/11/5



重力波

重力波の生成機構 一般相対性理論によれば、大質量でコンパクトな天体が加速度運動することにより、重力波が発生する。重力波源としては連星の合体や超新星爆発、非球対称な星の高速回転や、宇宙初期に起源をもつ重力波が宇宙空間を伝播していると考えられる。これらのうち、データとの相関解析を可能にする波形予測ができるのは、連星合体からの重力波である。十分に合体前はニュートン力学に相対論補正を加えたポスト・ニュートン展開により、合体前後は数値シミュレーションにより、合体後ブラックホールが生じる場合にはブラックホール時空の摂動によっても波形モデルが得られる。これらのモデルと重力波干渉計で得られる信号の相関をとることで、連星ブラックホール（以下 BBH）や連星中性子星（BNS）、および中性子星・ブラックホール連星（NSBH）の合体現象による重力波の検出、および、パラメータ推定が2015年以降可能になった。

重力波の観測 これまでに、米欧のレーザー干渉計 LIGO, Virgo によって、O3a と呼ばれる観測期間終了までに、BBH による重力波が 46 例、BNS による重力波が 2 例報告されている。日本の KAGRA（かぐら）も O3b 観測期間の最後に共同観測に入った。O3b 期の重力波イベントは 2021 年 7 月時点で未発表である。現在、各干渉計は次の観測期間 O4（2022 年夏から 1 年間の予定）に向けて観測感度を上げるため、干渉計の改良中である。

重力波イベントは、観測された年月日を用いて、GW150914 の形で命名される。O3a 期より、時分秒を加えた名称が正式となった。重力波イベントは速報体制が取られ、多波長電磁波追観測が可能になっているが、これまでに波源が特定されたのは GW170817 のみである。

表 1: 重力波レーザー干渉計の位置と腕の向き（例えば N 36° W は、北から西方に 36° の向きを指す。）

干渉計	腕長 (km)	緯度	経度	X-腕	Y-腕
LIGO Hanford	米国 4	46°27'19" N	119°24'28" W	N 36° W	W 36° S
LIGO Livingston	米国 4	30 33 46 N	90 46 27 W	N 18° S	S 18° E
Virgo	欧州 3	43 37 53 N	10 30 16 E	N 19° E	W 19° N
KAGRA	日本 3	36 24 36 N	137 18 36 E	E 28.3° N	N 28.3° W

表 2: 過去の観測期間

観測期	Advanced LIGO		Advanced Virgo		KAGRA	
	年月日	年月日	年月日	年月日	年月日	年月日
O1	2015 9 12	–2016 1 19	–	–	–	–
O2	2016 11 30	–2017 8 25	2017 8 1	–2017 8 25	–	–
O3a	2019 4 1	–2019 9 30	同左	–	–	–
O3b	2019 11 1	–2020 3 27	同左	–	–	–
O3GK	–	–	–	–	2020 4 7	–2020 4 21

観測された中で特筆すべきイベント 突発的重力波カタログ 2(GWTC2) として 2020 年 10 月に発表されたものが 2021 年 7 月時点で最新である。

GW150914 最初に報告された直接重力波観測イベント。BBH の存在を明らかにし、太陽質量 (M_{\odot}) の 30 倍以上の BH の存在を初めて確認した。報告された BBH のイベントの中でも最もシグナル・ノイズ比 (SNR) が高い。GW170817 最初に報告された BNS イベント。直後に多くの追観測がなされ、マルチ・メッセンジャー天文学の初めての成功例となった。重力波波形から得られた中性子星の状態方程式に対する制限は核密度 $\rho_{\text{nuc}} = 2.8 \times 10^{14} \text{g/cm}^3$ の 2 倍の密度における圧力として $(2\rho_{\text{nuc}}) = 3.5^{+2.7}_{-1.7} \times 10^{34} \text{dyn/cm}^2$ (90% 信頼区間) である。ガンマ線と重力波の到着時刻の差 1.7 秒から得られた重力波伝播速度の光速からのず

れの割合に対する制限は 1×10^{-15} 以下である。また、可視・赤外における追観測から鉄以上の重元素合成の形跡が見られ、 r -過程元素合成の重要なチャンネルになっていることを示唆している。GW190412 明らかに質量比の異なる BBH からの重力波で、重力波の高次モードの検出がなされた。GW190425 2 番目に発見された BNS。GW190521 総質量が最大の BBH で、合体後の質量が $150M_{\odot}$ を超えるものと考えられる。いわゆる中間質量 BH の領域の候補天体の初の発見となった。BBH の合体の第 2 世代の合体とも考えられている。GW190814 星形成のシナリオでは不可能とされる $2\text{--}5M_{\odot}$ の質量領域のコンパクト天体からの重力波と考えられる。GW190924: 現在までで最小質量の BBH。GW200105, GW200115: はじめて確実なものとして報告された NS-BH 連星系合体。

表 3: 報告された主な重力波 (2021 年 7 月現在)。連星の質量を M_1, M_2 としたときの、チャープ質量 $M_c = (M_1 M_2)^{3/5} / (M_1 + M_2)^{1/5}$ 、質量比 (中央値の比) M_2/M_1 、有効スピン χ_{eff} 、最終的に形成された BH の質量 M_{final} (NS を含む場合は全質量 $M_{\text{全}} = M_1 + M_2$)、距離、波源特定精度 (平方度) $(\Delta\theta)^2$ 、シグナル・ノイズ比を示す。幅のある量は 90% の信頼区間。(種類ごとに日付順。BBH については、SNR が 13.1 より大きいもののみ。)

イベント (BBH)	$M_c (M_{\odot})$	質量比	χ_{eff}	$M_{\text{final}} (M_{\odot})$	距離 (Mpc)	$(\Delta\theta)^2$	SNR
GW150914	$28.6^{+1.7}_{-1.5}$	0.86	$-0.01^{+0.12}_{-0.13}$	$63.1^{+3.4}_{-3.0}$	440^{+150}_{-170}	179	24.4
GW170608	$7.9^{+0.2}_{-0.2}$	0.69	$0.03^{+0.19}_{-0.07}$	$17.8^{+3.4}_{-0.7}$	320^{+120}_{-110}	392	14.9
GW170814	$24.1^{+1.4}_{-1.1}$	0.82	$0.07^{+0.12}_{-0.12}$	$53.2^{+3.2}_{-2.4}$	600^{+150}_{-200}	87	15.9
GW190408_181802	$18.3^{+1.9}_{-1.2}$	0.75	$0.03^{+0.14}_{-0.19}$	$41.1^{+2.8}_{-2.8}$	1550^{+600}_{-600}	–	14.67
GW190412	$13.3^{+0.4}_{-0.3}$	0.28	$0.25^{+0.08}_{-0.11}$	$37.3^{+3.9}_{-3.8}$	740^{+40}_{-170}	21	18.86
GW190521	$69.2^{+17.0}_{-10.6}$	0.72	$0.03^{+0.32}_{-0.39}$	$156.3^{+21.9}_{-22.4}$	3920^{+1950}_{-1950}	940	14.38
GW190521_074359	$32.1^{+3.2}_{-2.5}$	0.78	$0.09^{+0.1}_{-0.13}$	$71.0^{+6.5}_{-4.4}$	1240^{+400}_{-570}	500	24.38
GW190630_185205	$24.9^{+2.1}_{-2.1}$	0.68	$0.1^{+0.12}_{-0.13}$	$56.4^{+4.4}_{-4.6}$	890^{+560}_{-370}	–	15.64
GW190728_064510	$8.6^{+0.5}_{-0.3}$	0.66	$0.12^{+0.07}_{-0.07}$	$19.6^{+4.7}_{-1.3}$	870^{+260}_{-370}	–	13.64
GW190814	$6.09^{+0.06}_{-0.06}$	0.11	$0^{+0.06}_{-0.06}$	$25.6^{+1.1}_{-0.9}$	240^{+40}_{-50}	19	22.18
GW190828_063405	$25.0^{+3.4}_{-2.1}$	0.82	$0.19^{+0.15}_{-0.16}$	$54.9^{+7.2}_{-4.3}$	2130^{+660}_{-930}	520	16.04
GW190910_112807	$34.3^{+4.1}_{-4.1}$	0.81	$0.02^{+0.18}_{-0.18}$	$75.8^{+8.5}_{-8.6}$	1460^{+1030}_{-580}	–	13.42
GW190924_021846	$5.8^{+0.2}_{-0.2}$	0.56	$0.03^{+0.3}_{-0.09}$	$13.3^{+5.2}_{-1.0}$	570^{+220}_{-220}	380	13.16
イベント (BNS)	$M_c (M_{\odot})$	質量比	χ_{eff}	$M_{\text{全}} (M_{\odot})$	距離 (Mpc)	$(\Delta\theta)^2$	SNR
GW170817	$1.186^{+0.001}_{-0.001}$	0.87	$0^{+0.02}_{-0.01}$	–	$40^{+7.0}_{-15.0}$	39	33
GW190425	$1.44^{+0.02}_{-0.02}$	0.70	$0.06^{+0.11}_{-0.05}$	$3.4^{+0.3}_{-0.1}$	160^{+70}_{-70}	9900	13.03
イベント (NSBH)	$M_c (M_{\odot})$	質量比	χ_{eff}	$M_{\text{全}} (M_{\odot})$	距離 (Mpc)	$(\Delta\theta)^2$	SNR
GW200105_162426	$3.41^{+0.08}_{-0.07}$	0.21	$-0.01^{+0.11}_{-0.15}$	$10.9^{+1.1}_{-1.2}$	280^{+110}_{-110}	7700	13.9
GW200115_042309	$2.42^{+0.05}_{-0.07}$	0.26	$-0.19^{+0.23}_{-0.35}$	$7.1^{+1.5}_{-1.4}$	300^{+150}_{-100}	900	11.6

得られた科学的成果 連星系については、その合体頻度について、BBH は、 $23.8^{+14.0}_{-8.7} / \text{Gpc}^3 / \text{yr}$ 、BNS は、 $561^{+834}_{-413} / \text{Gpc}^3 / \text{yr}$ 、NSBH は、 $45^{+73}_{-33} / \text{Gpc}^3 / \text{yr}$ と見積もられている。このほか、背景重力波に対して、宇宙膨張率に対して重力波のエネルギーが寄与する割合として (平坦なエネルギースペクトルを仮定した上で) $\Omega_{\text{GW}} < 6.0 \times 10^{-8}$ の上限が得られている。連続重力波の重力波振幅に対しては、おおよそ 1×10^{-25} 程度 (200 Hz まわり) の上限が得られている。また、既知のパルサーからの連続重力波に対しても個々に上限が得られている。

一般相対性理論の検証も行われ、数あるテストすべてで、一般相対性理論から得られる予言と観測されている重力波信号との間に矛盾は生じていない。今後、発見数が増すにつれて連星系の形成シナリオが明らかになることが期待される。将来的には、銀河系形成シナリオや初期宇宙の情報などにも、重力波観測から多くの知見がもたらされるであろう。



重力波の項

2022年より登場

by 田中さん+HS

➡ 50 events in total

GWTC-2

2020/10/28

➡ 55 total

GWTC-2.1

2021/8/2

➡ 90 total

GWTC-3

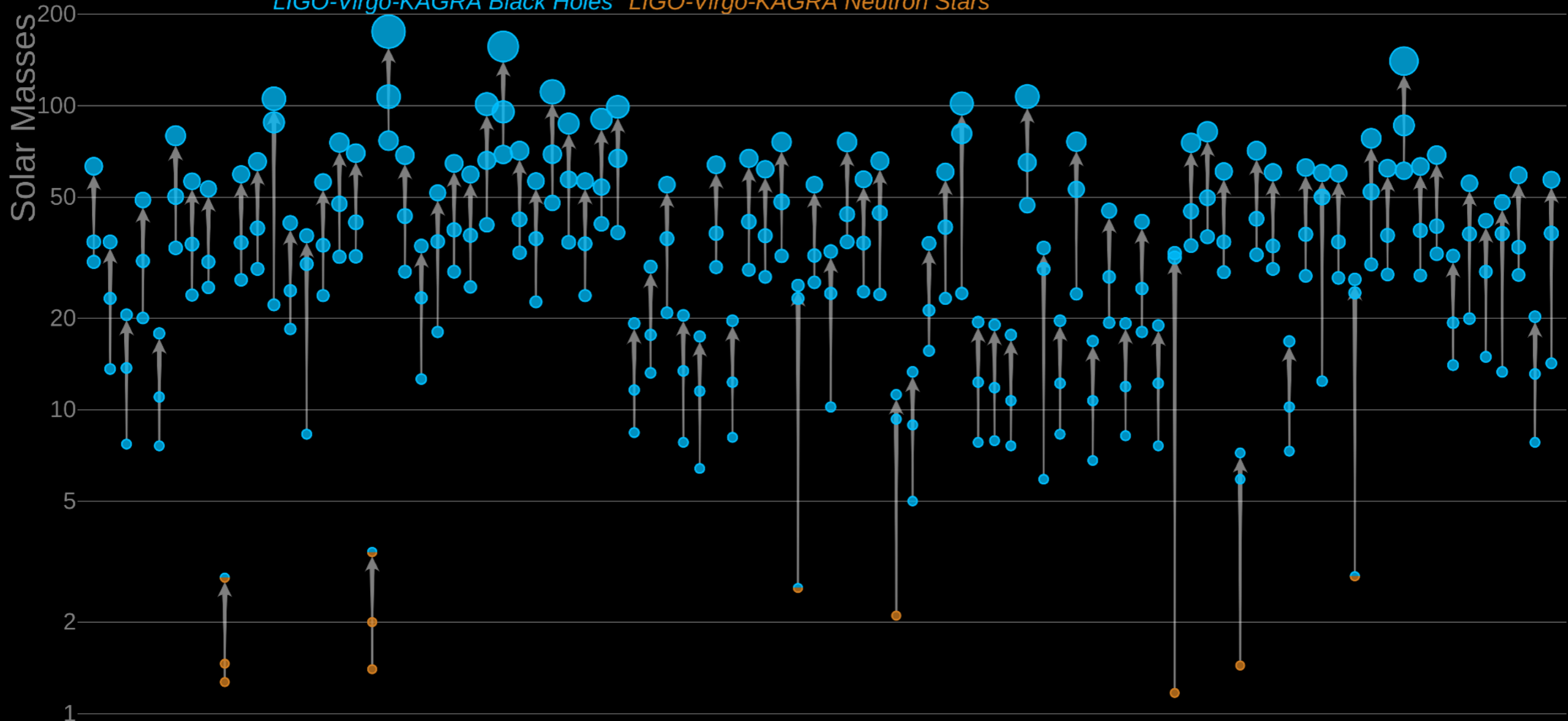
2021/11/5

O3b (2019/11/1 - 2020/3/27)

After O3b : GWTC3 (2021/11/7 released)

Masses in the Stellar Graveyard

LIGO-Virgo-KAGRA Black Holes LIGO-Virgo-KAGRA Neutron Stars



LIGO-Virgo-KAGRA | Aaron Geller | Northwestern

O1

O2

O3a

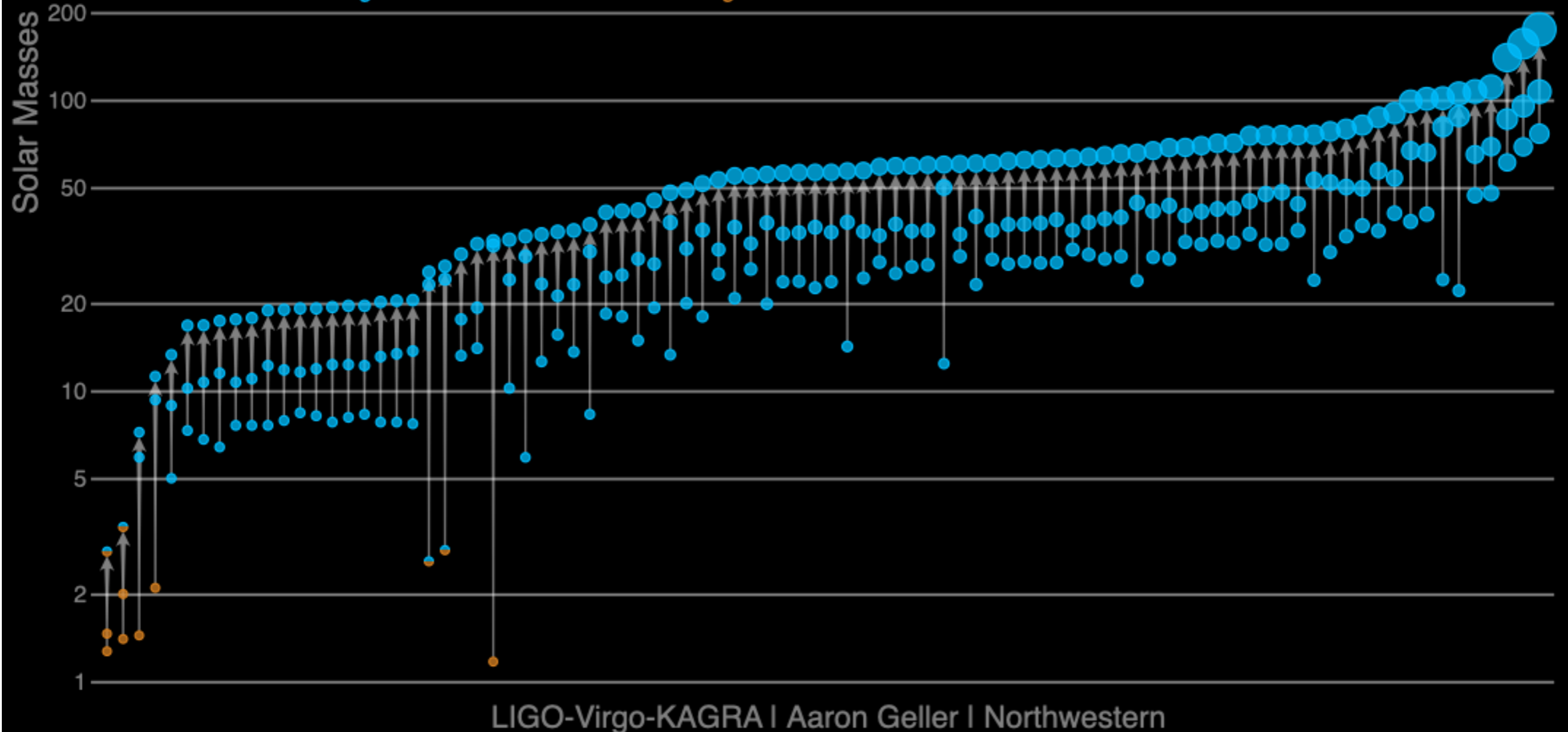
O3b

O3b (2019/11/1 - 2020/3/27)

After O3b : GWTC3 (2021/11/7 released)

Masses in the Stellar Graveyard

LIGO-Virgo-KAGRA Black Holes LIGO-Virgo-KAGRA Neutron Stars



<https://media.ligo.northwestern.edu/gallery/mass-plot>

GWTC-1 (O1/O2)

Event	m_1/M_\odot	m_2/M_\odot	\mathcal{M}/M_\odot	χ_{eff}	M_f/M_\odot	a_f	$E_{\text{rad}}/(M_\odot c^2)$	$\ell_{\text{peak}}/(\text{erg s}^{-1})$	d_L/Mpc	z	$\Delta\Omega/\text{deg}^2$
GW150914	$35.6^{+4.7}_{-3.1}$	$30.6^{+3.0}_{-4.4}$	$28.6^{+1.7}_{-1.5}$	$-0.01^{+0.12}_{-0.13}$	$63.1^{+3.4}_{-3.0}$	$0.69^{+0.05}_{-0.04}$	$3.1^{+0.4}_{-0.4}$	$3.6^{+0.4}_{-0.4} \times 10^{56}$	440^{+150}_{-170}	$0.09^{+0.03}_{-0.03}$	182 ✓
GW151012	$23.2^{+14.9}_{-5.5}$	$13.6^{+4.1}_{-4.8}$	$15.2^{+2.1}_{-1.2}$	$0.05^{+0.31}_{-0.20}$	$35.6^{+10.8}_{-3.8}$	$0.67^{+0.13}_{-0.11}$	$1.6^{+0.6}_{-0.5}$	$3.2^{+0.8}_{-1.7} \times 10^{56}$	1080^{+550}_{-490}	$0.21^{+0.09}_{-0.09}$	1523
GW151226	$13.7^{+8.8}_{-3.2}$	$7.7^{+2.2}_{-2.5}$	$8.9^{+0.3}_{-0.3}$	$0.18^{+0.20}_{-0.12}$	$20.5^{+6.4}_{-1.5}$	$0.74^{+0.07}_{-0.05}$	$1.0^{+0.1}_{-0.2}$	$3.4^{+0.7}_{-1.7} \times 10^{56}$	450^{+180}_{-190}	$0.09^{+0.04}_{-0.04}$	1033
GW170104	$30.8^{+7.3}_{-5.6}$	$20.0^{+4.9}_{-4.6}$	$21.4^{+2.2}_{-1.8}$	$-0.04^{+0.17}_{-0.21}$	$48.9^{+5.1}_{-4.0}$	$0.66^{+0.08}_{-0.11}$	$2.2^{+0.5}_{-0.5}$	$3.3^{+0.6}_{-1.0} \times 10^{56}$	990^{+440}_{-430}	$0.20^{+0.08}_{-0.08}$	921
GW170608	$11.0^{+5.5}_{-1.7}$	$7.6^{+1.4}_{-2.2}$	$7.9^{+0.2}_{-0.2}$	$0.03^{+0.19}_{-0.07}$	$17.8^{+3.4}_{-0.7}$	$0.69^{+0.04}_{-0.04}$	$0.9^{+0.0}_{-0.1}$	$3.5^{+0.4}_{-1.3} \times 10^{56}$	320^{+120}_{-110}	$0.07^{+0.02}_{-0.02}$	392
GW170729	$50.2^{+16.2}_{-10.2}$	$34.0^{+9.1}_{-10.1}$	$35.4^{+6.5}_{-4.8}$	$0.37^{+0.21}_{-0.25}$	$79.5^{+14.7}_{-10.2}$	$0.81^{+0.07}_{-0.13}$	$4.8^{+1.7}_{-1.7}$	$4.2^{+0.9}_{-1.5} \times 10^{56}$	2840^{+1400}_{-1360}	$0.49^{+0.19}_{-0.21}$	1041
GW170809	$35.0^{+8.3}_{-5.9}$	$23.8^{+5.1}_{-5.2}$	$24.9^{+2.1}_{-1.7}$	$0.08^{+0.17}_{-0.17}$	$56.3^{+5.2}_{-3.8}$	$0.70^{+0.08}_{-0.09}$	$2.7^{+0.6}_{-0.6}$	$3.5^{+0.6}_{-0.9} \times 10^{56}$	1030^{+320}_{-390}	$0.20^{+0.05}_{-0.07}$	308
GW170814	$30.6^{+5.6}_{-3.0}$	$25.2^{+2.8}_{-4.0}$	$24.1^{+1.4}_{-1.1}$	$0.07^{+0.12}_{-0.12}$	$53.2^{+3.2}_{-2.4}$	$0.72^{+0.07}_{-0.05}$	$2.7^{+0.4}_{-0.3}$	$3.7^{+0.4}_{-0.5} \times 10^{56}$	600^{+150}_{-220}	$0.12^{+0.03}_{-0.04}$	87
GW170817	$1.46^{+0.12}_{-0.10}$	$1.27^{+0.09}_{-0.09}$	$1.186^{+0.001}_{-0.001}$	$0.00^{+0.02}_{-0.01}$	≤ 2.8	≤ 0.89	≥ 0.04	$\geq 0.1 \times 10^{56}$	40^{+7}_{-15}	$0.01^{+0.00}_{-0.00}$	16 ✓
GW170818	$35.4^{+7.5}_{-4.7}$	$26.7^{+4.3}_{-5.2}$	$26.5^{+2.1}_{-1.7}$	$-0.09^{+0.18}_{-0.21}$	$59.4^{+4.9}_{-3.8}$	$0.67^{+0.07}_{-0.08}$	$2.7^{+0.5}_{-0.5}$	$3.4^{+0.5}_{-0.7} \times 10^{56}$	1060^{+420}_{-380}	$0.21^{+0.07}_{-0.07}$	39
GW170823	$39.5^{+11.2}_{-6.7}$	$29.0^{+6.7}_{-7.8}$	$29.2^{+4.6}_{-3.6}$	$0.09^{+0.22}_{-0.26}$	$65.4^{+10.1}_{-7.4}$	$0.72^{+0.09}_{-0.12}$	$3.3^{+1.0}_{-0.9}$	$3.6^{+0.7}_{-1.1} \times 10^{56}$	1940^{+970}_{-900}	$0.35^{+0.15}_{-0.15}$	1666

TABLE V. KL divergences (in bits) between the prior and posterior for the effective aligned spin χ_{eff} and the effective precession spin χ_p . For the computation of the KL divergence for χ_p , we quote the KL divergence with the prior conditioned on the χ_{eff} posterior, $D_{\text{KL}}^{\chi_p}(\chi_{\text{eff}})$, and without conditioning, $D_{\text{KL}}^{\chi_p}$. For GW170817, $D_{\text{KL}}^{\chi_p}$ is given for the high spin prior. The median and 90% interval for the KL divergences is estimated by computing the statistic for repeated draws of a subset of the posterior and prior PDFs. Single-detector optimal SNRs from parameter-estimation analyses for Hanford (H), Livingston (L), and Virgo (V).

Event	GW150914	GW151012	GW151226	GW170104	GW170608	GW170729	GW170809	GW170814	GW170817	GW170818	GW170823
$D_{\text{KL}}^{\chi_{\text{eff}}}$	$0.71^{+0.04}_{-0.03}$	$0.23^{+0.03}_{-0.02}$	$1.32^{+0.11}_{-0.06}$	$0.54^{+0.03}_{-0.03}$	$0.97^{+0.03}_{-0.05}$	$1.83^{+0.07}_{-0.09}$	$0.71^{+0.03}_{-0.03}$	$0.99^{+0.05}_{-0.07}$	$2.32^{+0.08}_{-0.10}$	$0.50^{+0.04}_{-0.03}$	$0.32^{+0.04}_{-0.03}$
$D_{\text{KL}}^{\chi_p}$	$0.16^{+0.03}_{-0.02}$	$0.09^{+0.03}_{-0.02}$	$0.17^{+0.03}_{-0.04}$	$0.05^{+0.01}_{-0.01}$	$0.07^{+0.01}_{-0.02}$	$0.09^{+0.02}_{-0.02}$	$0.05^{+0.01}_{-0.01}$	$0.02^{+0.01}_{-0.01}$	$0.19^{+0.04}_{-0.03}$	$0.06^{+0.02}_{-0.01}$	$0.03^{+0.01}_{-0.01}$
$D_{\text{KL}}^{\chi_p}(\chi_{\text{eff}})$	$0.09^{+0.02}_{-0.02}$	$0.08^{+0.02}_{-0.02}$	$0.12^{+0.05}_{-0.02}$	$0.07^{+0.02}_{-0.01}$	$0.08^{+0.02}_{-0.02}$	$0.03^{+0.01}_{-0.01}$	$0.06^{+0.01}_{-0.01}$	$0.13^{+0.03}_{-0.02}$	$0.07^{+0.01}_{-0.01}$	$0.09^{+0.02}_{-0.01}$	$0.03^{+0.01}_{-0.01}$
H SNR	$20.6^{+1.6}_{-1.6}$	$6.4^{+1.3}_{-1.3}$	$9.8^{+1.5}_{-1.4}$	$9.5^{+1.3}_{-1.6}$	$12.1^{+1.6}_{-1.6}$	$5.9^{+1.1}_{-1.1}$	$5.9^{+1.4}_{-1.4}$	$9.3^{+1.0}_{-1.2}$	$18.9^{+1.0}_{-1.0}$	$4.6^{+0.9}_{-0.8}$	$6.8^{+1.4}_{-1.2}$
L SNR	$14.2^{+1.6}_{-1.4}$	$5.8^{+1.2}_{-1.2}$	$6.9^{+1.2}_{-1.1}$	$9.9^{+1.5}_{-1.3}$	$9.2^{+1.5}_{-1.2}$	$8.3^{+1.4}_{-1.4}$	$10.7^{+1.6}_{-1.8}$	$14.3^{+1.5}_{-1.4}$ ✓	$26.3^{+1.4}_{-1.3}$	$9.7^{+1.5}_{-1.5}$	$9.2^{+1.7}_{-1.5}$
V SNR	$1.7^{+1.0}_{-1.1}$	$1.1^{+1.2}_{-0.8}$	$4.1^{+1.1}_{-1.1}$	$3.0^{+0.2}_{-0.2}$	$4.2^{+0.8}_{-0.7}$...

✓ good S/N

✓ BNS, too light

GWTC-2 (O3a)

Event	$M (M_{\odot})$	$\mathcal{M} (M_{\odot})$	$m_1 (M_{\odot})$	$m_2 (M_{\odot})$	χ_{eff}	D_L (Gpc)	z	$M_f (M_{\odot})$	χ_f	$\Delta\Omega$ (deg ²)	SNR
GW190408_181802	$43.0^{+4.2}_{-3.0}$	$18.3^{+1.9}_{-1.2}$	$24.6^{+5.1}_{-3.4}$	$18.4^{+3.3}_{-3.6}$	$-0.03^{+0.14}_{-0.19}$	$1.55^{+0.40}_{-0.60}$	$0.29^{+0.06}_{-0.10}$	$41.1^{+3.9}_{-2.8}$	$0.67^{+0.06}_{-0.07}$	150	$15.3^{+0.2}_{-0.3}$
GW190412	$38.4^{+3.8}_{-3.7}$	$13.3^{+0.4}_{-0.3}$	$30.1^{+4.7}_{-5.1}$	$8.3^{+1.6}_{-0.9}$	$0.25^{+0.08}_{-0.11}$	$0.74^{+0.14}_{-0.17}$	$0.15^{+0.03}_{-0.03}$	$37.3^{+3.9}_{-3.8}$	$0.67^{+0.05}_{-0.06}$	21	$18.9^{+0.2}_{-0.3}$ ✓
GW190413_052954	$58.6^{+13.3}_{-9.7}$	$24.6^{+5.5}_{-4.1}$	$34.7^{+12.6}_{-8.1}$	$23.7^{+7.3}_{-6.7}$	$-0.01^{+0.29}_{-0.34}$	$3.55^{+2.27}_{-1.66}$	$0.59^{+0.29}_{-0.24}$	$56.0^{+12.5}_{-9.2}$	$0.68^{+0.12}_{-0.13}$	1500	$8.9^{+0.4}_{-0.7}$
GW190413_134308	$78.8^{+17.4}_{-11.9}$	$33.0^{+8.2}_{-5.4}$	$47.5^{+13.5}_{-10.7}$	$3.18^{+11.7}_{-10.8}$	$-0.03^{+0.25}_{-0.29}$	$4.45^{+2.48}_{-2.12}$	$0.71^{+0.31}_{-0.30}$	$75.5^{+16.4}_{-11.4}$	$0.68^{+0.10}_{-0.12}$	730	$10.0^{+0.4}_{-0.5}$
GW190421_213856	$72.9^{+13.4}_{-9.2}$	$31.2^{+5.9}_{-4.2}$	$41.3^{+10.4}_{-6.9}$	$31.9^{+8.0}_{-8.8}$	$-0.06^{+0.22}_{-0.27}$	$2.88^{+1.37}_{-1.38}$	$0.49^{+0.19}_{-0.21}$	$69.7^{+12.5}_{-8.7}$	$0.67^{+0.10}_{-0.11}$	1200	$10.7^{+0.2}_{-0.4}$
GW190424_180648	$72.6^{+13.3}_{-10.7}$	$31.0^{+5.8}_{-4.6}$	$40.5^{+11.1}_{-7.3}$	$31.8^{+7.6}_{-7.7}$	$0.13^{+0.22}_{-0.22}$	$2.20^{+1.58}_{-1.16}$	$0.39^{+0.23}_{-0.19}$	$68.9^{+12.4}_{-10.1}$	$0.74^{+0.09}_{-0.09}$	2800	$10.4^{+0.2}_{-0.4}$
GW190425	$3.4^{+0.3}_{-0.1}$	$1.44^{+0.02}_{-0.02}$	$2.0^{+0.6}_{-0.3}$	$1.4^{+0.02}_{-0.02}$	$0.06^{+0.11}_{-0.05}$	$0.16^{+0.07}_{-0.07}$	$0.03^{+0.01}_{-0.02}$	1000	$12.4^{+0.3}_{-0.4}$
GW190426_152155	$7.2^{+3.5}_{-1.5}$	$2.41^{+0.08}_{-0.08}$	$5.7^{+3.9}_{-2.3}$	$1.5^{+0.8}_{-0.5}$	$-0.03^{+0.32}_{-0.30}$	$0.37^{+0.32}_{-0.30}$	$0.08^{+0.04}_{-0.03}$	1300	$8.7^{+0.5}_{-0.6}$
GW190503_185404	$71.7^{+9.4}_{-8.3}$	$30.2^{+4.2}_{-4.2}$	$43.3^{+9.2}_{-8.1}$	$28.4^{+7.7}_{-8.0}$	$-0.03^{+0.20}_{-0.26}$	$1.45^{+0.69}_{-0.63}$	$0.27^{+0.11}_{-0.11}$	$68.6^{+8.8}_{-7.7}$	$0.66^{+0.09}_{-0.12}$	94	$12.4^{+0.2}_{-0.3}$
GW190512_180714	$35.9^{+3.8}_{-3.5}$	$14.6^{+1.3}_{-1.0}$	$23.3^{+5.3}_{-5.8}$	$12.6^{+3.6}_{-2.5}$	$0.03^{+0.12}_{-0.13}$	$1.43^{+0.55}_{-0.55}$	$0.27^{+0.09}_{-0.10}$	$34.5^{+3.8}_{-3.5}$	$0.65^{+0.07}_{-0.07}$	220	$12.2^{+0.2}_{-0.4}$
GW190513_205428	$53.9^{+8.6}_{-5.9}$	$21.6^{+3.8}_{-1.9}$	$35.7^{+9.5}_{-9.2}$	$18.0^{+7.7}_{-4.1}$	$0.11^{+0.28}_{-0.17}$	$2.06^{+0.88}_{-0.80}$	$0.37^{+0.13}_{-0.13}$	$51.6^{+8.2}_{-5.8}$	$0.68^{+0.14}_{-0.12}$	520	$12.9^{+0.3}_{-0.4}$
GW190514_065416	$67.2^{+18.7}_{-10.8}$	$28.5^{+7.9}_{-4.8}$	$39.0^{+14.7}_{-8.2}$	$28.4^{+9.3}_{-8.8}$	$-0.19^{+0.29}_{-0.32}$	$4.13^{+2.65}_{-2.17}$	$0.67^{+0.33}_{-0.31}$	$64.5^{+17.9}_{-10.4}$	$0.63^{+0.11}_{-0.15}$	3000	$8.2^{+0.3}_{-0.6}$
GW190517_055101	$63.5^{+9.6}_{-9.6}$	$26.6^{+4.0}_{-4.0}$	$37.4^{+11.7}_{-7.6}$	$25.3^{+7.0}_{-7.3}$	$0.52^{+0.19}_{-0.19}$	$1.86^{+1.62}_{-0.84}$	$0.34^{+0.24}_{-0.14}$	$59.3^{+9.1}_{-8.9}$	$0.87^{+0.05}_{-0.07}$	470	$10.7^{+0.4}_{-0.6}$
GW190519_153544	$106.6^{+13.5}_{-14.8}$	$44.5^{+6.4}_{-7.1}$	$66.0^{+10.7}_{-12.0}$	$40.5^{+11.0}_{-11.1}$	$0.31^{+0.20}_{-0.22}$	$2.53^{+1.83}_{-0.92}$	$0.44^{+0.25}_{-0.14}$	$101.0^{+12.4}_{-13.8}$	$0.79^{+0.07}_{-0.13}$	860	$15.6^{+0.2}_{-0.3}$
GW190521	$163.9^{+39.2}_{-23.5}$	$69.2^{+17.0}_{-10.6}$	$95.3^{+28.7}_{-18.9}$	$69.0^{+22.7}_{-23.1}$	$0.03^{+0.32}_{-0.39}$	$3.92^{+2.19}_{-1.95}$	$0.64^{+0.28}_{-0.28}$	$156.3^{+36.8}_{-22.4}$	$0.71^{+0.12}_{-0.16}$	1000	$14.2^{+0.3}_{-0.3}$
GW190521_074359	$74.7^{+7.0}_{-4.8}$	$32.1^{+3.2}_{-2.5}$	$42.2^{+5.9}_{-4.8}$	$32.8^{+5.4}_{-6.4}$	$0.09^{+0.10}_{-0.13}$	$1.24^{+0.40}_{-0.57}$	$0.24^{+0.07}_{-0.10}$	$71.0^{+6.5}_{-4.4}$	$0.72^{+0.05}_{-0.07}$	550	$25.8^{+0.1}_{-0.2}$ ✓
GW190527_092055	$59.1^{+21.3}_{-9.8}$	$24.3^{+9.1}_{-4.2}$	$36.5^{+16.4}_{-9.0}$	$22.6^{+10.5}_{-8.1}$	$0.11^{+0.28}_{-0.28}$	$2.49^{+2.48}_{-1.24}$	$0.44^{+0.34}_{-0.20}$	$56.4^{+20.2}_{-9.3}$	$0.71^{+0.12}_{-0.16}$	3700	$8.1^{+0.3}_{-0.9}$
GW190602_175927	$116.3^{+19.0}_{-15.6}$	$49.1^{+9.1}_{-8.5}$	$69.1^{+15.7}_{-13.0}$	$47.8^{+14.3}_{-17.4}$	$0.07^{+0.14}_{-0.24}$	$2.69^{+1.79}_{-1.12}$	$0.47^{+0.25}_{-0.17}$	$11.0^{+17.7}_{-14.9}$	$0.70^{+0.10}_{-0.14}$	690	$12.8^{+0.2}_{-0.3}$
GW190620_030421	$92.1^{+18.5}_{-13.1}$	$38.3^{+8.3}_{-6.5}$	$57.1^{+16.0}_{-12.7}$	$35.5^{+12.2}_{-12.3}$	$0.33^{+0.22}_{-0.25}$	$2.81^{+1.68}_{-1.31}$	$0.49^{+0.23}_{-0.20}$	$87.2^{+16.8}_{-12.1}$	$0.79^{+0.08}_{-0.15}$	7200	$12.1^{+0.3}_{-0.4}$
GW190630_185205	$59.1^{+4.6}_{-4.8}$	$24.9^{+2.1}_{-2.1}$	$35.1^{+6.9}_{-5.6}$	$23.7^{+5.2}_{-5.1}$	$0.10^{+0.12}_{-0.13}$	$0.89^{+0.56}_{-0.37}$	$0.18^{+0.10}_{-0.07}$	$56.4^{+4.4}_{-4.6}$	$0.70^{+0.05}_{-0.07}$	1200	$15.6^{+0.2}_{-0.3}$
GW190701_203306	$94.3^{+12.1}_{-9.5}$	$40.3^{+5.4}_{-4.9}$	$53.9^{+11.8}_{-8.0}$	$40.8^{+8.7}_{-12.0}$	$-0.07^{+0.23}_{-0.29}$	$2.06^{+0.76}_{-0.73}$	$0.37^{+0.11}_{-0.12}$	$90.2^{+11.3}_{-8.9}$	$0.66^{+0.09}_{-0.13}$	46	$11.3^{+0.2}_{-0.3}$

GWTC-2 (O3a) continued

Event	$M (M_{\odot})$	$\mathcal{M} (M_{\odot})$	$m_1 (M_{\odot})$	$m_2 (M_{\odot})$	χ_{eff}	D_L (Gpc)	z	$M_f (M_{\odot})$	χ_f	$\Delta\Omega$ (deg ²)	SNR
GW190706_222641	104.1 ^{+20.2} _{-13.9}	42.7 ^{+10.0} _{-7.0}	67.0 ^{+14.6} _{-16.2}	38.2 ^{+14.6} _{-13.3}	0.28 ^{+0.26} _{-0.29}	4.42 ^{+2.59} _{-1.93}	0.71 ^{+0.32} _{-0.27}	99.0 ^{+18.3} _{-13.5}	0.78 ^{+0.09} _{-0.18}	650	12.6 ^{+0.2} _{-0.4}
GW190707_093326	20.1 ^{+1.9} _{-1.3}	8.5 ^{+0.6} _{-0.5}	11.6 ^{+3.3} _{-1.7}	8.4 ^{+1.4} _{-1.7}	-0.05 ^{+0.10} _{-0.08}	0.77 ^{+0.38} _{-0.37}	0.16 ^{+0.07} _{-0.07}	19.2 ^{+1.9} _{-1.3}	0.66 ^{+0.03} _{-0.04}	1300	13.3 ^{+0.2} _{-0.4}
GW190708_232457	30.9 ^{+2.5} _{-1.8}	13.2 ^{+0.9} _{-0.6}	17.6 ^{+4.7} _{-2.3}	13.2 ^{+2.0} _{-2.7}	0.02 ^{+0.10} _{-0.08}	0.88 ^{+0.33} _{-0.39}	0.18 ^{+0.06} _{-0.07}	29.5 ^{+2.5} _{-1.8}	0.69 ^{+0.04} _{-0.04}	14000	13.1 ^{+0.2} _{-0.3}
GW190719_215514	57.8 ^{+18.3} _{-10.7}	23.5 ^{+6.5} _{-4.0}	36.5 ^{+18.0} _{-10.3}	20.8 ^{+9.0} _{-7.2}	0.32 ^{+0.29} _{-0.31}	3.94 ^{+2.59} _{-2.00}	0.64 ^{+0.33} _{-0.29}	54.9 ^{+17.3} _{-10.2}	0.78 ^{+0.11} _{-0.17}	2900	8.3 ^{+0.3} _{-0.8}
GW190720_000836	21.5 ^{+4.3} _{-2.3}	8.9 ^{+0.5} _{-0.8}	13.4 ^{+6.7} _{-3.0}	7.8 ^{+2.3} _{-2.2}	0.18 ^{+0.14} _{-0.12}	0.79 ^{+0.69} _{-0.32}	0.16 ^{+0.12} _{-0.06}	20.4 ^{+4.5} _{-2.2}	0.72 ^{+0.06} _{-0.05}	460	11.0 ^{+0.3} _{-0.7}
GW190727_060333	67.1 ^{+11.7} _{-8.0}	28.6 ^{+5.3} _{-3.7}	38.0 ^{+9.5} _{-6.2}	29.4 ^{+7.1} _{-8.4}	0.11 ^{+0.26} _{-0.25}	3.30 ^{+1.54} _{-1.50}	0.55 ^{+0.21} _{-0.22}	63.8 ^{+10.9} _{-7.5}	0.73 ^{+0.10} _{-0.10}	830	11.9 ^{+0.3} _{-0.5}
GW190728_064510	20.6 ^{+4.5} _{-1.3}	8.6 ^{+0.5} _{-0.3}	12.3 ^{+7.2} _{-2.2}	8.1 ^{+1.7} _{-2.6}	0.12 ^{+0.20} _{-0.07}	0.87 ^{+0.26} _{-1.37}	0.18 ^{+0.05} _{-0.07}	19.6 ^{+4.7} _{-1.3}	0.71 ^{+0.04} _{-0.04}	400	13.0 ^{+0.2} _{-0.4}
GW190731_140936	70.1 ^{+15.8} _{-11.3}	29.5 ^{+7.1} _{-5.2}	41.5 ^{+12.2} _{-9.0}	28.8 ^{+9.7} _{-9.5}	0.06 ^{+0.24} _{-0.24}	3.30 ^{+2.39} _{-1.72}	0.55 ^{+0.31} _{-0.26}	67.0 ^{+14.6} _{-10.8}	0.70 ^{+0.10} _{-0.13}	3400	8.7 ^{+0.2} _{-0.5}
GW190803_022701	64.5 ^{+12.6} _{-9.0}	27.3 ^{+5.7} _{-4.1}	37.3 ^{+10.6} _{-7.0}	27.3 ^{+7.8} _{-8.2}	-0.03 ^{+0.24} _{-0.27}	3.27 ^{+1.95} _{-1.58}	0.55 ^{+0.26} _{-0.24}	61.7 ^{+11.8} _{-8.5}	0.68 ^{+0.10} _{-0.11}	1500	8.6 ^{+0.3} _{-0.5}
GW190814	25.8 ^{+1.0} _{-0.9}	6.09 ^{+0.06} _{-0.06}	23.2 ^{+1.1} _{-1.0}	2.59 ^{+0.08} _{-0.09}	0.00 ^{+0.08} _{-0.06}	0.24 ^{+0.04} _{-0.05}	0.05 ^{+0.009} _{-0.010}	25.6 ^{+1.1} _{-0.9}	0.28 ^{+0.02} _{-0.02}	19	24.9 ^{+0.6} _{-0.6} ✓
GW190828_063405	58.0 ^{+7.7} _{-4.8}	25.0 ^{+3.4} _{-2.1}	32.1 ^{+5.8} _{-4.0}	26.2 ^{+4.6} _{-4.8}	0.19 ^{+0.15} _{-0.16}	2.13 ^{+0.66} _{-0.93}	0.38 ^{+0.10} _{-0.15}	54.9 ^{+7.2} _{-4.3}	0.75 ^{+0.06} _{-0.07}	520	16.2 ^{+0.2} _{-0.3}
GW190828_065509	34.4 ^{+5.4} _{-4.4}	13.3 ^{+1.2} _{-1.0}	24.1 ^{+7.0} _{-7.2}	10.2 ^{+3.6} _{-2.1}	0.08 ^{+0.16} _{-0.16}	1.60 ^{+0.62} _{-0.60}	0.30 ^{+0.10} _{-1.10}	33.1 ^{+5.5} _{-4.5}	0.65 ^{+0.08} _{-0.08}	660	10.0 ^{+0.3} _{-0.5}
GW190909_114149	75.0 ^{+55.9} _{-17.6}	30.9 ^{+17.2} _{-7.5}	45.8 ^{+52.7} _{-13.3}	28.3 ^{+13.4} _{-12.7}	-0.06 ^{+0.37} _{-0.36}	3.77 ^{+3.27} _{-2.22}	0.62 ^{+0.41} _{-0.33}	72.0 ^{+54.9} _{-16.8}	0.66 ^{+0.15} _{-0.20}	4700	8.1 ^{+0.4} _{-0.6}
GW190910_112807	79.6 ^{+9.3} _{-9.1}	34.3 ^{+4.1} _{-4.1}	43.9 ^{+7.6} _{-6.1}	35.6 ^{+7.6} _{-7.2}	0.02 ^{+0.18} _{-0.18}	1.46 ^{+10.3} _{-0.58}	0.28 ^{+0.16} _{-0.10}	75.8 ^{+8.5} _{-8.6}	0.70 ^{+0.08} _{-0.07}	11000	14.1 ^{+0.2} _{-0.3}
GW190915_235702	59.9 ^{+7.5} _{-6.4}	25.3 ^{+3.2} _{-2.7}	35.3 ^{+9.5} _{-6.4}	24.4 ^{+5.6} _{-6.1}	0.02 ^{+0.20} _{-0.25}	1.62 ^{+0.71} _{-0.61}	0.30 ^{+0.11} _{-0.10}	57.2 ^{+7.1} _{-6.0}	0.70 ^{+0.09} _{-0.11}	400	13.6 ^{+0.2} _{-0.3}
GW190924_021846	13.9 ^{+5.1} _{-1.0}	5.8 ^{+0.2} _{-0.2}	8.9 ^{+7.0} _{-2.0}	5.0 ^{+1.4} _{-1.9}	0.03 ^{+0.30} _{-0.09}	0.57 ^{+0.22} _{-0.22}	0.12 ^{+0.04} _{-0.04}	13.3 ^{+5.2} _{-1.0}	0.67 ^{+0.05} _{-0.05}	360	11.5 ^{+0.3} _{-0.4}
GW190929_012149	104.3 ^{+34.9} _{-25.2}	35.8 ^{+14.9} _{-8.2}	80.8 ^{+33.0} _{-33.2}	24.1 ^{+19.3} _{-10.6}	0.01 ^{+0.34} _{-0.33}	2.13 ^{+3.25} _{-1.05}	0.38 ^{+0.49} _{-0.17}	101.5 ^{+33.6} _{-25.3}	0.66 ^{+0.20} _{-0.31}	2200	10.1 ^{+0.6} _{-0.8}
GW190930_133541	20.3 ^{+8.9} _{-1.5}	8.5 ^{+0.5} _{-0.5}	12.3 ^{+12.4} _{-2.3}	7.8 ^{+1.7} _{-3.3}	0.14 ^{+0.31} _{-0.15}	0.76 ^{+0.36} _{-0.32}	0.15 ^{+0.06} _{-0.06}	19.4 ^{+9.2} _{-1.5}	0.72 ^{+0.07} _{-0.06}	1700	9.5 ^{+0.3} _{-0.5}

✓ good S/N, but the event of large-mass ratio ever outlier in IMR consistency test (LVK TGR paper)

GWTC-3 (O3b)

Event	M (M_{\odot})	\mathcal{M} (M_{\odot})	m_1 (M_{\odot})	m_2 (M_{\odot})	χ_{eff}	D_L (Gpc)	z	M_f (M_{\odot})	χ_f	$\Delta\Omega$ (deg ²)	SNR
GW191103_012549	$20.0^{+3.7}_{-1.8}$	$8.34^{+0.66}_{-0.57}$	$11.8^{+6.2}_{-2.2}$	$7.9^{+1.7}_{-2.4}$	$0.21^{+0.16}_{-0.10}$	$0.99^{+0.50}_{-0.47}$	$0.20^{+0.09}_{-0.09}$	$19.0^{+3.8}_{-1.7}$	$0.75^{+0.06}_{-0.05}$	2500	$8.9^{+0.3}_{-0.5}$
GW191105_143521	$18.5^{+2.1}_{-1.3}$	$7.82^{+0.61}_{-0.45}$	$10.7^{+3.7}_{-1.6}$	$7.7^{+1.4}_{-1.9}$	$-0.02^{+0.13}_{-0.09}$	$1.15^{+0.43}_{-0.48}$	$0.23^{+0.07}_{-0.09}$	$17.6^{+2.1}_{-1.2}$	$0.67^{+0.04}_{-0.05}$	640	$9.7^{+0.3}_{-0.5}$
GW191109_010717	112^{+20}_{-16}	$47.5^{+9.6}_{-7.5}$	65^{+11}_{-11}	47^{+15}_{-13}	$-0.29^{+0.42}_{-0.31}$	$1.29^{+1.13}_{-0.65}$	$0.25^{+0.18}_{-0.12}$	107^{+18}_{-15}	$0.61^{+0.18}_{-0.19}$	1600	$17.3^{+0.5}_{-0.5}$ ✓
GW191113_071753	$34.5^{+10.5}_{-9.8}$	$10.7^{+1.1}_{-1.0}$	29^{+12}_{-14}	$5.9^{+4.4}_{-1.3}$	$0.00^{+0.37}_{-0.29}$	$1.37^{+1.15}_{-0.62}$	$0.26^{+0.18}_{-0.11}$	34^{+11}_{-10}	$0.45^{+0.33}_{-0.11}$	3600	$7.9^{+0.5}_{-1.1}$
GW191126_115259	$20.7^{+3.4}_{-2.0}$	$8.65^{+0.95}_{-0.71}$	$12.1^{+5.5}_{-2.2}$	$8.3^{+1.9}_{-2.4}$	$0.21^{+0.15}_{-0.11}$	$1.62^{+0.74}_{-0.74}$	$0.30^{+0.12}_{-0.13}$	$19.6^{+3.5}_{-2.0}$	$0.75^{+0.06}_{-0.05}$	1400	$8.3^{+0.2}_{-0.5}$
GW191127_050227	80^{+39}_{-22}	$29.9^{+11.7}_{-9.1}$	53^{+47}_{-20}	24^{+17}_{-14}	$0.18^{+0.34}_{-0.36}$	$3.4^{+3.1}_{-1.9}$	$0.57^{+0.40}_{-0.29}$	76^{+39}_{-21}	$0.75^{+0.13}_{-0.29}$	980	$9.2^{+0.7}_{-0.6}$
GW191129_134029	$17.5^{+2.4}_{-1.2}$	$7.31^{+0.43}_{-0.28}$	$10.7^{+4.1}_{-2.1}$	$6.7^{+1.5}_{-1.7}$	$0.06^{+0.16}_{-0.08}$	$0.79^{+0.26}_{-0.33}$	$0.16^{+0.05}_{-0.06}$	$16.8^{+2.5}_{-1.2}$	$0.69^{+0.03}_{-0.05}$	850	$13.1^{+0.2}_{-0.3}$
GW191204_110529	$47.2^{+9.2}_{-8.0}$	$19.8^{+3.6}_{-3.3}$	$27.3^{+11.0}_{-6.0}$	$19.3^{+5.6}_{-6.0}$	$0.05^{+0.26}_{-0.27}$	$1.8^{+1.7}_{-1.1}$	$0.34^{+0.25}_{-0.18}$	$45.0^{+8.6}_{-7.6}$	$0.71^{+0.12}_{-0.11}$	3700	$8.8^{+0.4}_{-0.6}$
GW191204_171526	$20.21^{+1.70}_{-0.96}$	$8.55^{+0.38}_{-0.27}$	$11.9^{+3.3}_{-1.8}$	$8.2^{+1.4}_{-1.6}$	$0.16^{+0.08}_{-0.05}$	$0.65^{+0.19}_{-0.25}$	$0.13^{+0.04}_{-0.05}$	$19.21^{+1.79}_{-0.95}$	$0.73^{+0.03}_{-0.03}$	350	$17.5^{+0.2}_{-0.2}$ ✓
GW191215_223052	$43.3^{+5.3}_{-4.3}$	$18.4^{+2.2}_{-1.7}$	$24.9^{+7.1}_{-4.1}$	$18.1^{+3.8}_{-4.1}$	$-0.04^{+0.17}_{-0.21}$	$1.93^{+0.89}_{-0.86}$	$0.35^{+0.13}_{-0.14}$	$41.4^{+5.1}_{-4.1}$	$0.68^{+0.07}_{-0.07}$	530	$11.2^{+0.3}_{-0.4}$
GW191216_213338	$19.81^{+2.69}_{-0.94}$	$8.33^{+0.22}_{-0.19}$	$12.1^{+4.6}_{-2.3}$	$7.7^{+1.6}_{-1.9}$	$0.11^{+0.13}_{-0.06}$	$0.34^{+0.12}_{-0.13}$	$0.07^{+0.02}_{-0.03}$	$18.87^{+2.80}_{-0.94}$	$0.70^{+0.03}_{-0.04}$	490	$18.6^{+0.2}_{-0.2}$ ✓
<i>GW191219_163120</i>	$32.3^{+2.2}_{-2.7}$	$4.32^{+0.12}_{-0.17}$	$31.1^{+2.2}_{-2.8}$	$1.17^{+0.07}_{-0.06}$	$0.00^{+0.07}_{-0.09}$	$0.55^{+0.25}_{-0.16}$	$0.11^{+0.05}_{-0.03}$	$32.2^{+2.2}_{-2.7}$	$0.14^{+0.06}_{-0.06}$	1500	$9.1^{+0.5}_{-0.8}$
GW191222_033537	79^{+16}_{-11}	$33.8^{+7.1}_{-5.0}$	$45.1^{+10.9}_{-8.0}$	$34.7^{+9.3}_{-10.5}$	$-0.04^{+0.20}_{-0.25}$	$3.0^{+1.7}_{-1.7}$	$0.51^{+0.23}_{-0.26}$	$75.5^{+15.3}_{-9.9}$	$0.67^{+0.08}_{-0.11}$	2000	$12.5^{+0.2}_{-0.3}$
GW191230_180458	86^{+19}_{-12}	$36.5^{+8.2}_{-5.6}$	$49.4^{+14.0}_{-9.6}$	37^{+11}_{-12}	$-0.05^{+0.26}_{-0.31}$	$4.3^{+2.1}_{-1.9}$	$0.69^{+0.26}_{-0.27}$	82^{+17}_{-11}	$0.68^{+0.11}_{-0.13}$	1100	$10.4^{+0.3}_{-0.4}$
<i>GW200105_162426</i>	$11.0^{+1.5}_{-1.4}$	$3.42^{+0.08}_{-0.08}$	$9.0^{+1.7}_{-1.7}$	$1.91^{+0.33}_{-0.24}$	$0.00^{+0.13}_{-0.18}$	$0.27^{+0.12}_{-0.11}$	$0.06^{+0.02}_{-0.02}$	$10.7^{+1.5}_{-1.4}$	$0.43^{+0.05}_{-0.02}$	7900	$13.7^{+0.2}_{-0.4}$
GW200112_155838	$63.9^{+5.7}_{-4.6}$	$27.4^{+2.6}_{-2.1}$	$35.6^{+6.7}_{-4.5}$	$28.3^{+4.4}_{-5.9}$	$0.06^{+0.15}_{-0.15}$	$1.25^{+0.43}_{-0.46}$	$0.24^{+0.07}_{-0.08}$	$60.8^{+5.3}_{-4.3}$	$0.71^{+0.06}_{-0.06}$	4300	$19.8^{+0.1}_{-0.2}$ ✓

✓ good S/N

✓ good S/N, but too light/heavy BH

GWTC-3 (O3b) continued

Event	M (M_{\odot})	\mathcal{M} (M_{\odot})	m_1 (M_{\odot})	m_2 (M_{\odot})	χ_{eff}	D_L (Gpc)	z	M_f (M_{\odot})	χ_f	$\Delta\Omega$ (deg ²)	SNR
GW200115_042309	$7.4^{+1.8}_{-1.7}$	$2.43^{+0.05}_{-0.07}$	$5.9^{+2.0}_{-2.5}$	$1.44^{+0.85}_{-0.29}$	$-0.15^{+0.24}_{-0.42}$	$0.29^{+0.15}_{-0.10}$	$0.06^{+0.03}_{-0.02}$	$7.2^{+1.8}_{-1.7}$	$0.42^{+0.09}_{-0.05}$	370	$11.3^{+0.3}_{-0.5}$
GW200128_022011	75^{+17}_{-12}	$32.0^{+7.5}_{-5.5}$	$42.2^{+11.6}_{-8.1}$	$32.6^{+9.5}_{-9.2}$	$0.12^{+0.24}_{-0.25}$	$3.4^{+2.1}_{-1.8}$	$0.56^{+0.28}_{-0.28}$	71^{+16}_{-11}	$0.74^{+0.10}_{-0.10}$	2600	$10.6^{+0.3}_{-0.4}$
GW200129_065458	$63.4^{+4.3}_{-3.6}$	$27.2^{+2.1}_{-2.3}$	$34.5^{+9.9}_{-3.2}$	$28.9^{+3.4}_{-9.3}$	$0.11^{+0.11}_{-0.16}$	$0.90^{+0.29}_{-0.38}$	$0.18^{+0.05}_{-0.07}$	$60.3^{+4.0}_{-3.3}$	$0.73^{+0.06}_{-0.05}$	130	$26.8^{+0.2}_{-0.2}$ ✓
GW200202_154313	$17.58^{+1.78}_{-0.67}$	$7.49^{+0.24}_{-0.20}$	$10.1^{+3.5}_{-1.4}$	$7.3^{+1.1}_{-1.7}$	$0.04^{+0.13}_{-0.06}$	$0.41^{+0.15}_{-0.16}$	$0.09^{+0.03}_{-0.03}$	$16.76^{+1.87}_{-0.66}$	$0.69^{+0.03}_{-0.04}$	170	$10.8^{+0.2}_{-0.4}$
GW200208_130117	$65.4^{+7.8}_{-6.8}$	$27.7^{+3.6}_{-3.1}$	$37.8^{+9.2}_{-6.2}$	$27.4^{+6.1}_{-7.4}$	$-0.07^{+0.22}_{-0.27}$	$2.23^{+1.00}_{-0.85}$	$0.40^{+0.15}_{-0.14}$	$62.5^{+7.3}_{-6.4}$	$0.66^{+0.09}_{-0.13}$	30	$10.8^{+0.3}_{-0.4}$
GW200208_222617	63^{+100}_{-25}	$19.6^{+10.7}_{-5.1}$	51^{+104}_{-30}	$12.3^{+9.0}_{-5.7}$	$0.45^{+0.43}_{-0.44}$	$4.1^{+4.4}_{-1.9}$	$0.66^{+0.54}_{-0.28}$	61^{+100}_{-25}	$0.83^{+0.14}_{-0.27}$	2000	$7.4^{+1.4}_{-1.2}$
GW200209_085452	$62.6^{+13.9}_{-9.4}$	$26.7^{+6.0}_{-4.2}$	$35.6^{+10.5}_{-6.8}$	$27.1^{+7.8}_{-7.8}$	$-0.12^{+0.24}_{-0.30}$	$3.4^{+1.9}_{-1.8}$	$0.57^{+0.25}_{-0.26}$	$59.9^{+13.1}_{-8.9}$	$0.66^{+0.10}_{-0.12}$	730	$9.6^{+0.4}_{-0.5}$
GW200210_092254	$27.0^{+7.1}_{-4.3}$	$6.56^{+0.38}_{-0.40}$	$24.1^{+7.5}_{-4.6}$	$2.83^{+0.47}_{-0.42}$	$0.02^{+0.22}_{-0.21}$	$0.94^{+0.43}_{-0.34}$	$0.19^{+0.08}_{-0.06}$	$26.7^{+7.2}_{-4.3}$	$0.34^{+0.13}_{-0.08}$	1800	$8.4^{+0.5}_{-0.7}$
GW200216_220804	81^{+20}_{-14}	$32.9^{+9.3}_{-8.5}$	51^{+22}_{-13}	30^{+14}_{-16}	$0.10^{+0.34}_{-0.36}$	$3.8^{+3.0}_{-2.0}$	$0.63^{+0.37}_{-0.29}$	78^{+19}_{-13}	$0.70^{+0.14}_{-0.24}$	2900	$8.1^{+0.4}_{-0.5}$
GW200219_094415	$65.0^{+12.6}_{-8.2}$	$27.6^{+5.6}_{-3.8}$	$37.5^{+10.1}_{-6.9}$	$27.9^{+7.4}_{-8.4}$	$-0.08^{+0.23}_{-0.29}$	$3.4^{+1.7}_{-1.5}$	$0.57^{+0.22}_{-0.22}$	$62.2^{+11.7}_{-7.8}$	$0.66^{+0.10}_{-0.13}$	700	$10.7^{+0.3}_{-0.5}$
GW200220_061928	148^{+55}_{-33}	62^{+23}_{-15}	87^{+40}_{-23}	61^{+26}_{-25}	$0.06^{+0.40}_{-0.38}$	$6.0^{+4.8}_{-3.1}$	$0.90^{+0.55}_{-0.40}$	141^{+51}_{-31}	$0.71^{+0.15}_{-0.17}$	3000	$7.2^{+0.4}_{-0.7}$
GW200220_124850	67^{+17}_{-12}	$28.2^{+7.3}_{-5.1}$	$38.9^{+14.1}_{-8.6}$	$27.9^{+9.2}_{-9.0}$	$-0.07^{+0.27}_{-0.33}$	$4.0^{+2.8}_{-2.2}$	$0.66^{+0.36}_{-0.31}$	64^{+16}_{-11}	$0.67^{+0.11}_{-0.14}$	3200	$8.5^{+0.3}_{-0.5}$
GW200224_222234	$72.2^{+7.2}_{-5.1}$	$31.1^{+3.2}_{-2.6}$	$40.0^{+6.9}_{-4.5}$	$32.5^{+5.0}_{-7.2}$	$0.10^{+0.15}_{-0.15}$	$1.71^{+0.49}_{-0.64}$	$0.32^{+0.08}_{-0.11}$	$68.6^{+6.6}_{-4.7}$	$0.73^{+0.07}_{-0.07}$	50	$20.0^{+0.2}_{-0.2}$ ✓
GW200225_060421	$33.5^{+3.6}_{-3.0}$	$14.2^{+1.5}_{-1.4}$	$19.3^{+5.0}_{-3.0}$	$14.0^{+2.8}_{-3.5}$	$-0.12^{+0.17}_{-0.28}$	$1.15^{+0.51}_{-0.53}$	$0.22^{+0.09}_{-0.10}$	$32.1^{+3.5}_{-2.8}$	$0.66^{+0.07}_{-0.13}$	370	$12.5^{+0.3}_{-0.4}$
GW200302_015811	$57.8^{+9.6}_{-6.9}$	$23.4^{+4.7}_{-3.0}$	$37.8^{+8.7}_{-8.5}$	$20.0^{+8.1}_{-5.7}$	$0.01^{+0.25}_{-0.26}$	$1.48^{+1.02}_{-0.70}$	$0.28^{+0.16}_{-0.12}$	$55.5^{+8.9}_{-6.6}$	$0.66^{+0.13}_{-0.15}$	6000	$10.8^{+0.3}_{-0.4}$
GW200306_093714	$43.9^{+11.8}_{-7.5}$	$17.5^{+3.5}_{-3.0}$	$28.3^{+17.1}_{-7.7}$	$14.8^{+6.5}_{-6.4}$	$0.32^{+0.28}_{-0.46}$	$2.1^{+1.7}_{-1.1}$	$0.38^{+0.24}_{-0.18}$	$41.7^{+12.3}_{-6.9}$	$0.78^{+0.11}_{-0.26}$	4600	$7.8^{+0.4}_{-0.6}$
GW200308_173609*	$50.6^{+10.9}_{-8.5}$	$19.0^{+4.8}_{-2.8}$	$36.4^{+11.2}_{-9.6}$	$13.8^{+7.2}_{-3.3}$	$0.65^{+0.17}_{-0.21}$	$5.4^{+2.7}_{-2.6}$	$0.83^{+0.32}_{-0.35}$	$47.4^{+11.1}_{-7.7}$	$0.91^{+0.03}_{-0.08}$	2000	$7.1^{+0.5}_{-0.5}$
GW200311_115853	$61.9^{+5.3}_{-4.2}$	$26.6^{+2.4}_{-2.0}$	$34.2^{+6.4}_{-3.8}$	$27.7^{+4.1}_{-5.9}$	$-0.02^{+0.16}_{-0.20}$	$1.17^{+0.28}_{-0.40}$	$0.23^{+0.05}_{-0.07}$	$59.0^{+4.8}_{-3.9}$	$0.69^{+0.07}_{-0.08}$	35	$17.8^{+0.2}_{-0.2}$ ✓
GW200316_215756	$21.2^{+7.2}_{-2.0}$	$8.75^{+0.62}_{-0.55}$	$13.1^{+10.2}_{-2.9}$	$7.8^{+1.9}_{-2.9}$	$0.13^{+0.27}_{-0.10}$	$1.12^{+0.47}_{-0.44}$	$0.22^{+0.08}_{-0.08}$	$20.2^{+7.4}_{-1.9}$	$0.70^{+0.04}_{-0.04}$	190	$10.3^{+0.4}_{-0.7}$
GW200322_091133*	55^{+37}_{-27}	$15.5^{+15.7}_{-3.7}$	34^{+48}_{-18}	$14.0^{+16.8}_{-8.7}$	$0.24^{+0.45}_{-0.51}$	$3.6^{+7.0}_{-2.0}$	$0.60^{+0.84}_{-0.30}$	53^{+38}_{-26}	$0.78^{+0.16}_{-0.17}$	6500	$6.0^{+1.7}_{-1.2}$

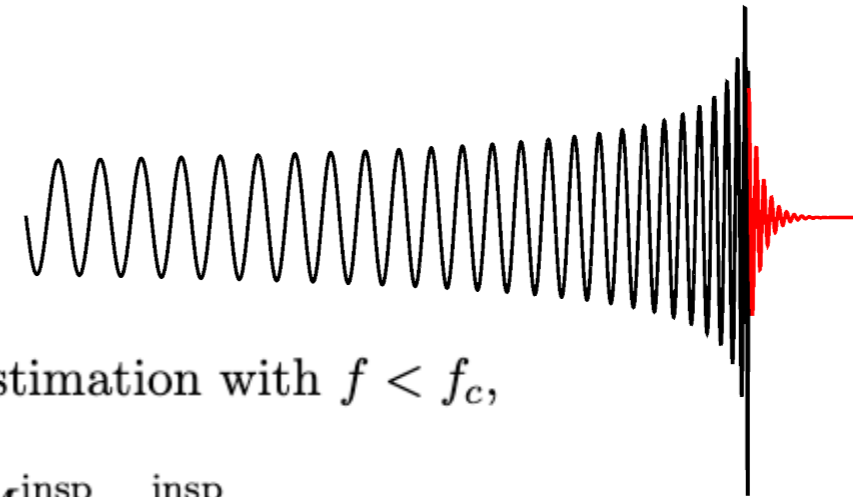
Tests of General Relativity with GWTC-3 (LVK paper)

1. residuals test
2. inspiral–merger–ringdown consistency test
3. parametrized tests of GW generation
4. spin-induced moments
5. modified GW dispersion relation
6. polarization content
7. ringdown
8. echoes searches

Event	Inst.	Properties					SNR	Tests performed							
		D_L [Gpc]	$(1+z)M$ [M_\odot]	$(1+z)M$ [M_\odot]	$(1+z)M_f$ [M_\odot]	χ_f		RT	IMR	PAR	SIM	MDR	POL	RD	ECH
GW191109_010717	HL	1.29 ^{+1.13} _{-0.65}	140 ⁺²¹ ₋₁₇	60.1 ^{+9.8} _{-9.3}	135 ⁺¹⁹ ₋₁₅	0.61 ^{+0.18} _{-0.19}	17.3 ^{+0.5} _{-0.5}	✓	–	–	–	–	✓	✓	✓
GW191129_134029	HL	0.79 ^{+0.26} _{-0.33}	20.10 ^{+2.94} _{-0.64}	8.49 ^{+0.06} _{-0.05}	19.19 ^{+3.07} _{-0.67}	0.69 ^{+0.03} _{-0.05}	13.1 ^{+0.2} _{-0.3}	✓	–	✓	✓	✓	–	–	✓
GW191204_171526	HL	0.65 ^{+0.19} _{-0.25}	22.74 ^{+1.94} _{-0.48}	9.70 ^{+0.05} _{-0.05}	21.60 ^{+2.05} _{-0.50}	0.73 ^{+0.03} _{-0.03}	17.5 ^{+0.2} _{-0.2}	✓	–	✓	✓	✓	✓	–	✓
GW191215_223052	HLV	1.93 ^{+0.89} _{-0.86}	58.4 ^{+4.8} _{-3.7}	24.9 ^{+1.5} _{-1.4}	55.8 ^{+4.8} _{-3.3}	0.68 ^{+0.07} _{-0.07}	11.2 ^{+0.3} _{-0.4}	✓	–	–	–	✓	✓	–	✓
GW191216_213338	HV	0.34 ^{+0.12} _{-0.13}	21.17 ^{+2.93} _{-0.66}	8.94 ^{+0.05} _{-0.05}	20.18 ^{+3.06} _{-0.70}	0.70 ^{+0.03} _{-0.04}	18.6 ^{+0.2} _{-0.2}	✓	–	✓	✓	✓	✓	–	✓
GW191222_033537	HL	3.0 ^{+1.7} _{-1.7}	119 ⁺¹⁶ ₋₁₃	51.0 ^{+7.2} _{-6.5}	114 ⁺¹⁴ ₋₁₂	0.67 ^{+0.08} _{-0.11}	12.5 ^{+0.2} _{-0.3}	✓	–	–	–	✓	✓	✓	✓
GW200115_042309	HLV	0.29 ^{+0.15} _{-0.10}	7.8 ^{+1.9} _{-1.8}	2.58 ^{+0.01} _{-0.01}	7.7 ^{+1.9} _{-1.8}	0.42 ^{+0.09} _{-0.05}	11.3 ^{+0.3} _{-0.5}	✓	–	✓	–	–	–	–	✓
GW200129_065458	HLV	0.90 ^{+0.29} _{-0.38}	74.6 ^{+4.5} _{-3.8}	32.1 ^{+1.8} _{-2.6}	70.9 ^{+4.2} _{-3.4}	0.73 ^{+0.06} _{-0.05}	26.8 ^{+0.2} _{-0.2}	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
GW200202_154313	HLV	0.41 ^{+0.15} _{-0.16}	19.01 ^{+1.99} _{-0.34}	8.15 ^{+0.05} _{-0.05}	18.12 ^{+2.09} _{-0.35}	0.69 ^{+0.03} _{-0.04}	10.8 ^{+0.2} _{-0.4}	✓	–	✓	–	✓	–	–	✓
GW200208_130117	HLV	2.23 ^{+1.00} _{-0.85}	91 ⁺¹¹ ₋₁₀	38.8 ^{+5.2} _{-4.8}	87.5 ^{+10.3} _{-9.1}	0.66 ^{+0.09} _{-0.13}	10.8 ^{+0.3} _{-0.4}	✓	✓	–	–	✓	✓	–	✓
GW200219_094415	HLV	3.4 ^{+1.7} _{-1.5}	103 ⁺¹⁴ ₋₁₂	43.7 ^{+6.3} _{-6.2}	98 ⁺¹³ ₋₁₁	0.66 ^{+0.10} _{-0.13}	10.7 ^{+0.3} _{-0.5}	✓	–	–	–	✓	✓	–	✓
GW200224_222234	HLV	1.71 ^{+0.49} _{-0.64}	94.9 ^{+8.3} _{-7.2}	40.9 ^{+3.5} _{-3.8}	90.2 ^{+7.5} _{-6.4}	0.73 ^{+0.07} _{-0.07}	20.0 ^{+0.2} _{-0.2}	✓	✓	–	–	✓	✓	✓	✓
GW200225_060421	HL	1.15 ^{+0.51} _{-0.53}	41.2 ^{+3.0} _{-4.0}	17.65 ^{+0.98} _{-1.97}	39.4 ^{+2.9} _{-3.6}	0.66 ^{+0.07} _{-0.13}	12.5 ^{+0.3} _{-0.4}	✓	✓	✓	✓	✓	✓	–	✓
GW200311_115853	HLV	1.17 ^{+0.28} _{-0.40}	75.9 ^{+6.2} _{-5.7}	32.7 ^{+2.7} _{-2.8}	72.4 ^{+5.6} _{-5.1}	0.69 ^{+0.07} _{-0.08}	17.8 ^{+0.2} _{-0.2}	✓	✓	✓	–	✓	✓	✓	✓
GW200316_215756	HLV	1.12 ^{+0.47} _{-0.44}	25.5 ^{+8.7} _{-1.1}	10.68 ^{+0.12} _{-0.12}	24.3 ^{+9.0} _{-1.1}	0.70 ^{+0.04} _{-0.04}	10.3 ^{+0.4} _{-0.7}	✓	–	✓	✓	–	–	–	✓

Tests of General Relativity with GWTC-3 (LVK paper)

2. inspiral–merger–ringdown consistency test

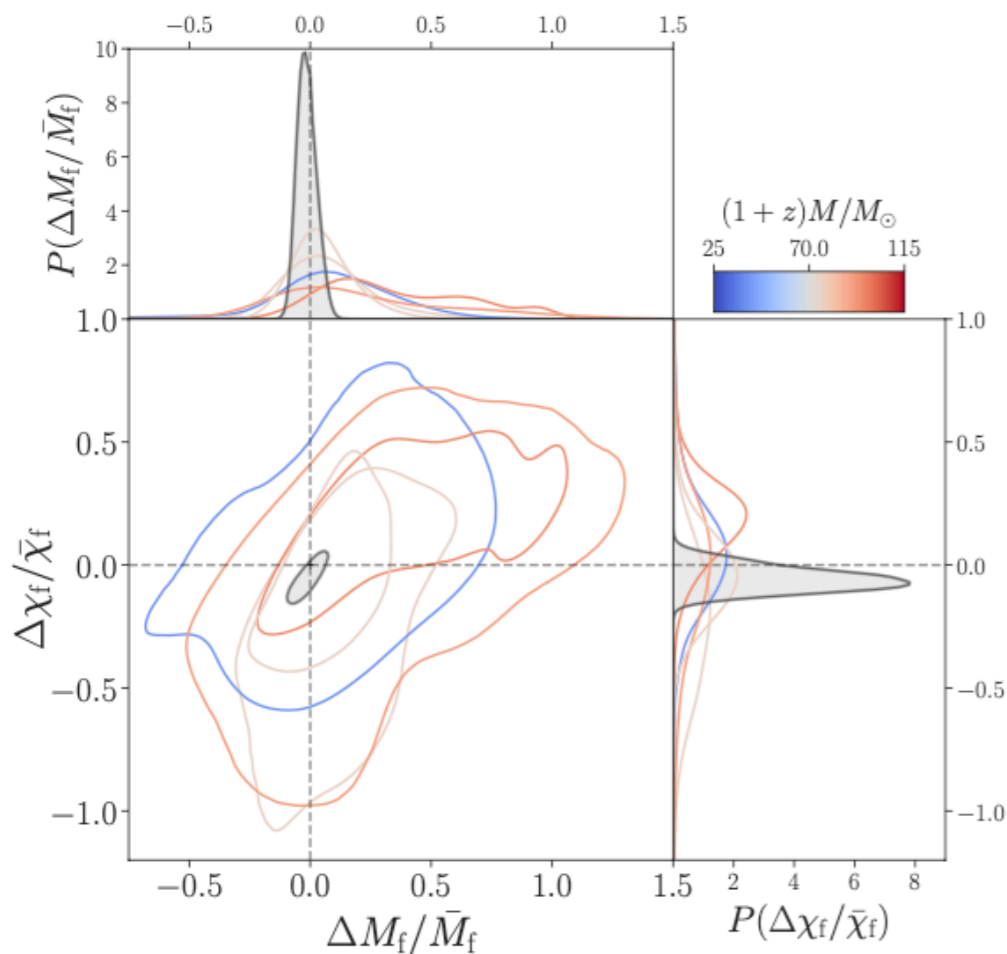


Parameter Estimation with $f < f_c$,

$$M_f^{\text{insp}}, \chi_f^{\text{insp}}$$

with $f > f_c$,

$$M_f^{\text{postinsp}}, \chi_f^{\text{postinsp}}$$



Waveform models

IMRPhenomXPHM - phenomenological PN-based models, calibrated to NR

Event	f_c^{IMR} [Hz]	ρ_{IMR}	ρ_{insp}	ρ_{postinsp}	$Q_{\text{GR}}^{2\text{D}}$ [%]
GW200129_065458	136	25.7	20.1	16.0	1.5
GW200208_130117	98	9.9	7.2	6.8	10.5
GW200224_222234	107	19.4	14.3	13.1	20.7
GW200225_060421	213	12.9	11.1	6.6	1.3
GW200311_115853	122	17.5	13.5	11.0	15.2

the fraction of the posterior enclosed by the isoproability contour that passes through (0, 0)
[smaller values indicate better consistency]

$$\frac{\Delta M_f}{\bar{M}_f} = 2 \frac{M_f^{\text{insp}} - M_f^{\text{postinsp}}}{M_f^{\text{insp}} + M_f^{\text{postinsp}}}, \quad \frac{\Delta \chi_f}{\bar{\chi}_f} = 2 \frac{\chi_f^{\text{insp}} - \chi_f^{\text{postinsp}}}{\chi_f^{\text{insp}} + \chi_f^{\text{postinsp}}}$$

No statistically significant deviations from GR

Tests of General Relativity with GWTC-3 (LVK paper)

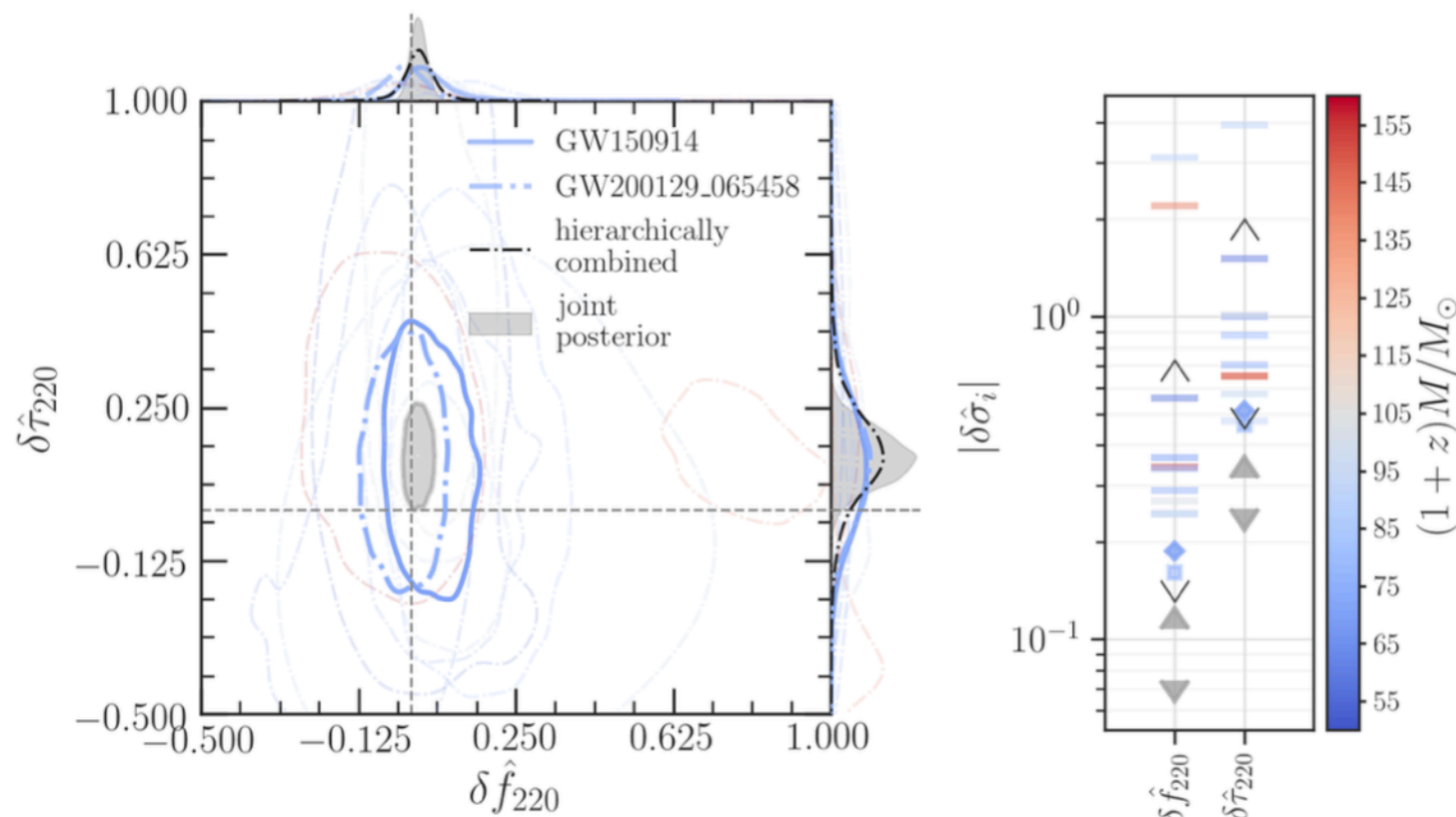
7. ringdown

$$h_+(t) - ih_\times(t) = \sum_{\ell=2}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{A}_{\ell mn} \exp\left[-\frac{t-t_0}{(1+z)\tau_{\ell mn}}\right] \exp\left[\frac{2\pi i f_{\ell mn}(t-t_0)}{1+z}\right] {}_{-2}S_{\ell mn}(\theta, \phi, \chi_f).$$

time-domain ringdown analysis pyRing, based on damped sinusoids,

parametrized ringdown analysis pSEOB, based on the SEOBNRv4HM waveform model.

Event	Redshifted final mass (1+z)M _f [M _⊙]				Final spin χ _f				Higher modes	Overtones	
	IMR	Kerr ₂₂₀	Kerr ₂₂₁	Kerr _{HM}	IMR	Kerr ₂₂₀	Kerr ₂₂₁	Kerr _{HM}	log ₁₀ B ₂₂₀ ^{HM}	log ₁₀ B ₂₂₀ ²²¹	log ₁₀ O _{GR} ^{mod}
GW191109_010717	132.7 ^{+21.9} _{-13.8}	181.7 ^{+28.5} _{-30.6}	179.0 ^{+23.7} _{-21.7}	174.5 ^{+38.1} _{-30.1}	0.60 ^{+0.22} _{-0.19}	0.81 ^{+0.10} _{-0.24}	0.81 ^{+0.08} _{-0.14}	0.77 ^{+0.11} _{-0.21}	-0.11	1.03	-0.27
GW191222_033537	114.2 ^{+14.3} _{-11.7}	111.4 ^{+69.3} _{-29.7}	110.3 ^{+36.2} _{-23.8}	118.3 ^{+97.0} _{-46.2}	0.67 ^{+0.08} _{-0.10}	0.46 ^{+0.41} _{-0.41}	0.52 ^{+0.31} _{-0.43}	0.60 ^{+0.28} _{-0.66}	0.08	-0.83	-0.20
GW200129_065458	71.8 ^{+4.4} _{-3.9}	60.0 ^{+16.7} _{-8.9}	77.0 ^{+14.4} _{-14.2}	219.1 ^{+110.4} _{-140.0}	0.75 ^{+0.06} _{-0.06}	0.31 ^{+0.43} _{-0.28}	0.74 ^{+0.17} _{-0.59}	0.54 ^{+0.35} _{-0.59}	-0.00	-0.47	-0.09
GW200224_222234	90.3 ^{+6.4} _{-6.3}	84.4 ^{+23.2} _{-20.3}	88.6 ^{+15.5} _{-15.2}	119.4 ^{+142.6} _{-34.3}	0.73 ^{+0.06} _{-0.07}	0.61 ^{+0.27} _{-0.49}	0.60 ^{+0.23} _{-0.42}	0.64 ^{+0.27} _{-0.59}	0.20	0.95	-0.11
GW200311_115853	72.1 ^{+5.4} _{-4.7}	68.5 ^{+23.6} _{-13.5}	72.2 ^{+28.6} _{-16.3}	213.2 ^{+167.8} _{-141.5}	0.68 ^{+0.07} _{-0.08}	0.30 ^{+0.44} _{-0.28}	0.58 ^{+0.30} _{-0.47}	0.56 ^{+0.32} _{-0.54}	0.02	-1.16	-0.15



>0 supports higher modes

>0 supports first overtone

>0 disagreement with GR

No statistically significant deviations from GR

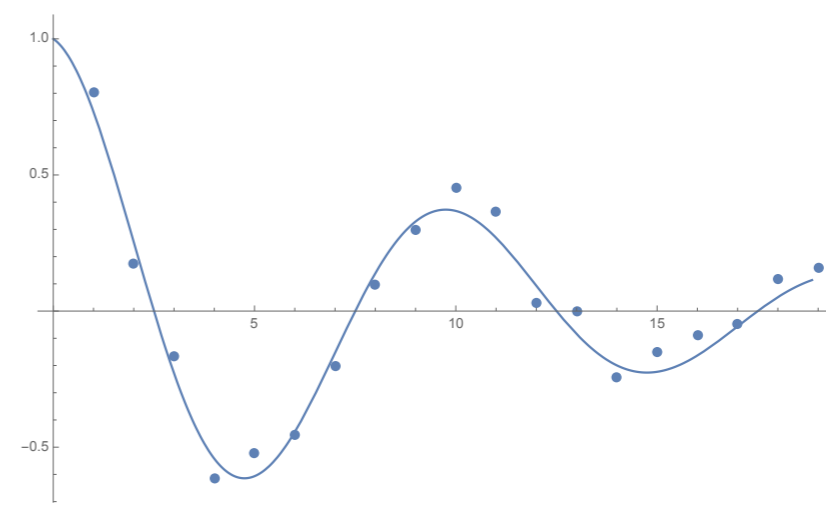
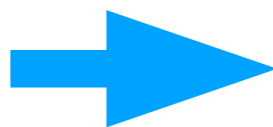
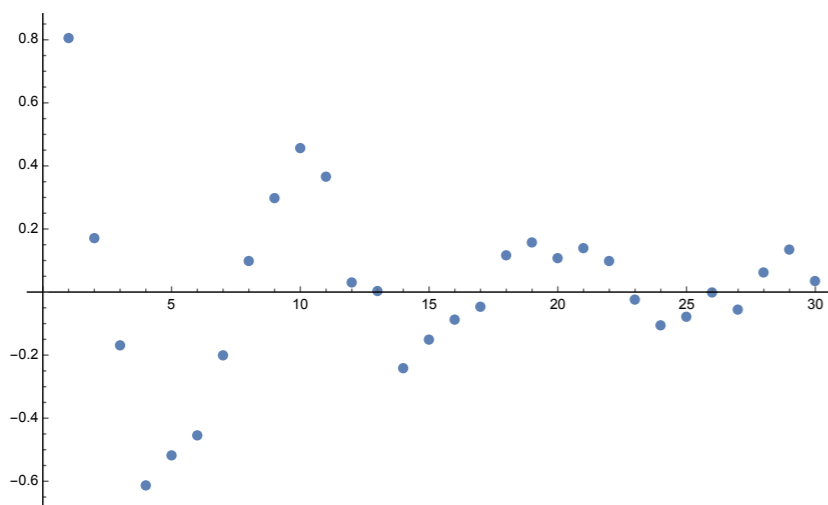
Auto-Regressive model (Method, general) I

Fitting data with linear func.

$$\begin{aligned}
 x_n &= a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_M x_{n-M} + \varepsilon \\
 &= \sum_{j=1}^M a_j x_{n-j} + \varepsilon
 \end{aligned}$$

e.g. $x_n = A e^{-rn\Delta t} \cos(\omega n\Delta t)$

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= e^{-(r-j\omega)\Delta t} \\
 Z_2 &= e^{-(r+j\omega)\Delta t}
 \end{aligned}
 \quad \rightarrow \quad
 x_n = \frac{A}{2} (Z_1^n + Z_2^n) = (Z_1 + Z_2)x_{n-1} - Z_1 Z_2 x_{n-2}$$



can be applied also to noisy data by adjusting M

Auto-Regressive model (Method, general) II

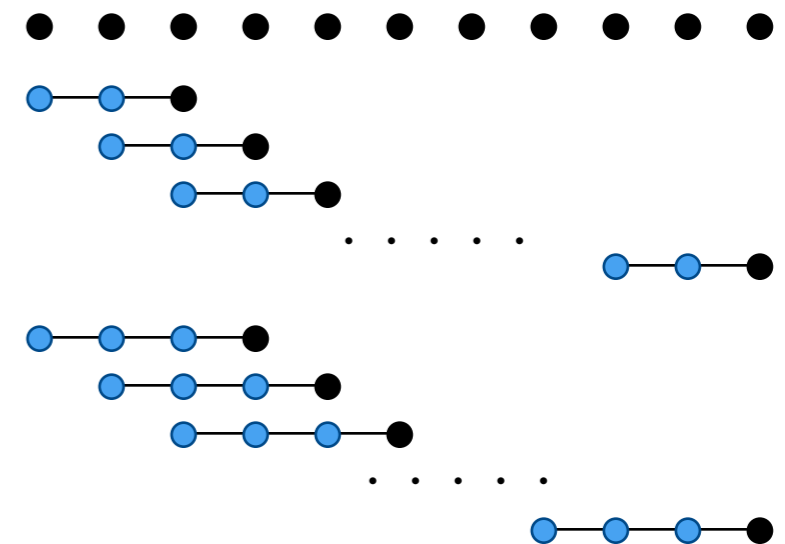
Fitting data with linear func.

$$\begin{aligned}
 x_n &= a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_M x_{n-M} + \varepsilon \\
 &= \sum_{j=1}^M a_j x_{n-j} + \varepsilon
 \end{aligned}$$

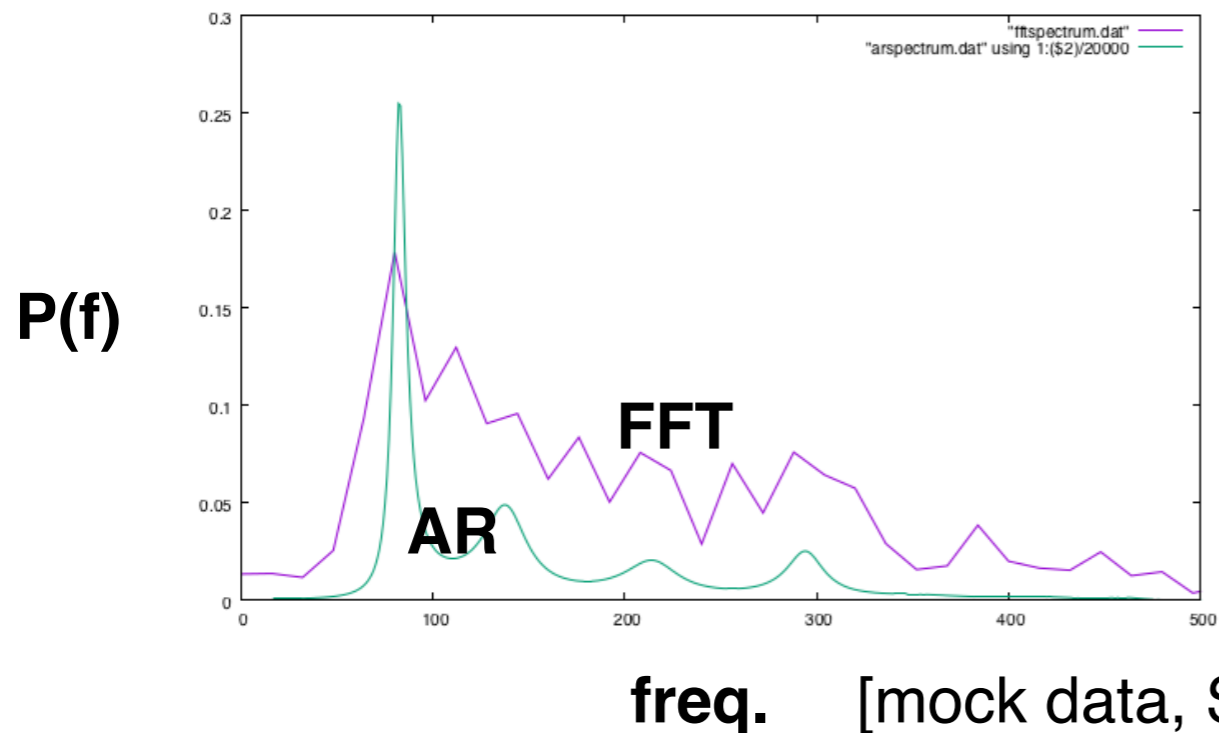
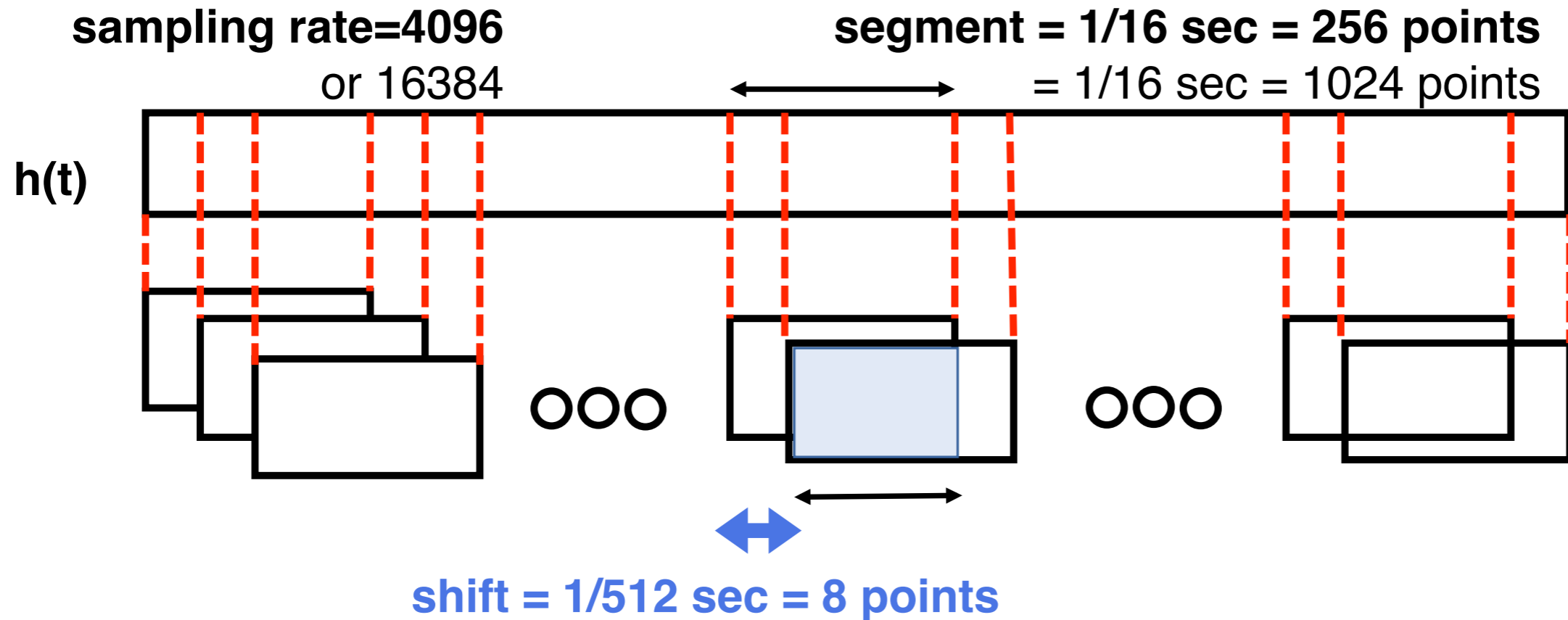
- find a_j (Burg method)
- find M (FPE final prediction error method)
- re-construct wave signal from fitted function
- apply FFT with arbitrary precision.

power spectrum

$$p(f) = \frac{\sigma^2}{\left| 1 - \sum_{j=1}^M a_j e^{-I2\pi j f \Delta t} \right|^2}$$



Auto-Regressive model vs Short FFT



The order M can be fixed at 2~8.

**Even for short segment,
AR model shows precise power-
spectrum.**

Auto-Regressive model (Method, general) III

Fitting data with linear func.

$$\begin{aligned} x_n &= a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_M x_{n-M} + \varepsilon \\ &= \sum_{j=1}^M a_j x_{n-j} + \varepsilon \end{aligned}$$

- find a_j (Burg method)
- find M (FPE final prediction error method)
- re-construct wave signal from fitted function
- apply FFT with arbitrary precision.

power spectrum

$$p(f) = \frac{\sigma^2}{\left| 1 - \sum_{j=1}^M a_j e^{-I2\pi j f \Delta t} \right|^2}$$

characteristic eq.

$$f(z) = 1 - \sum_{j=1}^M a_j z^j = 0$$

$|z_k|$ says amplitude,
 $\arg(z_k)$ says frequency.

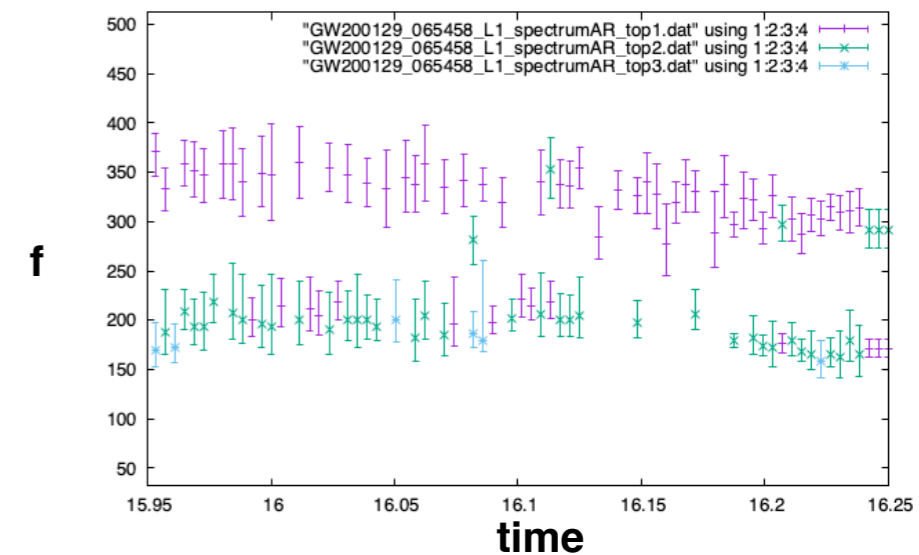
解析手順

干渉計のイベントが報告されたデータ(ホワイトニング後)で, 合体時刻後のデータを解析する.
自己回帰モデルを用いて, 周波数 f_{real} と振幅減衰率 $\tau (= f_{\text{imag}})$ を特定する.

モデルを仮定せずに, 実データのみに基づく

各データセグメントで, 複数の (f, τ) を抽出可能

複数のモードを抽出可能



一定周波数となっているものを探す. (リングダウンモード !?)

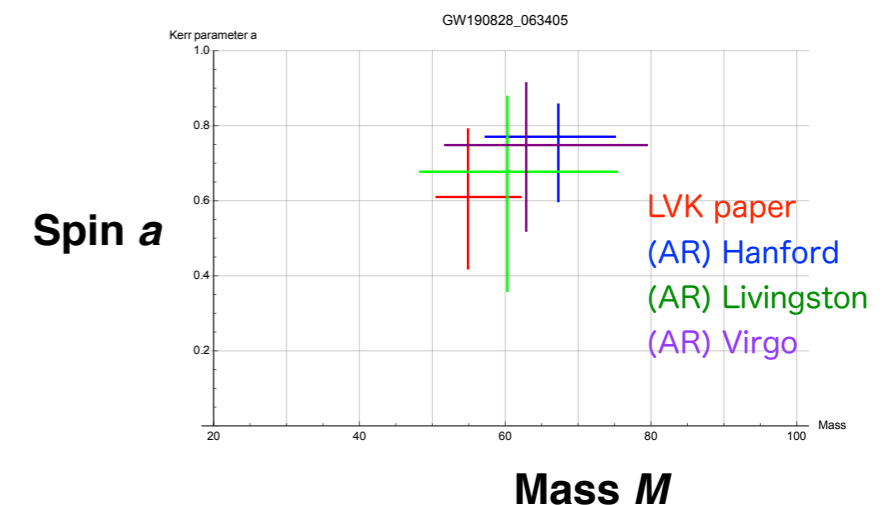
得られた (f, τ) から, 最終的なBHの (M_f, a_f) を求める. (Berti-Cardoso-Will 公式)

(M_f, a_f) は, 3干渉計(Hanford, Livingston, Virgo) で合致するか

(M_f, a_f) は, LVK catalogと合致するか.

GRモデルからのズレはないか.

(LVK catalogにある 赤方偏移 z の値は借用する)

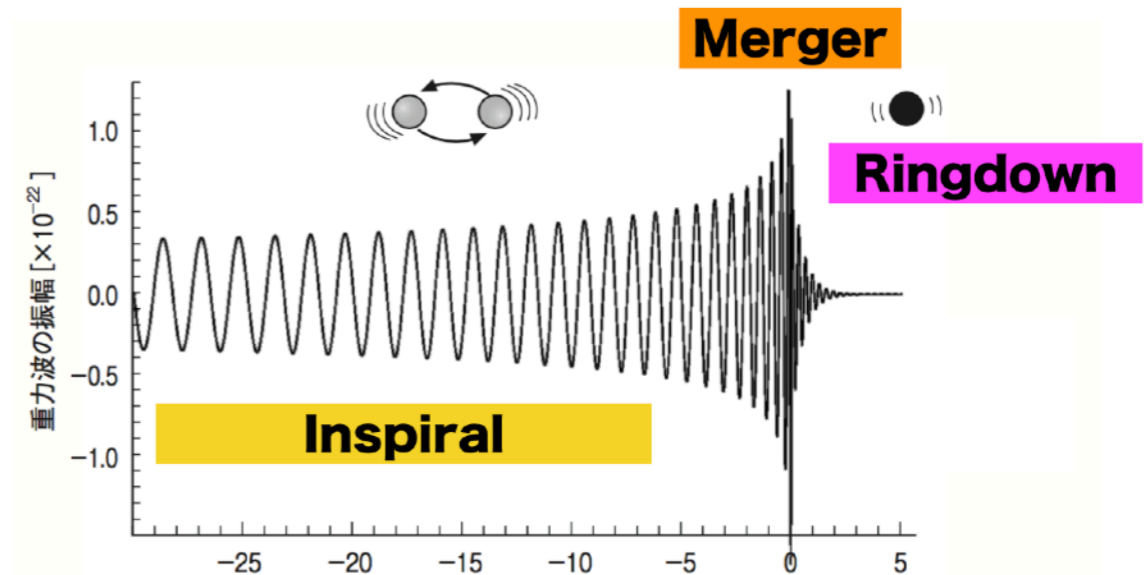


Ring-down modeを独立に見つける手法の比較 (mockdata challenge)

PHYSICAL REVIEW D **99**, 124032 (2019)

Comparison of various methods to extract ringdown frequency from gravitational wave data

Hiroyuki Nakano,^{1,*} Tatsuya Narikawa,^{2,3,†} Ken-ichi Oohara,^{4,‡} Kazuki Sakai,^{5,§}
 Hisa-aki Shinkai,^{6,||} Hirotaka Takahashi,^{7,8,¶} Takahiro Tanaka,^{3,9,**} Nami Uchikata,^{2,4,††}
 Shun Yamamoto,⁶ and Takahiro S. Yamamoto^{3,‡‡}



ringdown search
60 mockdata

TABLE III. We show the values of $\overline{\delta \log f_R}$, $\sigma(f_R)$, $\overline{\delta \log f_I}$, and $\sigma(f_I)$ for various methods. The results limited to set A are given on the first law of each method, while those limited to set B are on the second.

		$\overline{\delta \log f_R}(\%)$	$\sigma(f_R)(\%)$	$\overline{\delta \log f_I}(\%)$	$\sigma(f_I)(\%)$
MF-R	A	-12.88	28.36	-71.51	97.79
	B	-0.82	27.53	-46.11	75.48
MF-MR	A	6.25	17.27	-12.62	37.9
	B	2.47	10.41	7.18	27.61
HHT	A	-13.38	21.91	-44.11	61.58
	B	-8.08	19.81	-28.78	49.61
AR	A	0.2	9.93	4.88	38.75
	B	1.91	8.57	6.2	34.64
NN	A	-6.64	16.48	-15.23	33.96
	B	-6.65	11.97	9.96	23.76

matched filtering

Hilbert-Huan Transformation

Auto-Regression Method

Neural Network method

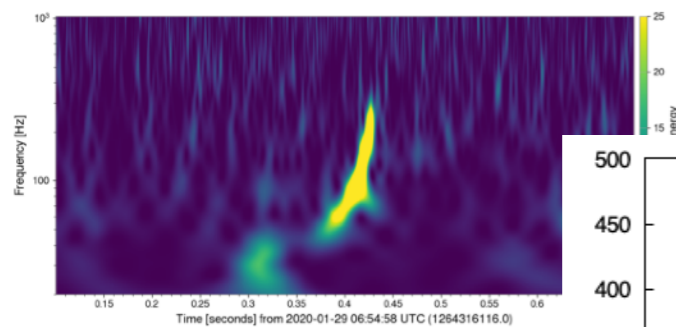
GW200129_065458

LVK paper $(M, a, z) = (60.3_{-3.3}^{+4.}, 0.73_{-0.06}^{+0.06}, 0.18_{-0.07}^{+0.05})$

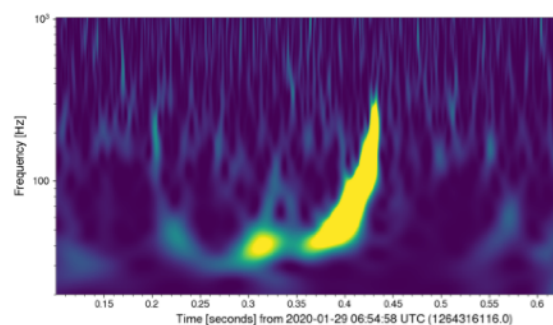
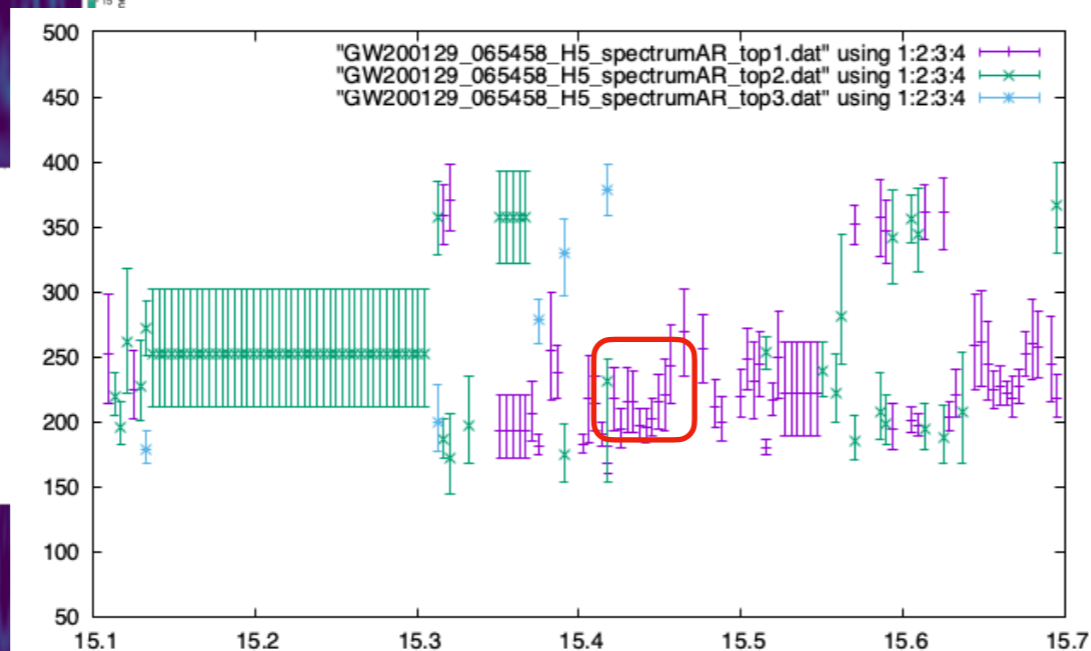
Network SNR=25.7 SNR@post insp = 16.0

Expected f_{QNM}
(detector frame)

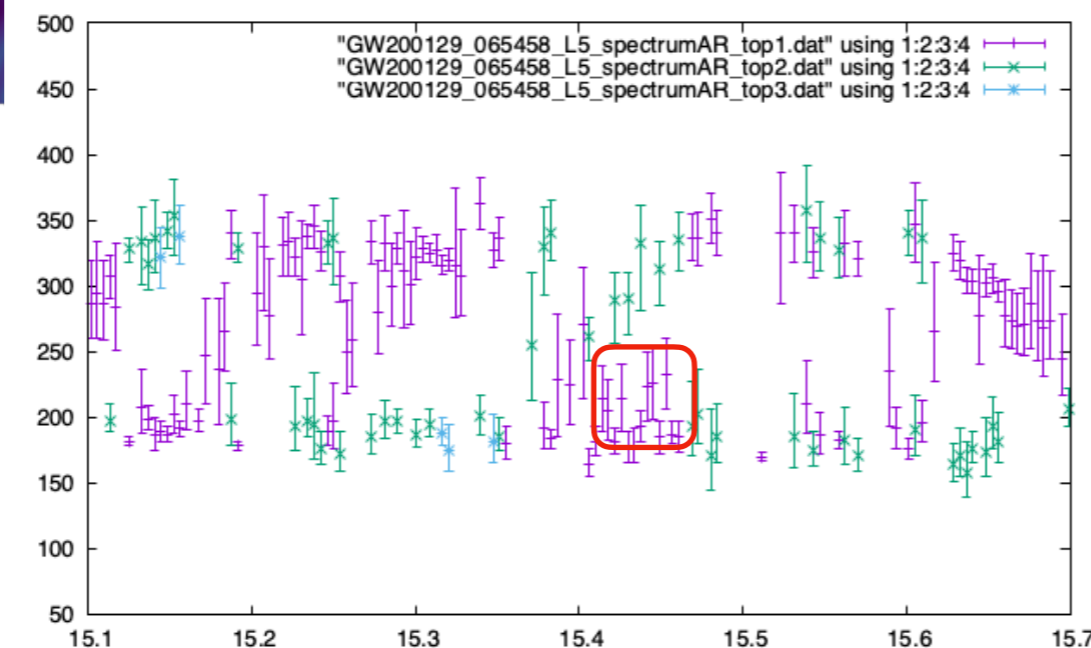
$f_{220} = 249.0$ Hz, $f_{221} = 244.4$ Hz, $f_{222} = 235.4$ Hz
 $f_{210} = 334.0$ Hz, $f_{211} = 204.2$ Hz, $f_{200} = 223.1$ Hz
 $f_{330} = 394.0$ Hz, $f_{331} = 391.3$ Hz, $f_{332} = 386.3$ Hz
 $f_{320} = 351.2$ Hz, $f_{310} = 315.1$ Hz, $f_{300} = 285.4$ Hz



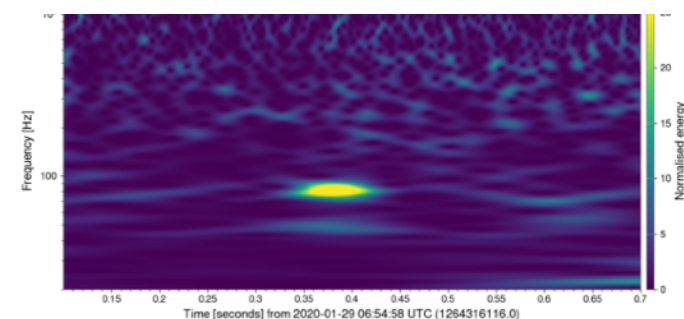
(AR) Hanford



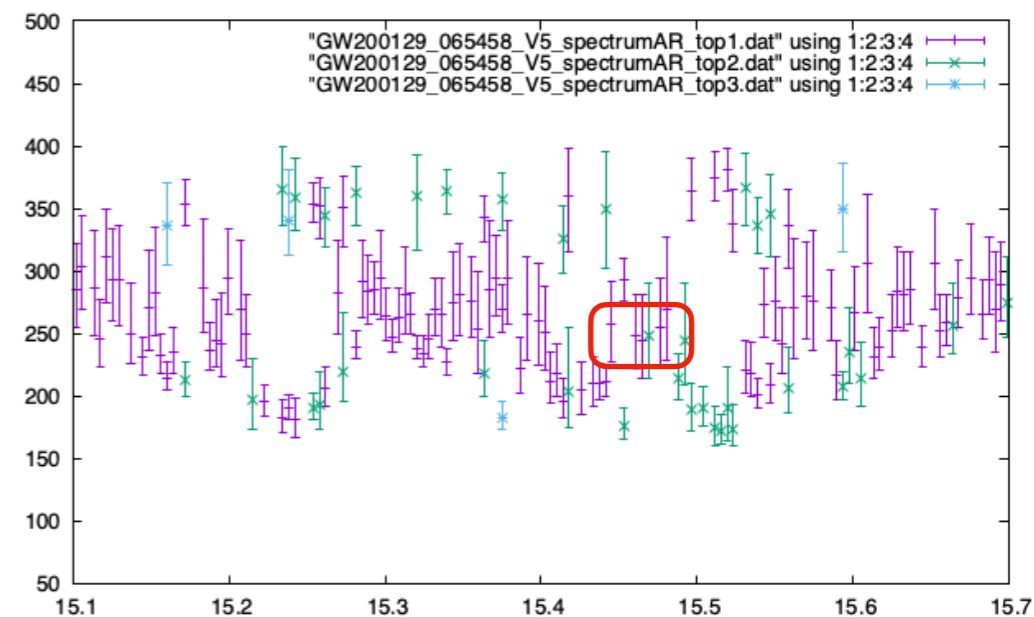
(AR) Livingston



▲ $t_{\text{merger}} = 15.435$



(AR) Virgo



▲ $t_{\text{merger}} = 15.435$

t_{merger} の直後から、50ms位まで、HLV共通に250Hz付近に一定振動数のモードがfirst peakとして見られる

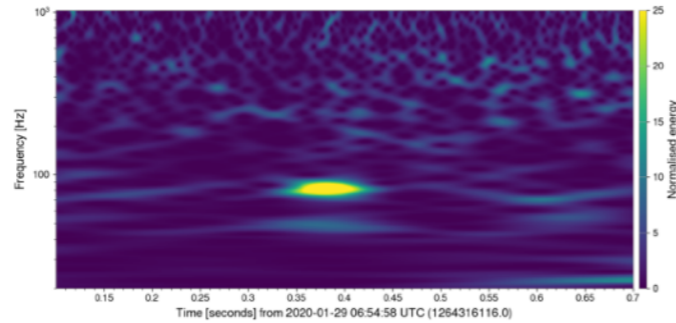
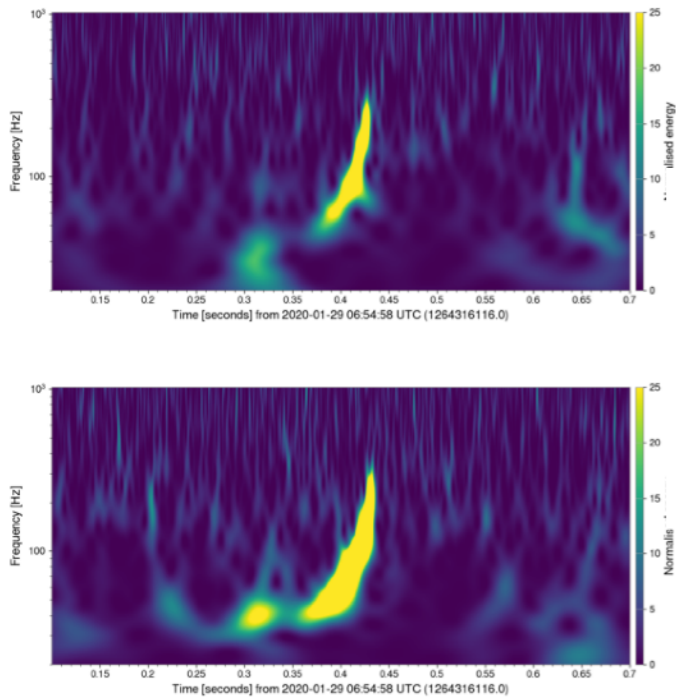
GW200129_065458

LVK paper $(M, a, z) = (60.3_{-3.3}^{+4.}, 0.73_{-0.06}^{+0.06}, 0.18_{-0.07}^{+0.05})$

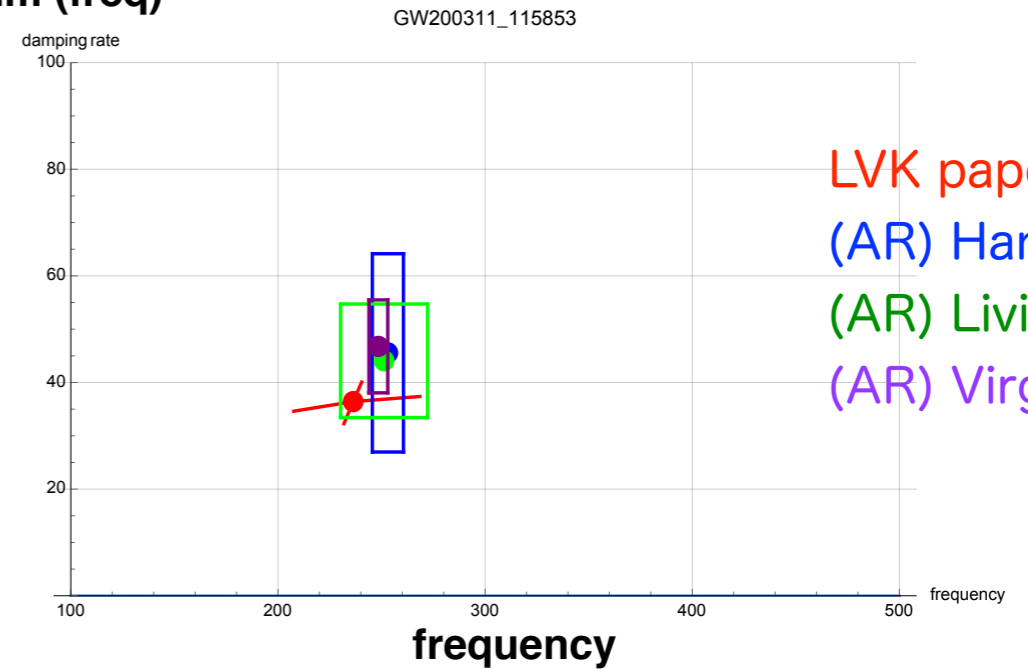
Network SNR=25.7
SNR@post insp = 16.0

Expected f_{QNM}
(detector frame)

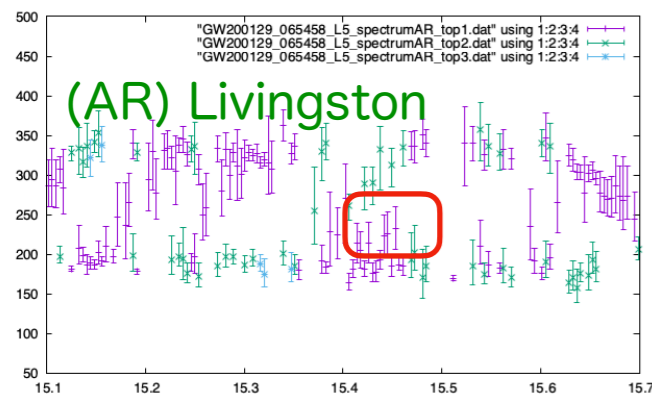
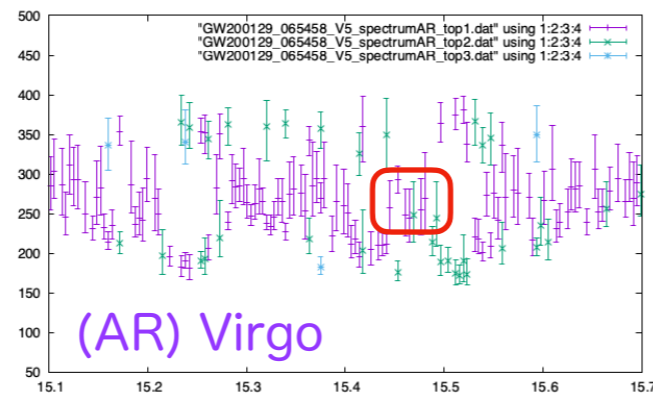
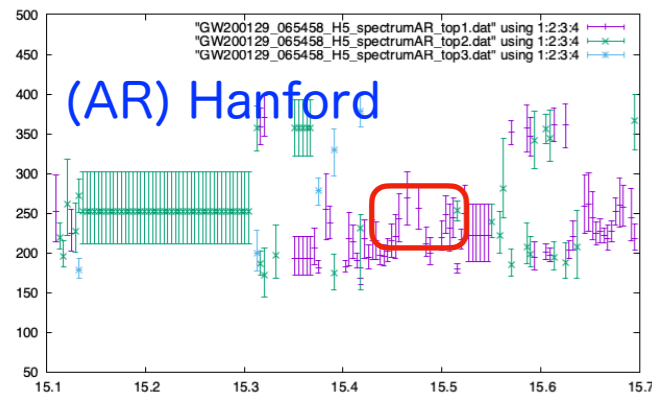
$f_{220} = 249.0$ Hz, $f_{221} = 244.4$ Hz, $f_{222} = 235.4$ Hz
 $f_{210} = 334.0$ Hz, $f_{211} = 204.2$ Hz, $f_{200} = 223.1$ Hz
 $f_{330} = 394.0$ Hz, $f_{331} = 391.3$ Hz, $f_{332} = 386.3$ Hz
 $f_{320} = 351.2$ Hz, $f_{310} = 315.1$ Hz, $f_{300} = 285.4$ Hz



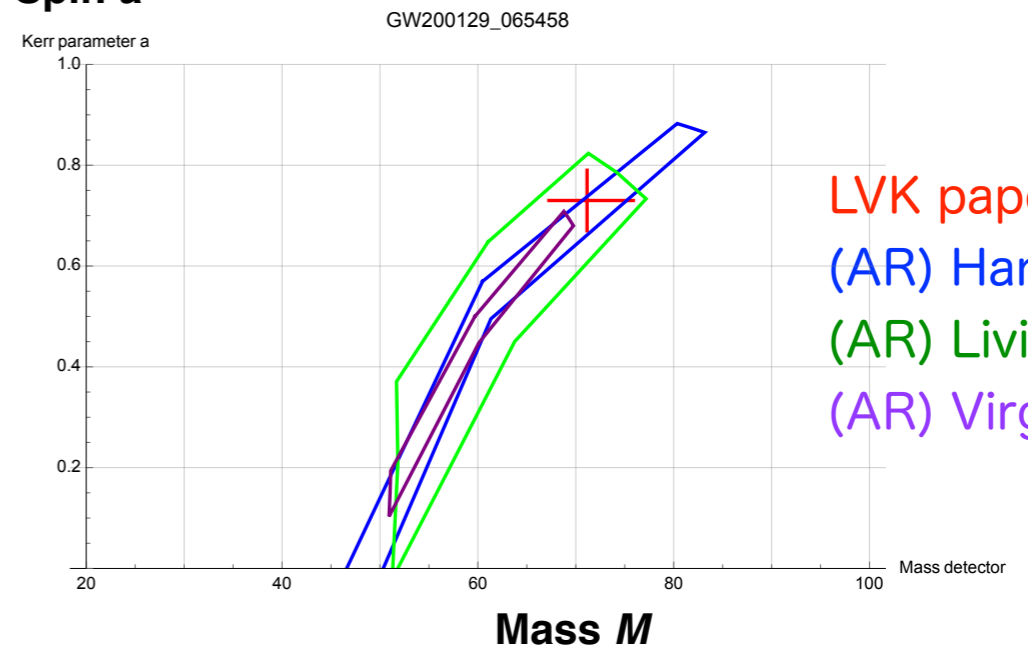
Im (freq)



LVK paper
(AR) Hanford
(AR) Livingston
(AR) Virgo



Spin a



LVK paper
(AR) Hanford
(AR) Livingston
(AR) Virgo

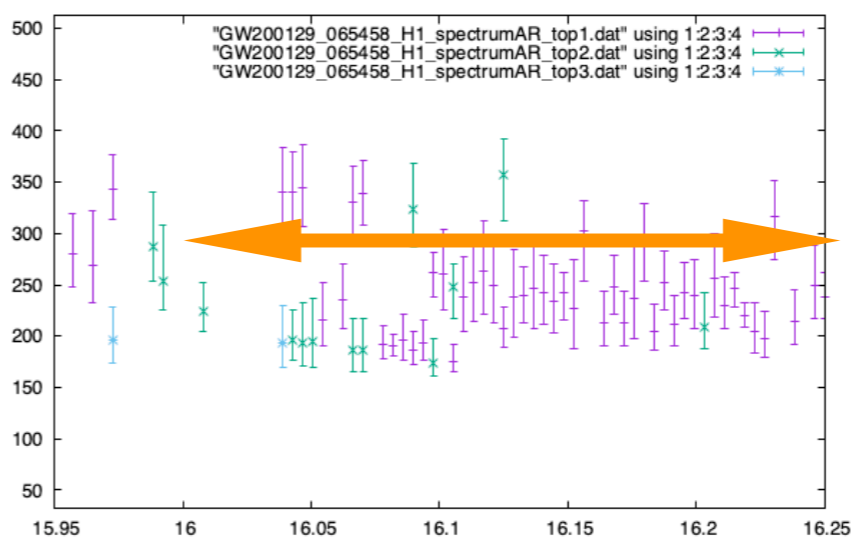
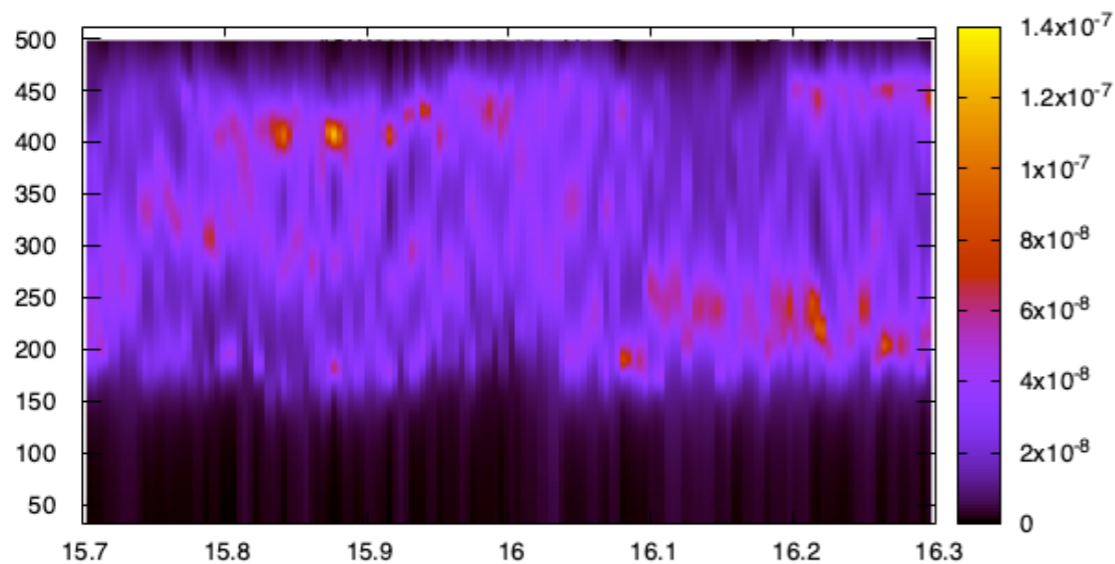
▲ $t_{\text{merger}} = 15.435$

GW200129_065458

LVK paper $(M, a, z) = (60.3_{-3.3}^{+4.}, 0.73_{-0.06}^{+0.06}, 0.18_{-0.07}^{+0.05})$

Hanford

H1_SpectrogramAR

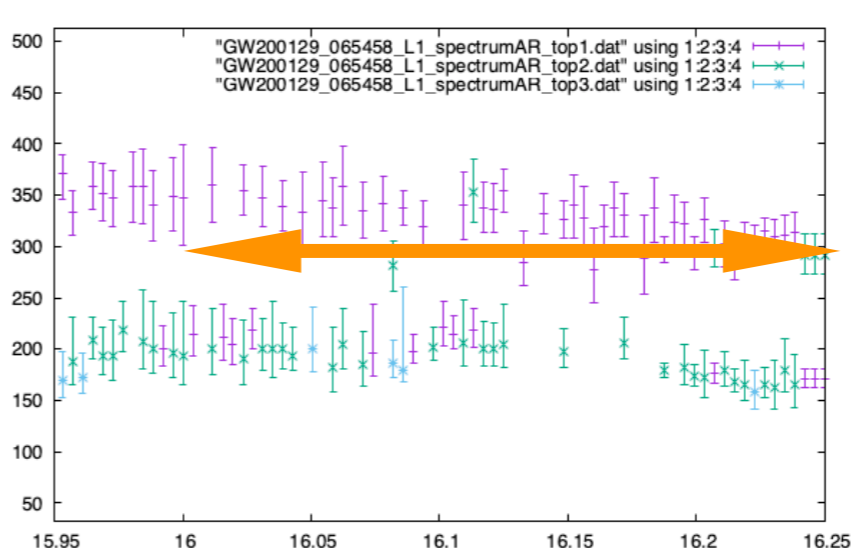
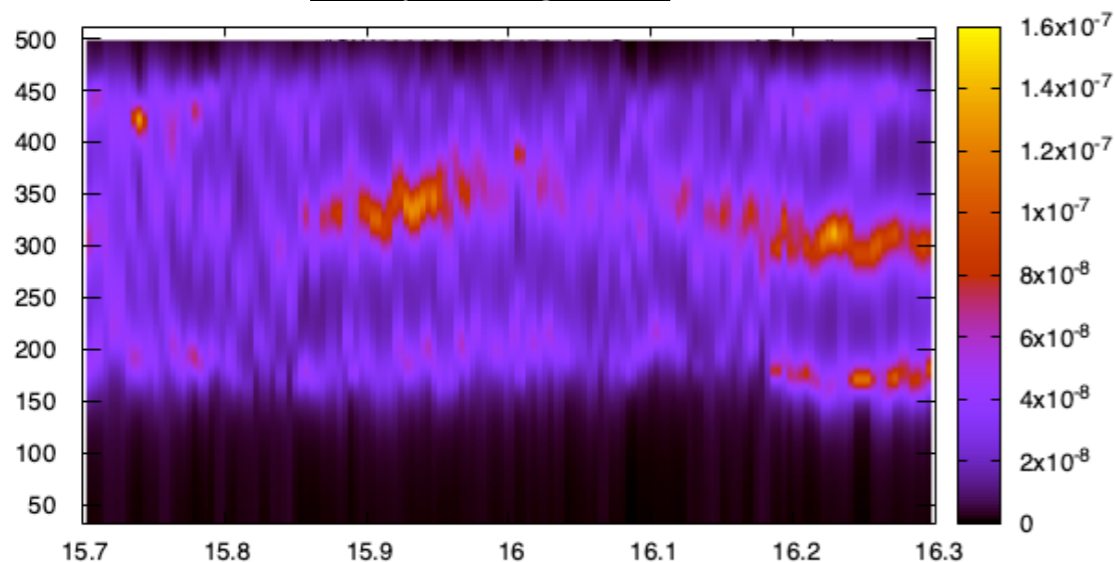


Network SNR=26.8

355 Hz
 ← 323 Hz
 300 Hz

Livingston

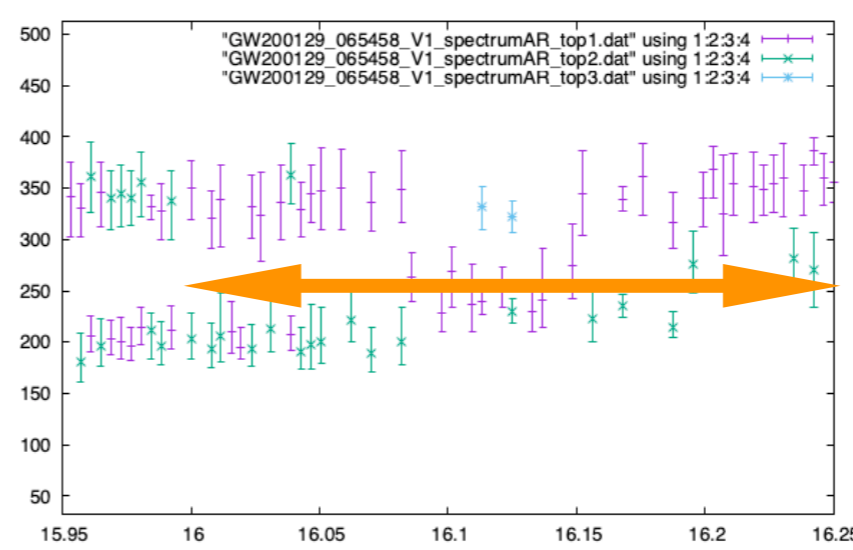
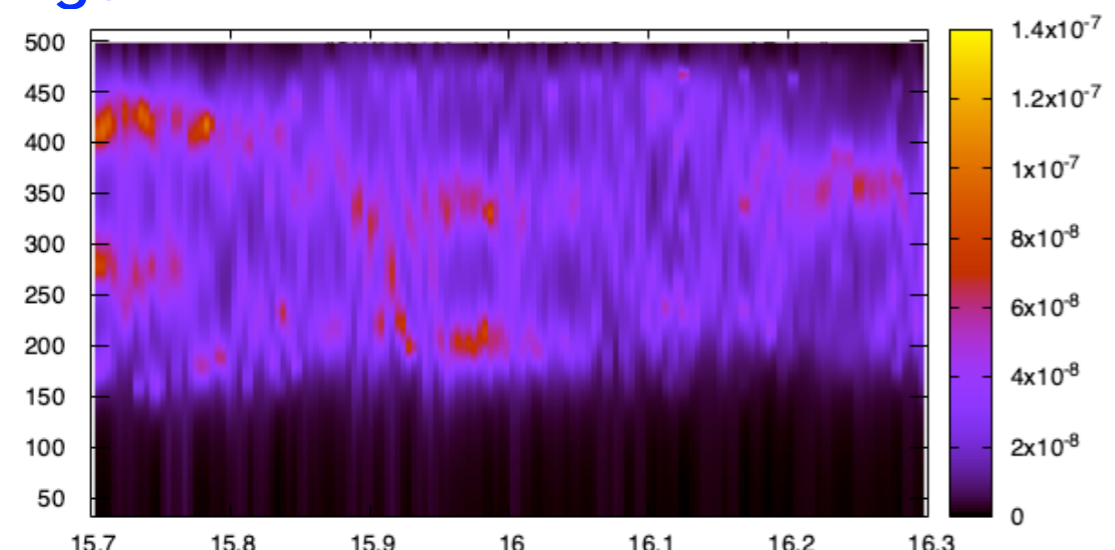
L1_SpectrogramAR



303 Hz
 ← 296 Hz
 291 Hz

Virgo

V1_SpectrogramAR



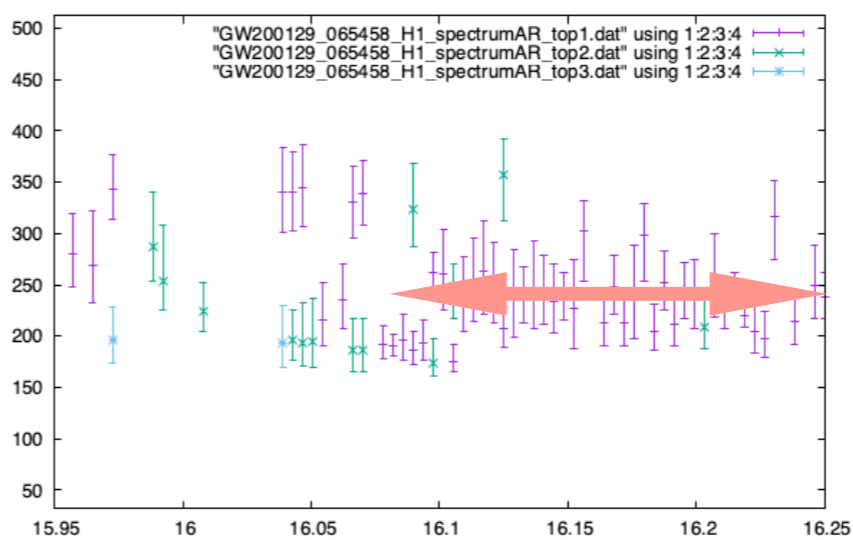
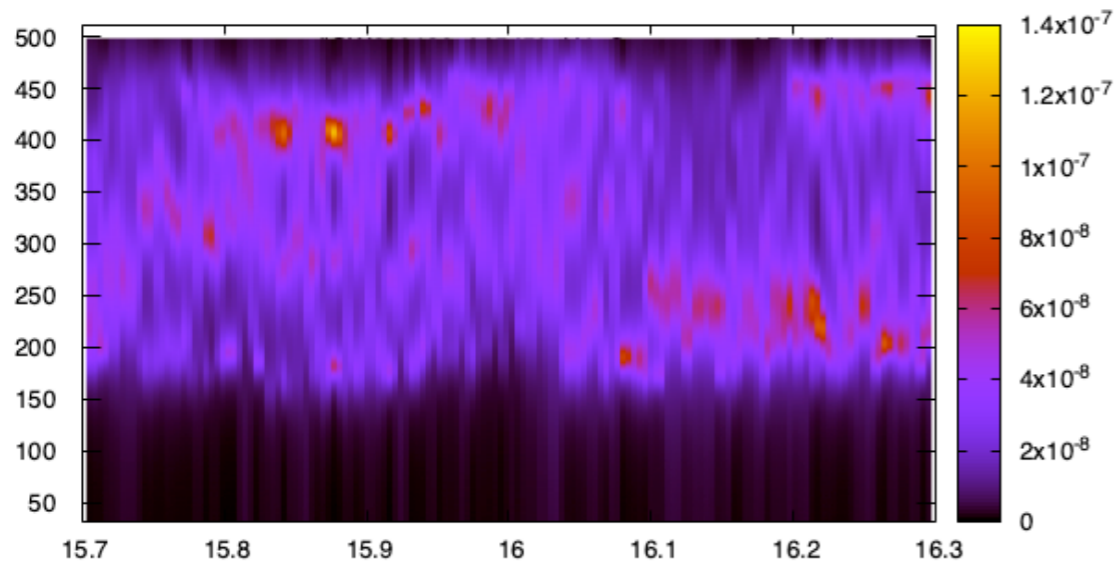
224 Hz
 ← 206 Hz
 189 Hz

GW200129_065458

LVK paper $(M, a, z) = (60.3^{+4.}_{-3.3}, 0.73^{+0.06}_{-0.06}, 0.18^{+0.05}_{-0.07})$

Hanford

H1_SpectrogramAR

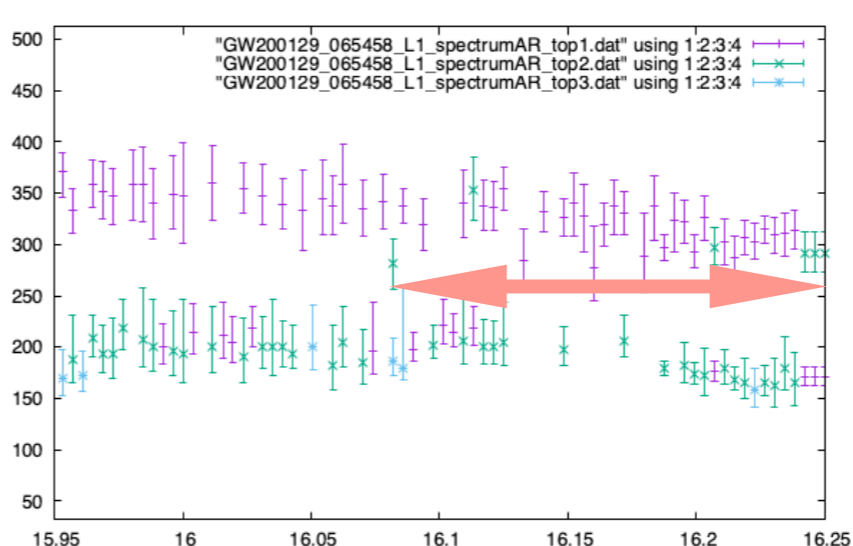
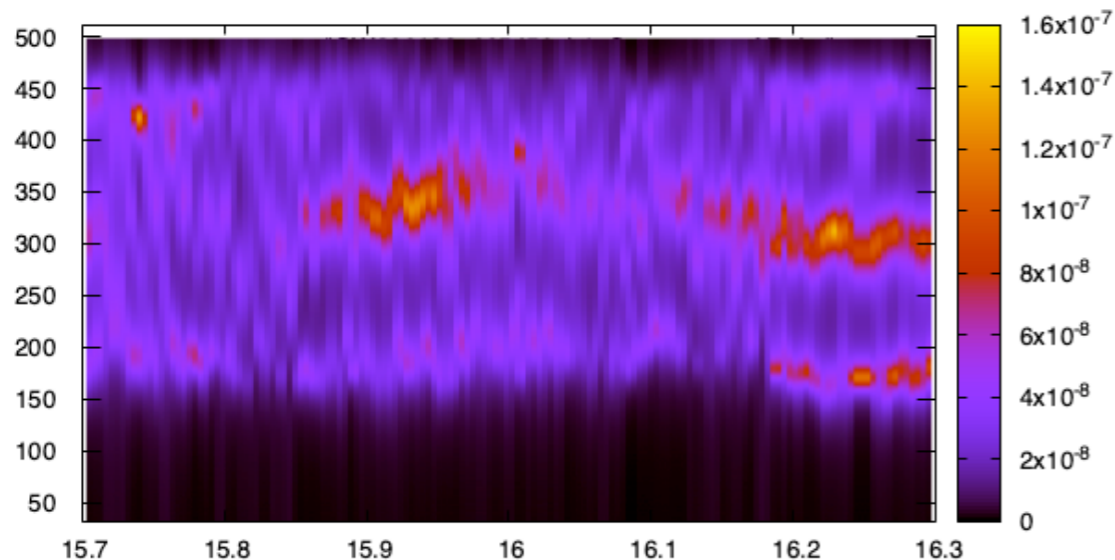


Network SNR=26.8

355Hz
 ← 323Hz
 300Hz
 252Hz
 ← 242Hz
 234Hz

Livingston

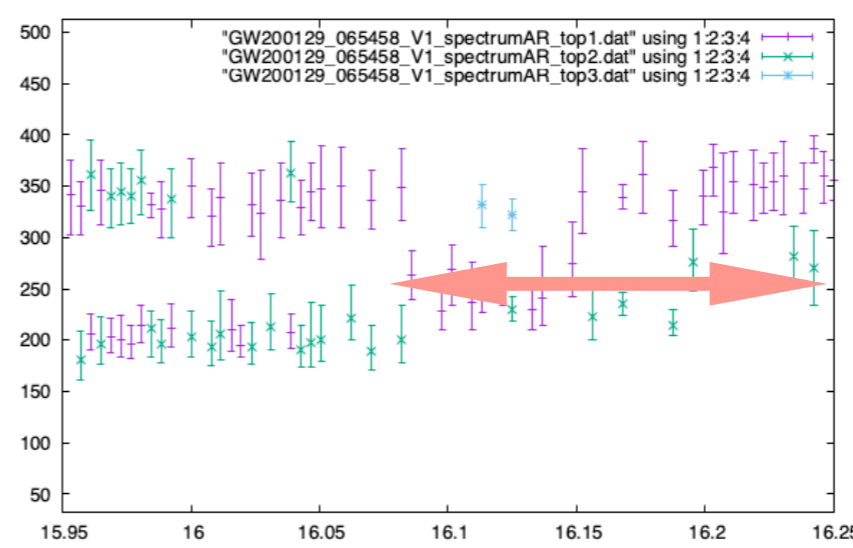
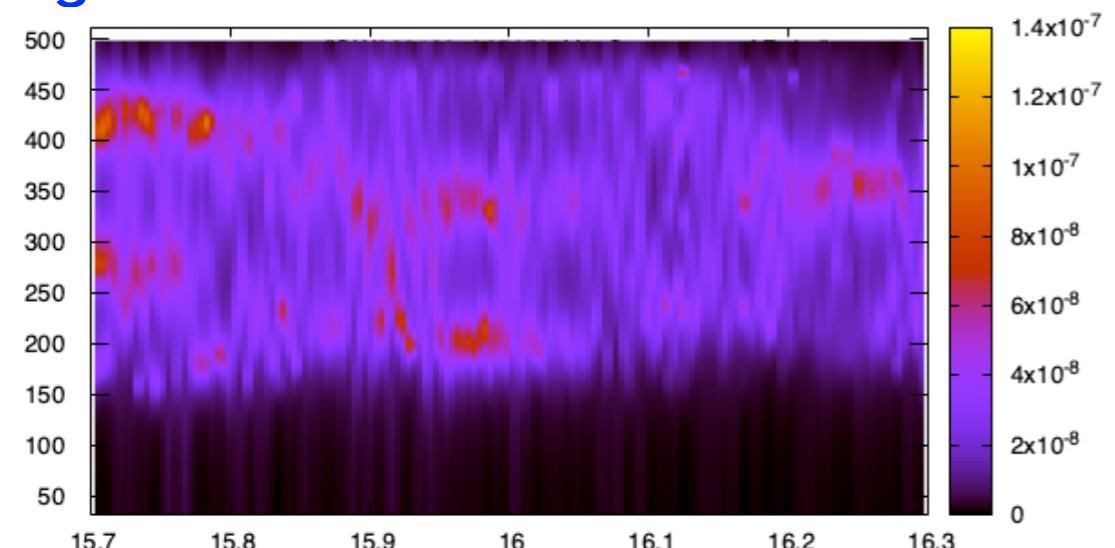
L1_SpectrogramAR



303 Hz
 ← 296 Hz
 291 Hz
 208 Hz
 ← 192 Hz
 183 Hz

Virgo

V1_SpectrogramAR



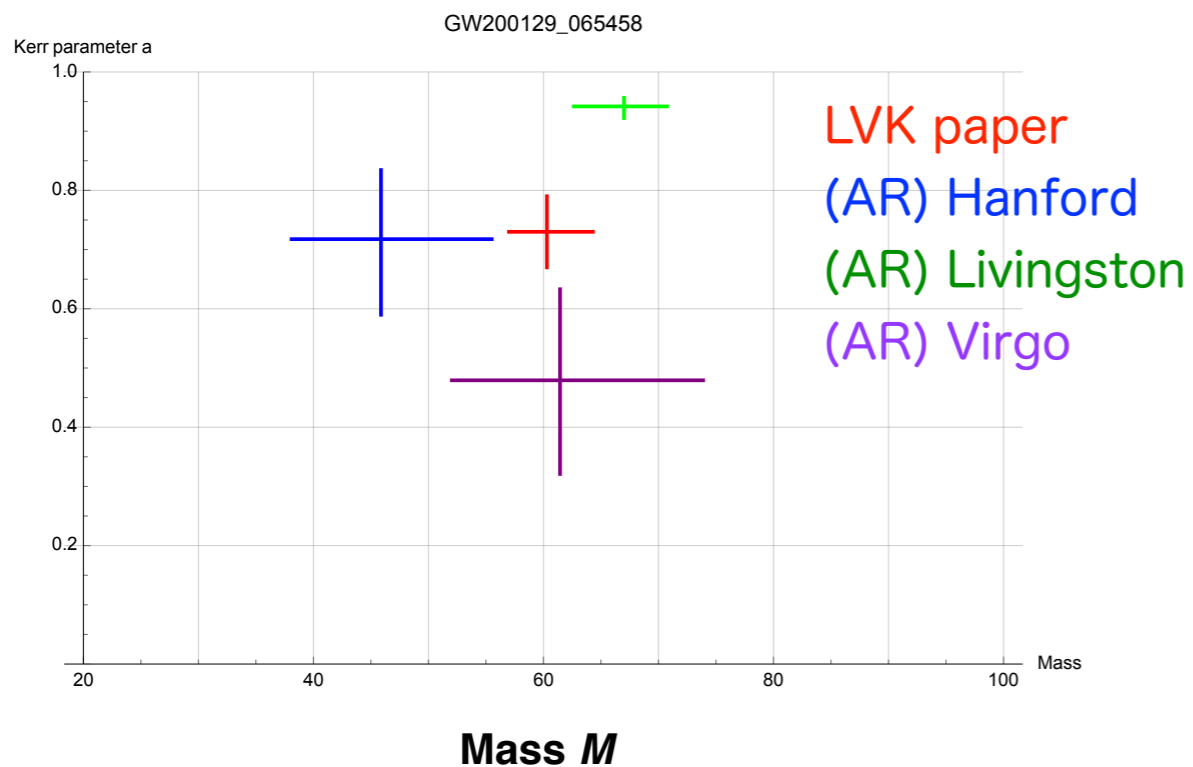
224 Hz
 ← 206 Hz
 189 Hz
 229 Hz
 ← 212 Hz
 201 Hz

GW200129_065458

LVK paper $(M, a, z) = (60.3^{+4.3}_{-3.3}, 0.73^{+0.06}_{-0.06}, 0.18^{+0.05}_{-0.07})$

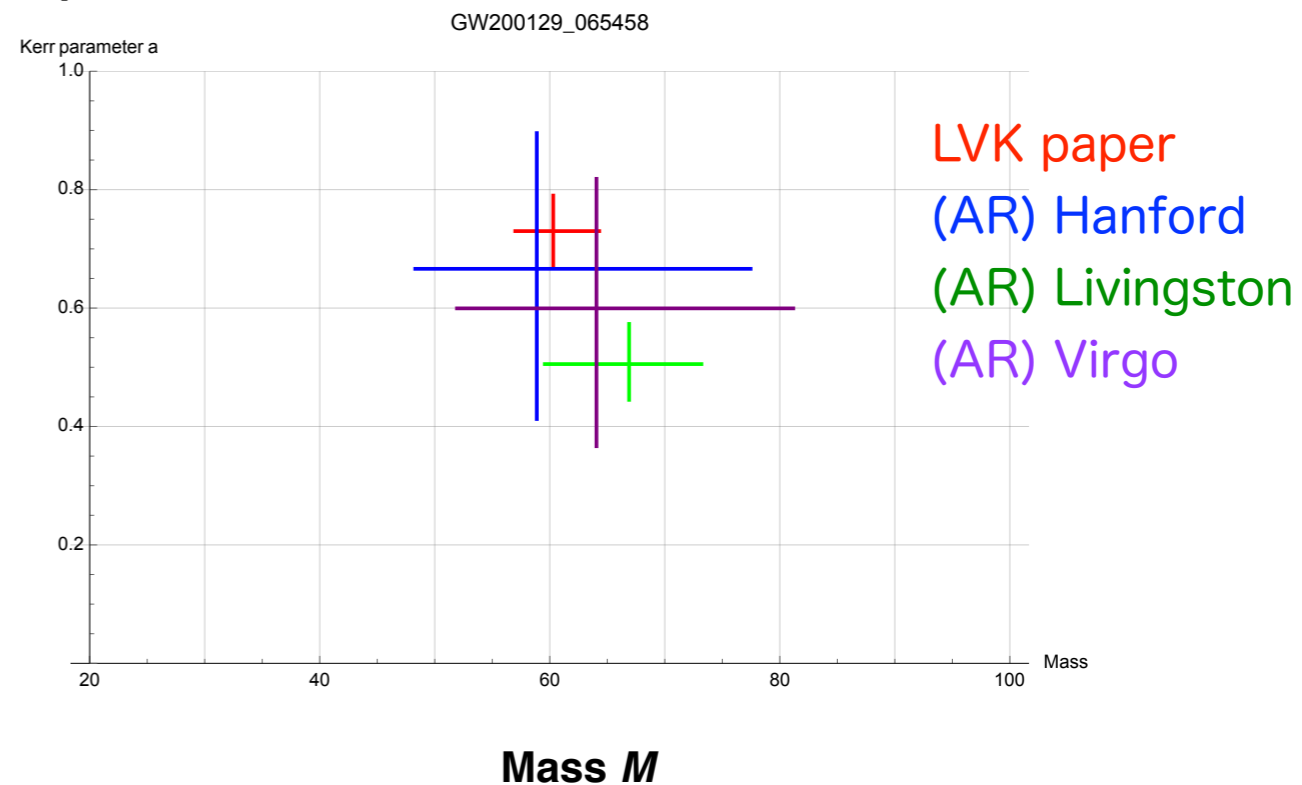
Network SNR=26.8

Spin a



estimated from the merger time for 0.25 sec

Spin a

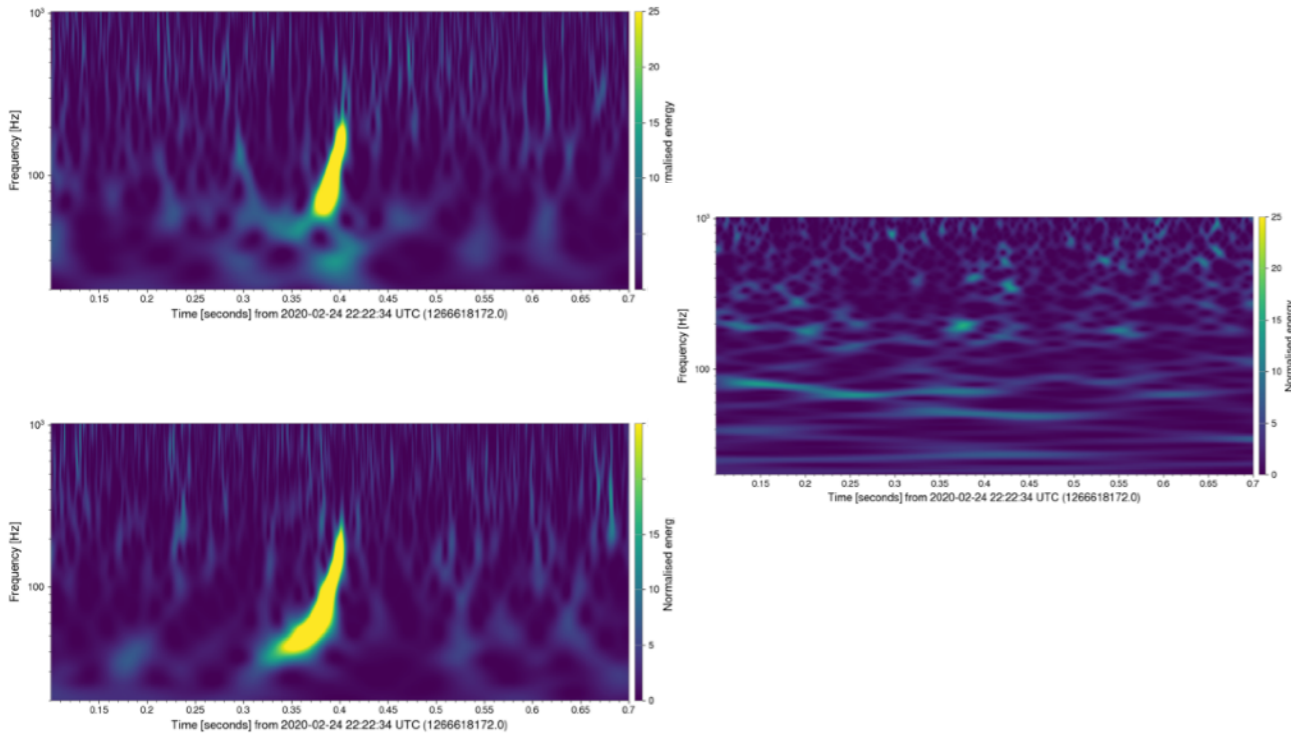


estimated from 0.10 sec after the merger for 0.15 sec

GW200224_222234

LVK paper $(M, a, z) = (68.6_{-4.7}^{+6.6}, 0.73_{-0.07}^{+0.07}, 0.32_{-0.11}^{+0.08})$

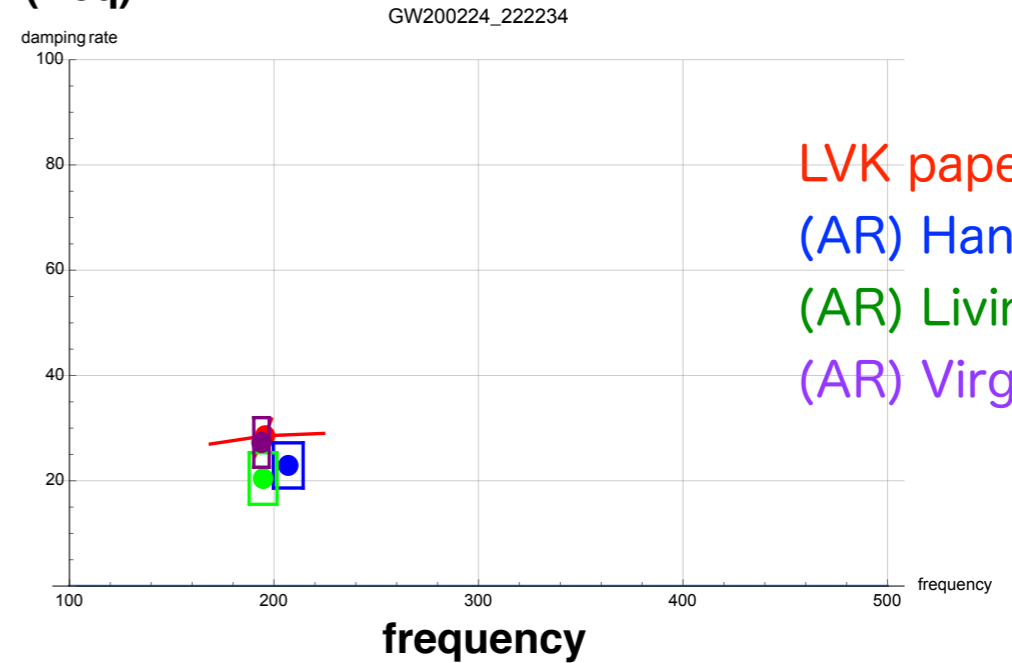
Network SNR=19.4
SNR@post insp = 13.1



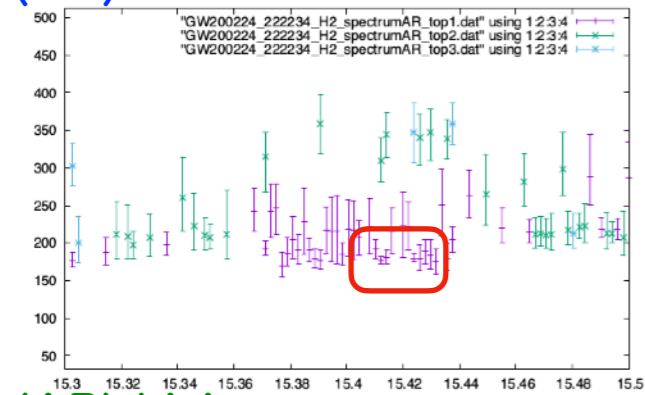
Expected f_{QNM}
(detector frame)

$f_{220} = 195.7 \text{ Hz}, f_{221} = 192.1 \text{ Hz}, f_{222} = 185. \text{ Hz}$
 $f_{210} = 262.4 \text{ Hz}, f_{211} = 160.4 \text{ Hz}, f_{200} = 175.3 \text{ Hz}$
 $f_{330} = 309.6 \text{ Hz}, f_{331} = 307.4 \text{ Hz}, f_{332} = 303.5 \text{ Hz}$
 $f_{320} = 276.0 \text{ Hz}, f_{310} = 247.6 \text{ Hz}, f_{300} = 224.3 \text{ Hz}$

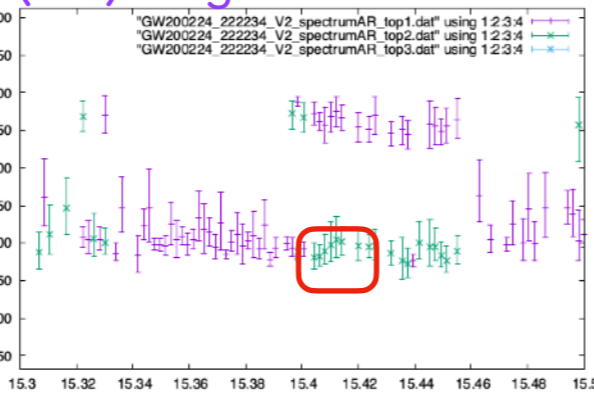
Im (freq)



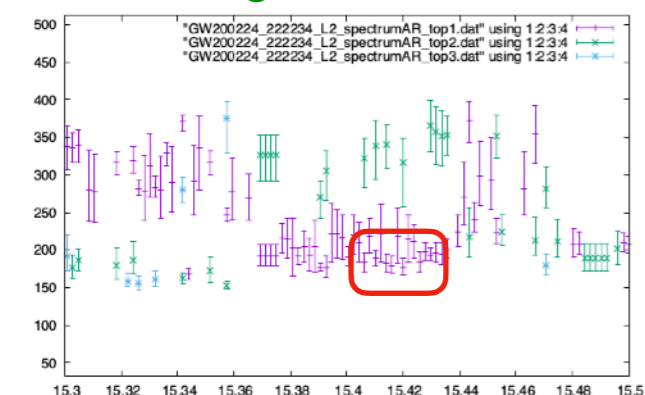
(AR) Hanford



(AR) Virgo

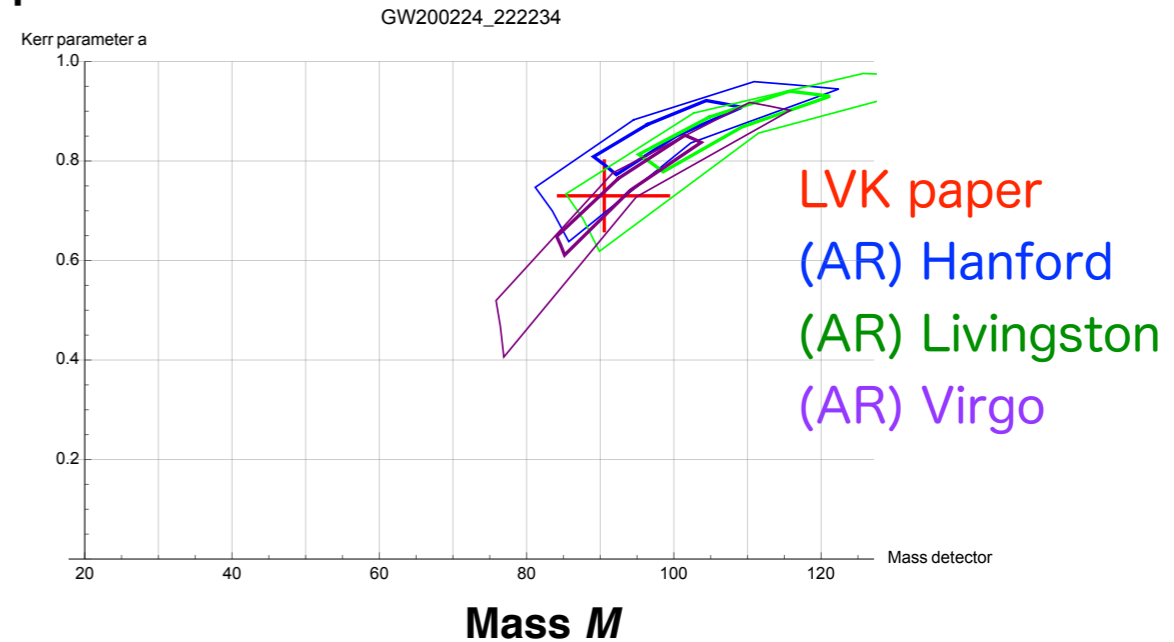


(AR) Livingston



▲
 $t_{\text{merger}} = 15.402$

Spin a



GW200311_115853

LVK paper

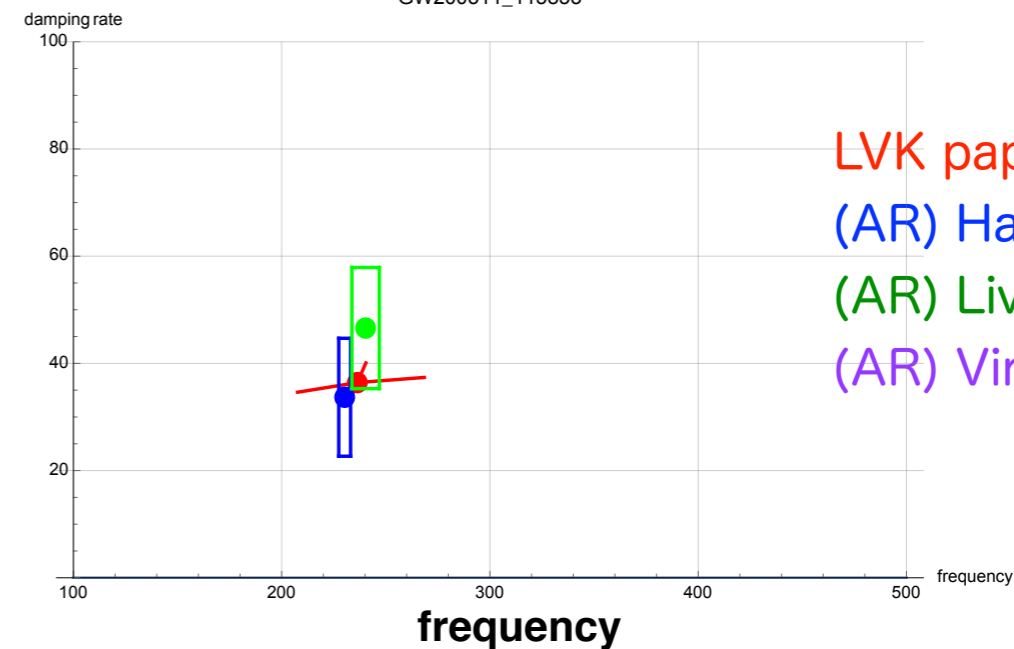
$$(M, a, z) = (59.0_{-3.9}^{+4.8}, 0.69_{-0.07}^{+0.07}, 0.23_{-0.07}^{+0.05})$$

Network SNR=17.5
SNR@post insp = 11.0

Expected f_{QNM}
(detector frame)

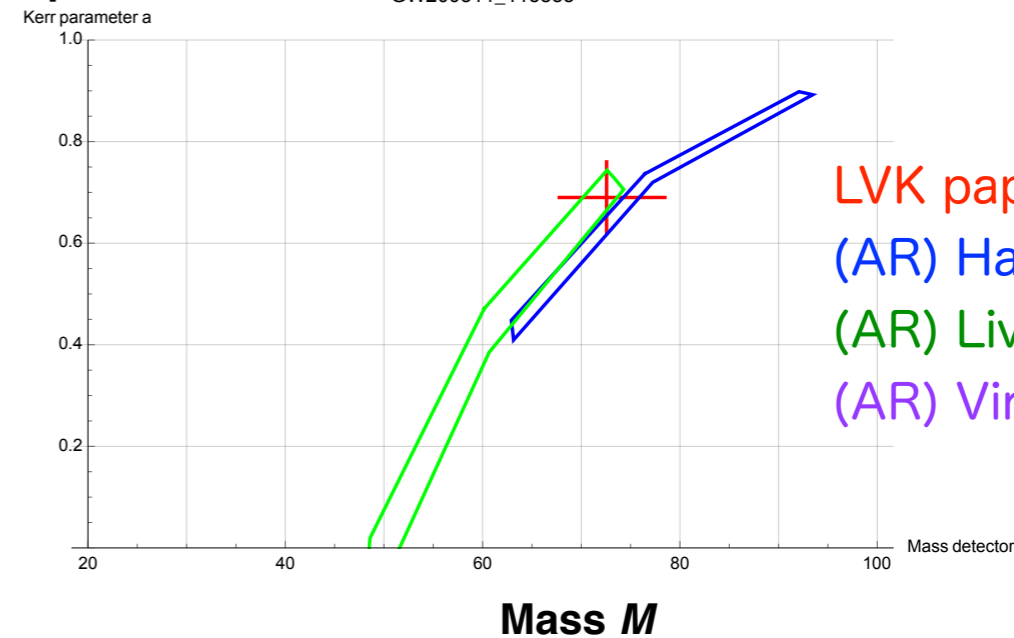
- $f_{220} = 236.3$ Hz, $f_{221} = 231.3$ Hz, $f_{222} = 221.5$ Hz
- $f_{210} = 331.0$ Hz, $f_{211} = 196.3$ Hz, $f_{200} = 219.8$ Hz
- $f_{330} = 374.7$ Hz, $f_{331} = 371.6$ Hz, $f_{332} = 366.1$ Hz
- $f_{320} = 337.3$ Hz, $f_{310} = 305.3$ Hz, $f_{300} = 278.5$ Hz

Im (freq)

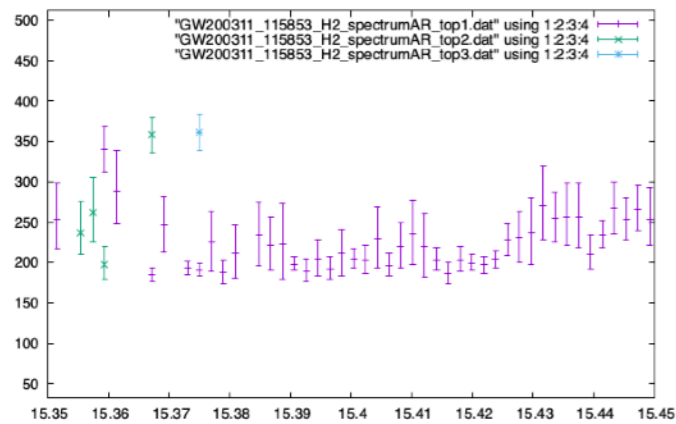
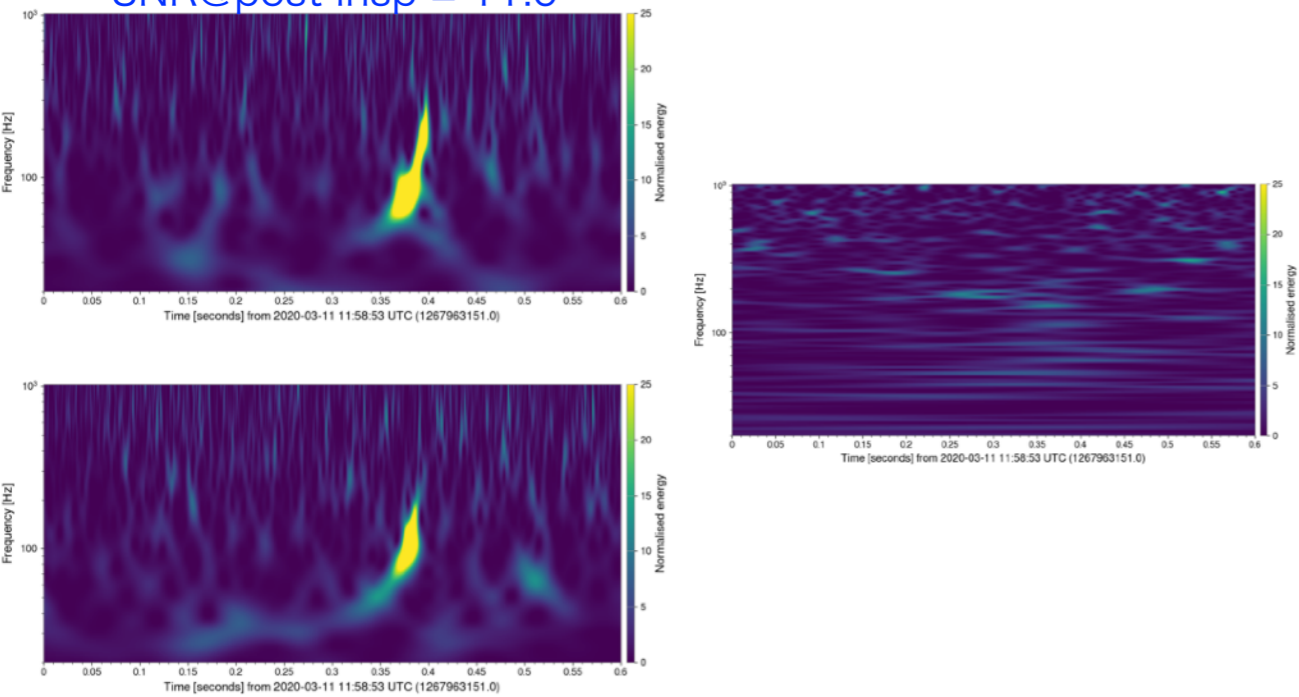


LVK paper
(AR) Hanford
(AR) Livingston
(AR) Virgo

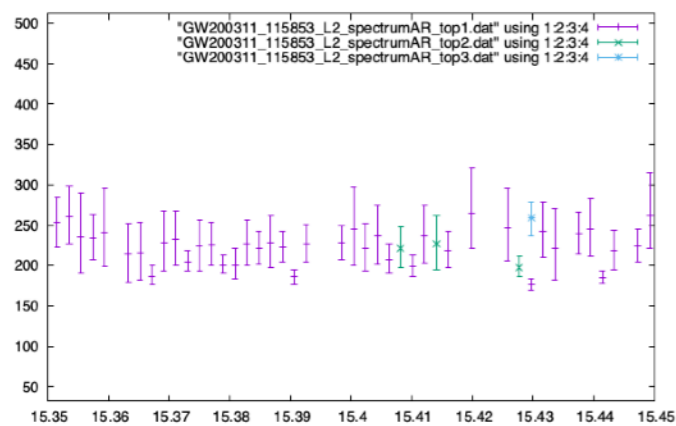
Spin a



LVK paper
(AR) Hanford
(AR) Livingston
(AR) Virgo



(AR) Hanford



(AR) Livingston

▲ $t_{\text{merger}} = 15.398$

まとめと展望

自己回帰モデル $x(t)$

$$\begin{aligned}x_n &= a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_M x_{n-M} + \varepsilon \\ &= \sum_{j=1}^M a_j x_{n-j} + \varepsilon\end{aligned}$$

ノイズを含む短時間実データ (~ 60 pts) に対しても, 周波数と減衰率を抽出できるデータのみを用いていて, テンプレートは不要. 複数の主要モードも原理的には抽出可能.

LV O1/O2/O3a & LVK O3b: リングダウン波形の抽出を試みた.

$S/N \geq 15$ (インスパイラル部含む) のイベントに対しては, リングダウン波形は取り出せる.
(時間幅 [merger time + X ms], Band Filterings [150-450Hz] など parameter はイベントごとに設定せず共通)

最終的なBHの (M_f, a_f) は, LVK カタログ値に近いものが得られる.

(GRからの外れは見られない. overtone, higher modesは見られない)

➡ 他の方法との整合性check, パラメータ調整, より S/N の良いイベント待ち

➡ AR法を用いたGWデータからのノイズ除去の試みも進んでいる (D. Hui+)