微積分学 I	真貝寿明 平嶋洋一 尾形尚子 桑子和幸	IC/IS/IM/IN 1 年	なし

July 30, 2009

【重要】 答案は，別紙の答案用紙に記入すること．問題用紙は回収しない．
解答は所定の解答欄に記入し，小問題の番号を記載すること．
答案には答えだけではなく，導出の過程も記すこと．

問題 1 (1)–(4) を求め，(5)–(6) に答えよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\left(2+3x^4+\dfrac{5}{x}+6\sqrt{x}\right)$

(2) $\dfrac{d}{dx}\left(e^x+3\sin x+2\cos x+\tan x\right)$

(3) $\dfrac{d}{dx}\left(e^{-2x}+\log 4x\right)$

(4) $\dfrac{d}{dx}\left(x^2\log x\right)$

(5) ライプニッツの公式：$f(x)$, $g(x)$ に対して

$$\frac{d^n}{dx^n}(fg)=(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(k)}g^{(n-k)}$$

を利用して，$\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2+x)\cos x$ を求めよ．

(6) $y=x^2e^{-x}$ の増減表を作成し，グラフを描け．

問題 2 (1)–(7) を求めよ．

(1) $\displaystyle\int\left(2+3x^4+\frac{5}{x}+6\sqrt{x}\right)dx$

(2) $\displaystyle\int\left(e^x+3\sin x+2\cos x\right)dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 e^{-2x}\,dx$

(4) $\displaystyle\int x^2\log x\,dx$

(5) $\displaystyle\int \tan x\,dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1}$

(7) $\displaystyle\int_0^{a/2}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$
（$a>0$ は定数，$x=a\sin t$ と置換積分）

問題 3 関数 $f(x)$ の $x=a$ におけるテーラー展開が，次式で表されることを利用して，次の問いに答えよ．

$$f(x)=f(a)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

(1) e^x に対する $x=0$ のまわりのテーラー展開（マクローリン展開）を導出せよ．

(2) $\sin x$ と $\cos x$ の マクローリン展開 が，

$$\begin{aligned}\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\end{aligned}$$

と表されることを用いて，e^{ix} を $\cos x, \sin x$ を用いて表わせ．ただし，$i=\sqrt{-1}$ とする．

問題 4 2 問を選択して答えよ．

(1) 関数 $z(x,y)=x^3y+xy^2$ の 2 次の偏導関数をすべて求めよ．

(2) $z(x,y)=e^{x^2y}$, $x=\cos t$, $y=t^2$ のとき，$\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ．

(3) $z=f(x,y)$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ のとき，次の関係式を示せ．

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$