| | | | |
|---|---|---|---|
| **微積分学 I** | **真貝寿明**<br>**平嶋洋一**<br>**尾形尚子**<br>**桑子和幸** | **全学科 1 年** | **なし** |

**June 24, 2010**

**【重要】** 答案は，別紙の答案用紙に記入すること．問題用紙は回収しない．
解答は所定の解答欄に記入し，小問題の番号を記載すること．
答案には答えだけではなく，導出の過程も記すこと．

$\boxed{問題 1}$ (1)–(4) を求め，(5)–(6) に答えよ．

(1) $y_1 = \dfrac{d}{dx}\left(6 + 5x^4 + \dfrac{3}{x} + 2\sqrt{x}\right)$

(2) $y_2 = \dfrac{d}{dx}\left(e^x + 4\sin x + 3\cos x + 2\tan x\right)$

(3) $y_3 = \dfrac{d}{dx}\left(\sin^2 x + \log 4x\right)$

(4) $y_4 = \dfrac{d}{dx}\left(x^2 \log x\right)$

(5) ライプニッツの公式：$f(x)$, $g(x)$ に対して

$$\frac{d^n}{dx^n}(fg) = (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

を利用して，$y_5 = \dfrac{d^n}{dx^n}(x^2 - x)\cos x$ を求めよ．

(6) 関数 $y = e^{-x^2}$ の増減表を作成し，グラフを描け．

$\boxed{問題 2}$ (1)–(6) を求め，(7) に答えよ．

(1) $I_1 = \displaystyle\int \left(6 + 5x^4 + \frac{3}{x} + 2\sqrt{x}\right) dx$

(2) $I_2 = \displaystyle\int \left(e^x + 4\sin x + 3\cos x + \tan x\right) dx$

(3) $I_3 = \displaystyle\int \left(e^{4x} + \sin 2x\right) dx$

(4) $I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx$

(5) $I_5 = \displaystyle\int x^2 \log x \, dx$

(6) $I_6 = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 4}$

(7) 半径 $a$ の円の面積が $\pi a^2$ であることを，積分計算を用いて導け．

$\boxed{問題 3}$ 関数 $f(x)$ の $x = a$ におけるテーラー展開が，次式で表されることを利用して，次の問いに答えよ．

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

(1) $e^x$ に対する $x = 0$ のまわりのテーラー展開（マクローリン展開）を導出せよ．

(2) $\sin x$ を マクローリン展開して，$x$ の 3 次までの近似式を求めよ．

(3) $\sqrt{1 + x^2}$ を マクローリン展開して，$x$ の 2 次までの近似式を求めよ．

$\boxed{問題 4}$ 2 問を選択して答えよ．

(1) 関数 $z(x, y) = (x^2 + 3y)^3$ の 2 次の偏導関数をすべて求めよ．

(2) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ とするとき，$\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x, y)$ を求めよ．

(3) $z = f(u, v),\ u = x\cos\theta - y\sin\theta,\ v = x\sin\theta + y\cos\theta$ （ただし $\theta$ : 定数）のとき,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

を示せ.