微分方程式（1 年）期末試験 2007 年 1 月 ver.20070105

微分方程式	亀島鉱二 真貝寿明 平嶋洋一	全学科 1 年	なし

【重要】　答案は、別紙の答案用紙に記入すること。
解答順は自由とするが、答案用紙には、どの問題か分かるように記載すること。
答案には、答えだけではなく、導出の過程も記すこと。導出の過程にも配点がある。
問題用紙は回収しない。各自、持ち帰り、最終授業日に持参すること。

1. (1) 関数 $y = Ce^{-ax}$ （C は任意定数，a は定数） が，微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = -ay$$

を満たすことを示せ.

(2) $x = 0$ で $y = 3$ となるように C を定めよ.

2. 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$

(2) $\dfrac{dy}{dx} + 4y = 3\cos 2x$

3. 人口 y の増加率のモデルとして，次の式がある.

$$\frac{dy}{dt} = (1 - ay)y$$

ここで， a は正の定数である．人口の増加率は，人口の 1 次項 y で加速するが，人口の 2 次項 y^2 によってブレーキがかかる，というモデルである．これを解き，結果をグラフで示せ．ただし，$y(0) = y_0$ (> 0) とする．[ヒント：部分分数に分けて積分]

4. (1) 微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 16y = 0$ の一般解を求めよ.

(2) 上記の解の中で，次の初期条件を満たすものを求め，グラフを描け.

$$y(x = 0) = 0, \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = -2$$

5. 次の微分方程式の一般解を求めよ.

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + 3y = e^{-x}$

6. ばね定数 k のばねに，質量 m のおもりをつけて，鉛直に静かに置くと，つり合って静止した．このときの，ばねの伸び x_0 は，つり合いの式 $0 = kx_0 - mg$ で求められる．g は重力加速度である．おもりのつり合いの位置を原点として，上向きを正とする x 軸をとり，ばねによるおもりの運動方程式を立てると，

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - x_0) - mg$$

となる．今，つり合いの状態（$x = 0$）で，おもりに上向きに速度 $\dfrac{dx}{dt} = v_0$ を与えた．この時刻を $t = 0$ とする．おもりの運動を解いて，グラフにして示せ.