2023 年度前期　微積分学 I（全学科 1 年）　定期試験　2023 年 7 月 31 日

【担当教員】白畑正芳，真貝寿明，濱田悦生，真鍋征秀，宮本俊幸
【対象学生】情報科学部　全学科　1 年
【参照許可物】なし

【重要】 答案は別紙の答案用紙に記入すること．問題用紙は回収しない．
解答順は自由．答案用紙にはどの問題かわかるように記載すること．
答案には答えだけではなく，導出の過程も記すこと．導出の過程にも配点がある．
問題 1 と問題 2 がシラバスの到達目標 (1)(2) に対応 [成績 C または D の判定基準].
問題 3 が到達目標 (3) に対応 [成績 B]．問題 4 が到達目標 (4) に対応 [成績 A].

問題 1 〔微分とその応用〕(1)–(4) を求め，(5) に答えよ．

(1) $y_1 = \dfrac{d}{dx}\left(e^x \cos x\right)$

(2) $y_2 = \dfrac{d}{dx}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^5$

(3) $y_3 = \dfrac{d}{dx}\log|1-x^2|$ (ただし，$x \neq \pm 1$)

(4) ライプニッツの公式：$f(x)$, $g(x)$ に対して

$$\frac{d^n}{dx^n}(f\cdot g) = (f\cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

を利用して，$y_4 = \dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^2 e^{2x}\right)$ (n: 自然数) を求めよ．

(5) $y = (1-x^2)e^{-x^2}$ の導関数を求め，増減表を作成し，グラフを描け．$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} x^2 e^{-x^2} = 0$ を既知としてよい．

問題 2 〔積分とその応用〕(1)–(4) を求め，(5) に答えよ．

(1) $I_1 = \displaystyle\int (3x+2)^3\,dx$

(2) $I_2 = \displaystyle\int \frac{x-2}{(x-3)(x-4)}dx$

(3) $I_3 = \displaystyle\int x\sin(2x)\,dx$

(4) $I_4 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$　（ヒント：$x = 2\sin\theta$ と置換）

(5) 半径 r の球の体積 V が $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$ であることを，積分を使って説明せよ．
ヒント： $y = f(x), x = \alpha, x = \beta$ $(\alpha \leq \beta)$ および x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積 V は，次式で与えられる．

$$V = \int_\alpha^\beta \pi\,(f(x))^2\,dx$$

$\boxed{\text{問題 3}}$ 〔級数展開〕関数 $f(x)$ の $x = a$ における級数展開（テーラー展開）は，次式で表される．

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

また，$x = 0$ のまわりのテーラー展開をマクローリン展開という．次のうちから3 問を選択して答えよ．

(1) $g(x) = (1+x)^{1/2}$ をマクローリン展開して，2 次までの項 (近似式) を記せ．

(2) (1) で求めた近似式を利用して，$\sqrt{17}$ を小数第 2 位まで求めよ．

(3) ある関数 $h(x)$ について，$h(0) = 1$, $h'(0) = 5$, $h''(0) = 6$ であるとする．$x = 1$ における $h(x)$ の近似値 $\tilde{h}(1)$ をマクローリン展開を用いて求めよ．ただし，$n \geq 3$ に対して，$h^{(n)}(0)$ は十分小さいものとする．

(4) $f(x) = e^x \log(1+x)$ をマクローリン展開して，3 次までの項 (近似式) を記せ．

$\boxed{\text{問題 4}}$ 〔偏微分〕次のうちから2 問を選択して答えよ．

(1) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ の 2 階の偏導関数をすべて求めよ．なお，対称性を用いて導出してもよい．

(2) 理想気体では，圧力 P，体積 V，温度 T の量の間に，$\dfrac{PV}{T} = k$(一定) が成り立つ．体積変化 dV と温度変化 dT がどのように圧力変化 dP をもたらすか，全微分の関係を求めよ．
ヒント：全微分は $dP = \dfrac{\partial P}{\partial V}dV + \dfrac{\partial P}{\partial T}dT$ と書ける．

(3) 関数 $z(x, y) = e^{x+y}$ に対して，$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \log(t+1) \end{cases}$ $(t \geq 0)$ のとき，$\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ．