微積分学 I **2011 年度分** **検討資料 2011.07.01**

【重要】 答案は別紙の答案用紙に記入すること．
解答順は自由とするが，答案用紙には，どの問題か分かるように記載すること．
答案には，答えだけではなく，導出の過程も記すこと．導出の過程にも配点がある．

問題 1 (1)–(4) を求め，(5),(6) に答えよ．

(1) $y_1 = \dfrac{d}{dx}\left(3 + x^5 + \dfrac{2}{x} + 3\sqrt{x}\right)$

(2) $y_2 = \dfrac{d}{dx}\left(e^x + \sin x + \cos x + \tan x\right)$

(3) $y_3 = \dfrac{d}{dx}\left(\sin^2 x + \log 4x\right)$

(4) $y_4 = \dfrac{d}{dx}\left(x^3 \log x\right)$

(5) ライプニッツの公式

$$\frac{d^n}{dx^n}\big(f(x)g(x)\big) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

を利用して，$y_5 = \dfrac{d^n}{dx^n}\big((x^2 + x - 1)\cos x\big)$ を求めよ．

(6) 増減表を作成して $y = xe^{-x}$ のグラフを描け．
$\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-x} = 0$ を用いてよい．

問題 2 (1)–(6) を求め，(7) に答えよ．

(1) $I_1 = \displaystyle\int \left(3 + x^5 + \frac{2}{x} + 3\sqrt{x}\right) dx$

(2) $I_2 = \displaystyle\int \left(e^x + \sin x + \cos x + \tan x\right) dx$

(3) $I_3 = \displaystyle\int \frac{3x^2}{x^3 + 1} dx$

(4) $I_4 = \displaystyle\int x^3 \log x dx$

(5) $I_5 = \displaystyle\int \frac{1}{x^2 - 9} dx$

(6) $I_6 = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx$ ($x = 2\sin t$ などと置換せよ)

(7) 半径 r の円 $x^2 + y^2 = r^2$ の $y \geqq 0$ の半円部分を x 軸に関して回転させたときの回転体の体積 V は

$$V = \int_{-r}^{r} \pi y^2 dx$$

で与えられる．これより，半径 r の球の体積 V を求めよ．

問題 3 次式に示すテーラーの展開公式を利用して，下の問に答えよ．

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k$$

また，$x = 0$ 周りのテーラー展開をマクローリン展開という．

(1) $\cos x$ を４次の項までマクローリン展開せよ．

(2) e^{-x} を４次の項までマクローリン展開せよ．

(3) $(1 + x)^\alpha$ をマクローリン展開して，３次までの近似式を求めよ．
また，求めた近似式を利用して，$\sqrt[3]{1.1}$ を小数第３位まで求めよ．

問題 4 次の (1)–(3) に示す３題のうち２題を選択して答えよ．

(1) 関数 $f(x, y) = \sin(2x + 3y)$ の２階偏導関数を全て求めよ．

(2) $f(x, y) = e^{xy}, x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とする．$\dfrac{\partial f}{\partial r}, \dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ を求めよ．

(3) $z = f(x, y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ のとき，次式を示せ．

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$