微分方程式（1 年）期末試験 2010 年 1 月

微分方程式	亀島鉱二 真貝寿明 斎　文章	全学科 1 年	参照可能物　なし

【重要】　選択問題の取り扱いは各教員の指示に従うこと．

問題 **1**　（自然現象と微分方程式）次の微分方程式を立てよ.（各自で導入した記号には説明をつけること）.

(1) xy 平面上の各点で，接線の傾きが $\sin x$ である曲線が満たす微分方程式.

(2) 一定の割合で増加していくバクテリアの数を求める微分方程式.

(3) その時の原子核の数に比例して崩壊してゆく原子核の数を求める微分方程式.

(4) その時の感染者の 2 乗に比例して増加するインフルエンザ感染者数を求める微分方程式.

問題 **2**　（微分方程式の解）$y(t) = e^{-\alpha t}$ が微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha y, \quad y(0) = 1,$$

をみたすことを示せ．ただし，α は定数とする.

問題 **3**　（入力の影響）つぎの微分方程式の解を求めよ．ただし，α, β は定数とする.

$$\frac{dy}{dt} + \alpha y = \beta, \quad y(0) = 0.$$

問題 **4**　（指数関数と微分方程式）関数 $y = e^{\lambda t}$ (λ は複素数) が微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + by = 0 \quad (a, b : \text{定数})$$

をみたすとする.

(1) λ が満足する 2 次方程式を示せ.

(2) 上記微分方程式の一般解を求めよ.

問題 **5**　（未定係数法）つぎの微分方程式を考える.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 3y = 10\sin t$$

(1) 特殊解を示せ.

(2) 初期条件 $y(0) = 0,\ \dfrac{d\,y(0)}{dt} = 1$ をみたす解を求めよ.

選択問題　人口 y の増加率のモデルとして，次の式がある.

$$\frac{dy}{dt} = (1 - ay)y$$

ここで，t は時間，a は正の定数である．人口の増加率は，人口の 1 次項 y で加速するが，人口の 2 次項 y^2 によってブレーキがかかる，というモデルである．これを解き，結果をグラフで示せ．ただし，$y(0) = y_0\ (> 0)$ とする.
ヒント：変数分離して，部分分数に分けて積分