

# 相対性理論

アインシュタインはどこまで正しいのか

## 1. 序論

## 2. 特殊相対性理論

時間の進み方は観測者によって異なる

$E=mc^2$ , 原子核反応, 星の一生

干渉計

GPS

## 3. 一般相対性理論

時間の進み方は重力によって異なる

ブラックホール, 重力波

光格子時計

真貝寿明（しんかい ひさあき）

大阪工業大学 情報科学部 教授

武庫川女子大学 非常勤講師

理化学研究所 客員研究員



<http://www.oit.ac.jp/is/shinkai/>

# 光速度を常に一定としたときの座標変換 (Lorentz変換)

## 法則 2.2 (Lorentz 変換)

ある慣性系  $S(t, x, y, z)$  から  $+x$  方向に速度  $v$  で運動する慣性系  $S'(t', x', y', z')$  への座標変換は

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z. \end{aligned} \quad (2.7)$$

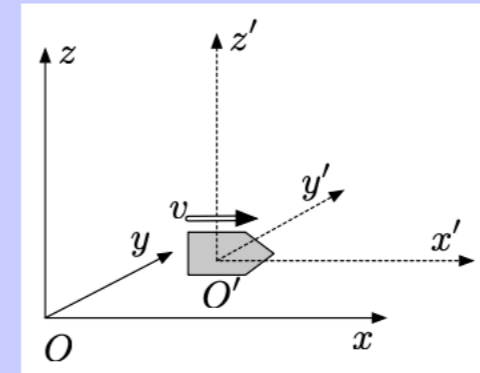


図 5: 静止している  $xyz$  座標系と、速度  $v$  で  $x$  方向に移動している  $x'y'z'$  座標系.

となる. この式は, 行列とベクトルの積として, 次のようにも書ける.

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{-v/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

# Lorentz変換の帰結：速度の合成則

## 2.1.4 速度の合成

慣性系  $S$  に対して、 $x$  方向に速度  $v$  で移動する慣性系  $S'$  がある。  $S$  と  $S'$  で観測される速度  $u_x, u'_x$  の関係を導こう。ここで、 $u_x = \frac{dx}{dt}$ ,  $u'_x = \frac{dx'}{dt'}$  である。

Newton 力学では課題 1.2 でみたように、座標系の移動速度  $v$  を単純に加える（減じる）ことで表現できた。しかし、Lorentz 変換のもとでは時間座標も変換されるので注意しなければならない。(2.7) より、

$$dt' = \frac{dt - (v/c^2)dx}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad dx' = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz. \quad (2.13)$$

であるから、

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - vdt}{dt - (v/c^2)dx} = \frac{u_x - v}{1 - (vu_x/c^2)}, \\ u'_y &= \frac{u_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - (vu_x/c^2)}, \quad u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - (vu_x/c^2)} \end{aligned} \quad (2.14)$$

となる。同様に、(2.12) から次の合成則を得る。

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + (vu'_x/c^2)}, \quad u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + (vu'_x/c^2)}, \quad u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + (vu'_x/c^2)}. \quad (2.15)$$

ローレンツ変換では、速度の足し算は  $v_1 + v_2$  ではなく、

$$v_1 + v_2 \implies \frac{v_1 + v_2}{1 + (v_1 v_2 / c^2)}$$

$v_1$	$v_2$	$v_1 + v_2$
光速の 0.1%	光速の 0.1%	光速の 0.1999998%
光速の 10%	光速の 10%	光速の 19.802%
光速の 90%	光速の 90%	光速の 99.448%
光速	光速	光速

# Lorentz変換の帰結：加速度の合成則

## 課題 2.5. 【加速度の合成】

加速度  $a_x = \frac{du_x}{dt}$  と  $a'_x = \frac{du'_x}{dt'}$  の間の変換は

$$a_x = \left( \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+u'_x v/c^2} \right)^3 a'_x \quad (2.16)$$

となることを導け.

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2} \text{ より,}$$

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\frac{du'_x}{dt'} (1 + u'_x v/c^2) - (u'_x + v) \frac{v}{c^2} \frac{du'_x}{dt'}}{(1 + u'_x v/c^2)^2} = \frac{1 - (v/c)^2}{(1 + u'_x v/c^2)^2} \frac{du'_x}{dt'}$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned} \frac{du'_x}{dt} &= \frac{dt'}{dt} \frac{du'_x}{dt'} = \frac{1 - (v/c^2)u_x}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \frac{du'_x}{dt'} = \frac{1 - (v/c^2) \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \frac{du'_x}{dt'} \\ &= \frac{1 - (v/c)^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2} (1 + u'_x v/c^2)} \frac{du'_x}{dt'} = \frac{\sqrt{1 - (v/c)^2}}{(1 + u'_x v/c^2)} \frac{du'_x}{dt'} \end{aligned}$$

と変形できるので,

$$\frac{du_x}{dt} = \left( \frac{\sqrt{1 - (v/c)^2}}{1 + u'_x v/c^2} \right)^3 \frac{du'_x}{dt'} \quad \square$$

# 浦島太郎問題

## 課題 2.7. 【運動状態による時間の進み方の遅れ】

地上で静止している人にくらべて、どれだけ時間が遅れるか.

1. 時速 250 km の新幹線に 2 時間乗車したとき.
2. 時速 900 km の旅客機に 10 時間乗車したとき.
3. 時速 900 km の旅客機に 1 万時間乗務したとき.
4. 高度 400 km を周回する ISS に 1 年間乗務したとき.
5. 高度 20000 km を周回する GPS 衛星の測る 1 秒.

レポート課題 1  
課題 2.7  
締め切り 金曜正午

$$c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$$

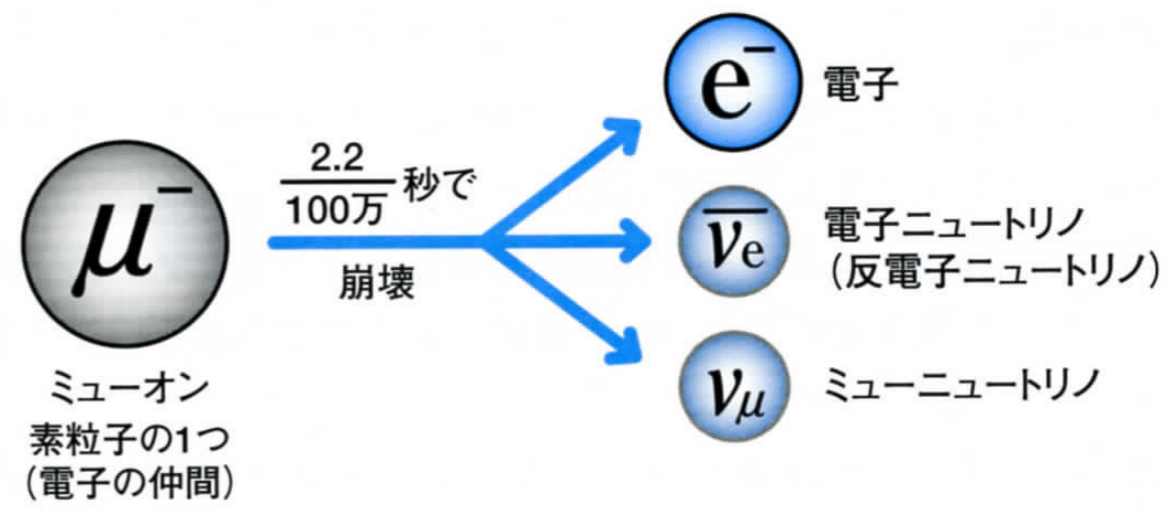
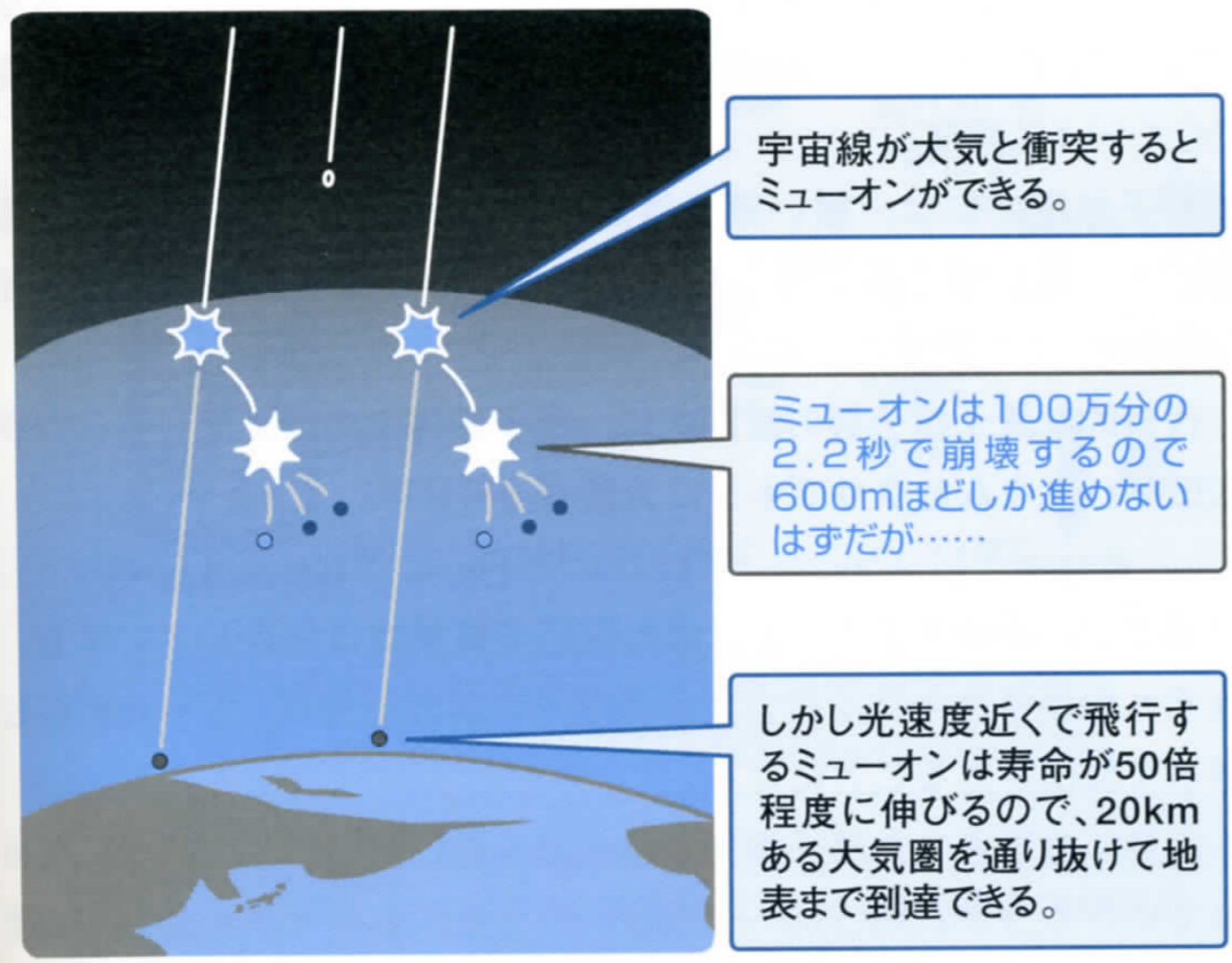
$$G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}/\text{s}^2$$

$$M_E = 6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$$

$$R_E = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$$

$v$	$\sqrt{1 - (v/c)^2}$
$0.1 c$	0.99499
$0.5 c$	0.86603
$0.9 c$	0.43589
$0.99c$	0.14107

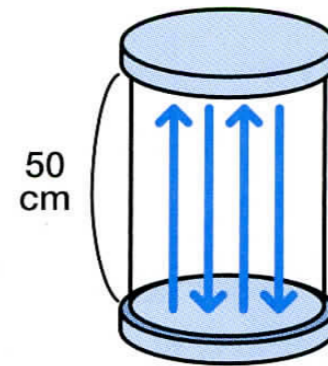
# 素粒子の寿命は確かに延びている！



ISSは秒速 7.8km  
1年間乗務すると、. . .  
0.01067秒 地表より時間が短くなる

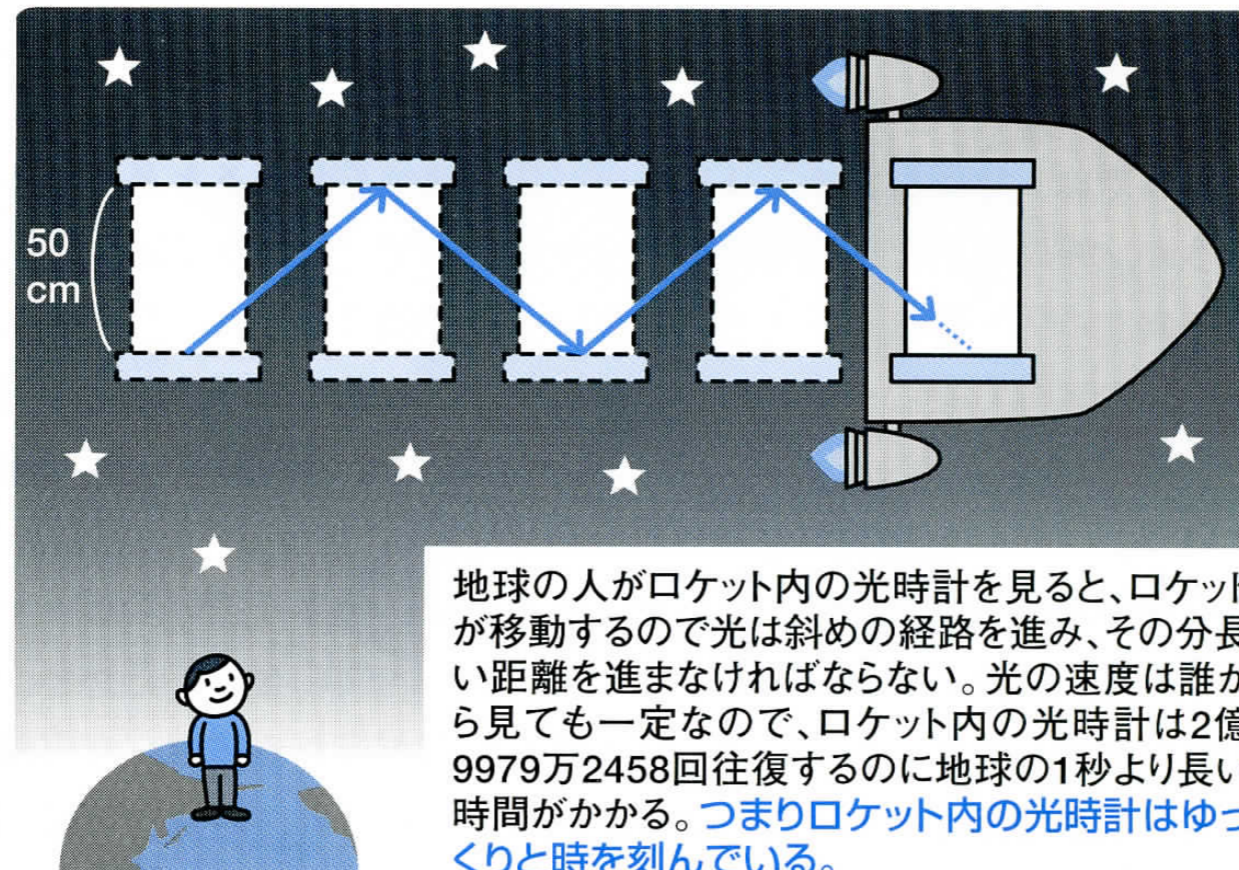
# 高速ロケットの中では時間の進み方が遅い

## 光時計の 思考実験



光時計

光が2億9979万2458回往復すると「1秒」を刻む時計



地球の人がロケット内の光時計を見ると、ロケットが移動するので光は斜めの経路を進み、その分長い距離を進まなければならない。光の速度は誰から見ても一定なので、ロケット内の光時計は2億9979万2458回往復するのに地球の1秒より長い時間がかかる。つまりロケット内の光時計はゆっくりと時を刻んでいる。

動いている人の時間の進み方は、静止している人よりも遅い

# 光時計の不思議

NHK 100分de名著「相対性理論」第2回 (2012年)

2:30'



## 互いに「相手の時計が遅れている」というパラドックス

互いに「相手の時計が遅れている」というパラドックス

- a 速度は相対的なものだ。地球からロケットを見れば速度は  $v$  でも、ロケットから地球を見れば地球は速度  $-v$  で動いていることになる。
- b だから、地球の人はロケットの時計が自分より遅く進むと観測し、ロケットの人は地球の時計が自分より遅く進むと観測する。
- c だから、お互いどちらも「相手の時計が遅れている」と主張する。

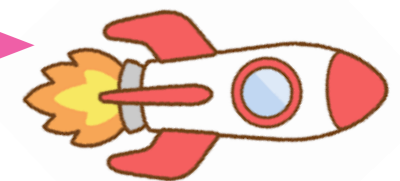


ロケットは速度  $v$  で動いている。

だからロケットの時計の進みは遅くなる

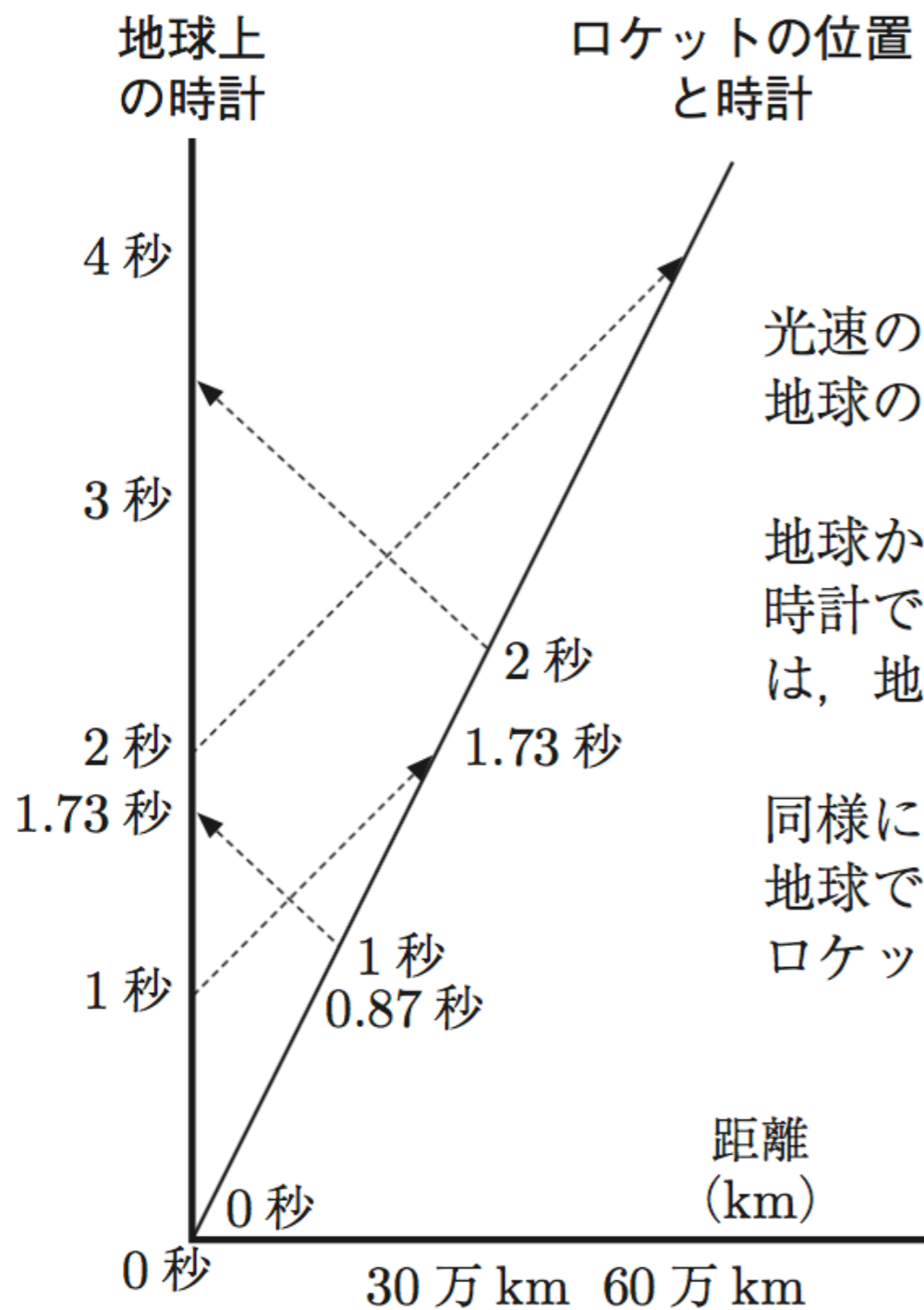
地球は速度  $v$  で動いている。

だから地球の時計の進みは遅くなる



# どちらも正しい

# 互いに「相手の時計が遅れている」というパラドックス



光速の 50% で動くロケットでは地球の 1 秒は 0.87 秒に，地球の 2 秒は 1.73 秒になる。

地球から 1 秒ごとに送信された信号は，ロケット内の時計では 1.73 秒間隔で受信する。だからロケット側は，地球の 1 秒は遅くなっていると考えよう。

同様に，ロケットから 1 秒ごとに送信された信号も，地球では 1.73 秒間隔で受信する。だから地球側も，ロケットの 1 秒は遅くなっていることになる。

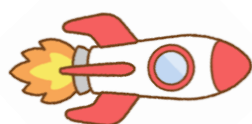
**図 3.16** 「相手の時計の方が遅れている」という主張はどちらも正しい。

## 双子のパラドックス

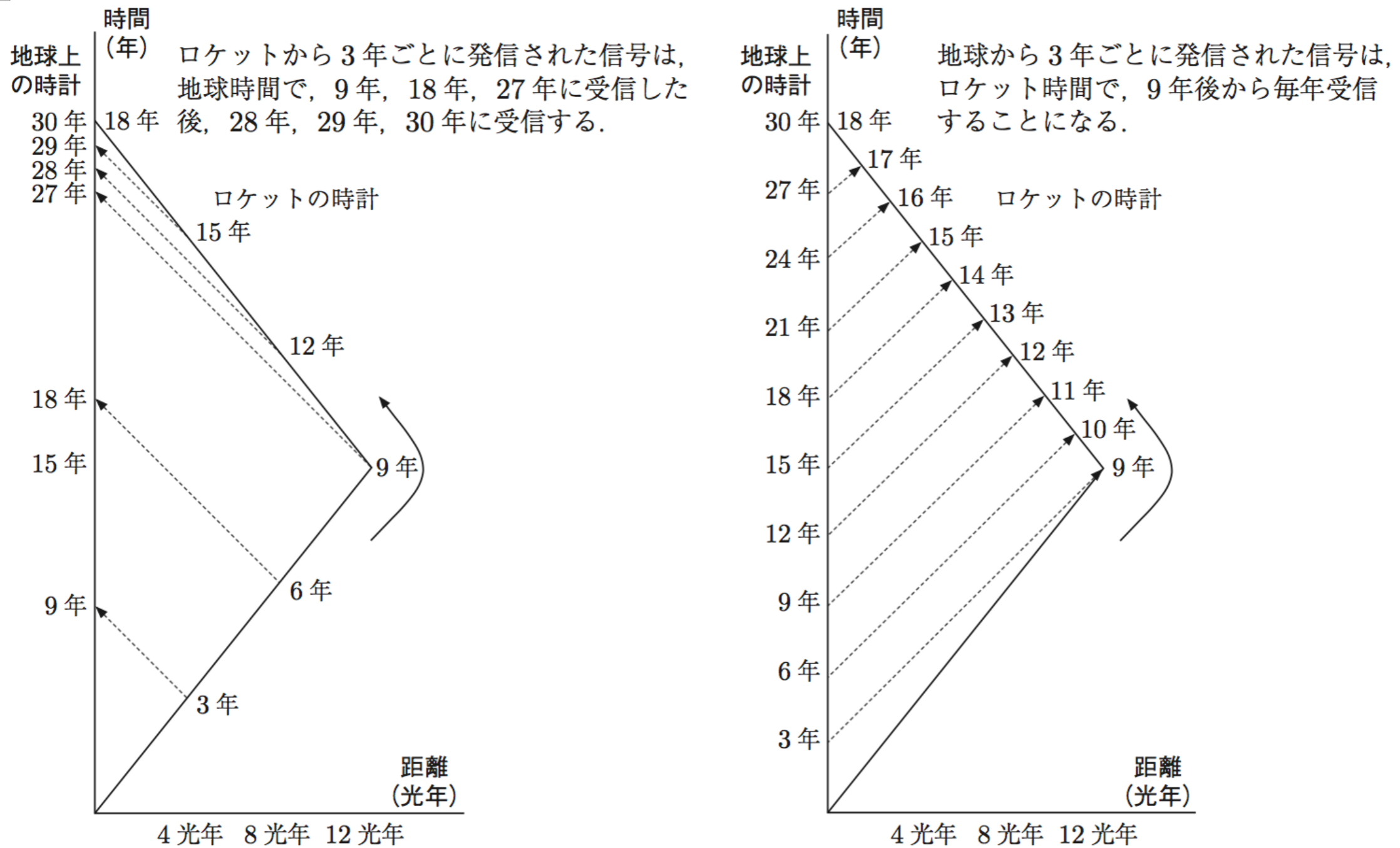
## 双子のパラドックス

- a 双子の兄と弟がいて、兄が光速の 80% のスピードで飛ぶロケットに乗って宇宙旅行に出た。目的地の星の近くまで一直線に飛び、すぐに引き返して戻ってきた。
- b ロケットで飛行中は、どちらも相手の時計の進み方が遅いと観測していた。
- c それでは、地球時間で 30 年経って戻ってきた兄と、地球に残っていた弟が再会するとき、どちらが若いのか。

弟

**兄の方が若い**

# 双子のパラドックス



**図 3.17** 双子のパラドックスの理解. 互いに3年ごとに信号を発して、互いに相手の時計は遅いと感じつつも、再び出会うときにはロケットに乗っていた方が時間経過が短い。

# ドラえもん、世界を、学問してみれば。

各界の第一人者が講師となって、タイムトラベル論、デザイン論、コミュニケーション論を誌上講義。「ドラえもん」を題材に、わかりやすく解説します。

タイムトラベル論 講師

真貝寿明

MISAKI SHUKAI 大阪工業大学情報科学部教授

1966年東京都生まれ。早稲田大学理工学部物理学科、同大学大学院修士課程、ワシントン大学ペンシルバニア州立大学理学部物理学専攻を経て、2006年より大阪工業大学。専門は、相対性理論、宇宙論。

## 過去や未来へ行くことは、果たして可能なのか？

タイムマシンが可能かどうかを議論する学問は、物理学です。アインシュタインが作りあげた「相対性理論」と、ミクロの世界を扱う量子物理学の、両方に絡む問題です。

浦島太郎が竜宮城から帰ってきたら、知り合いは一人もおらず、自分だけ未来にきました。このようないわゆる「ウラシマ効果」の物語は世界中にあります。現代物理学の理論上、未来へのタイムトラベルは実際に可能です。光速に近いロケットを作って、そのロケットに10年間乗り、地球に戻ってきたら100年後になる、という話を聞いたことがあるでしょう。時間の進み方は状況によって異なる、というのが相対性理論の結論の一つです。ロケットの中の時間の進み方と、地球の時間の進み方が違うので、地球に戻ってきたら、100年後の未来だったというウラシマ効果がおきるのです。実験でも証明されています。素粒子を光速に近いスピードまで加速すると、崩壊するまでの寿命が延びるのです。過去に行く話はどうでしょうか。



「プロボゾ作戦」(てんとう虫コミックス1巻) 12回目の結婚記念日の夜、ハビとママが、どちらがプロボゾしたかで、大ゲンカ。のび太とドラえもんが、真相を確かめるべく12年前にタイムマシンで戻ってみると……

過去に行って親を殺すと自分が存在しなくなるパラドックスと、未来で矛盾となる出来事はあらかじめ除外されるという考え方。

ラえもんは未来から過去へ来たわけですが、過去へのタイムトラベルが可能かどうかは現時点では未解決です。

### 空間も時間もジャンプする、ワームホールという存在。

キャンプ・ソーンというアメリカの物理学者が、1988年に「ワームホール」を使ったタイムトラベルの方法を発表しました。ワームホールは、空間も時間もジャンプできる「虫食い道場」のようなものです。相対性理論は、時間と空間の物理学ですが、ワームホールのような時空のトンネル構造が方程式の解として存在します。ソーンは、ワームホール型タイムマシンを使えば、理論的には、過去へのタイムトラベルが可能である、という論文を発表し、我々に夢と希望を与えてくれました。ところで、タイムマシンが実現可能だとすると、いろいろ矛盾が生じます。物事には順序があり、原因が先にあって結果が後にあるという因果律を基本とする物理学では、矛盾があつては許されません。未来へ行くタイムトラベ



1 相対性理論  
アインシュタインによって提唱された理論と題して知られる。1905年に、特殊相対性理論を発表し、1915年に、重力の正体を説明する一般相対性理論を発表した。一般相対性理論を発表。

2 ワームホール  
虫を刺した通気孔が虫宮城や期待され、戻ってきたときには、何年も経っていたという話もよく聞かれます。洞窟が閉鎖された時、洞窟に閉じこもっていた3000年経っていたと考えることもできます。また、宇宙空間に存在するワームホールは、そのロケットに乗って帰ってきたら、未来へのタイムトラベルが可能になる。

3 光速  
光の速さのこと。1秒間で約30億キロメートル。地球の周囲を約4万回回ることができる。

4 キャンプ・ソーン  
アメリカの物理学者。カリフォルニア工科大学教授。1988年に「ワームホール」を使った過去へのタイムトラベルの可能性を提唱。元々、小説コンラートを執筆中のカール・セーガンがアイデアを求められ、ワームホール型タイムマシンの研究を進めた。異次元空間の存在も提唱。

5 ワームホール  
虫がトンネルを掘って進んでいくように、時空の歪みを利用して進むワームホール。理論上、ワームホールは存在し得るが、現在まで発見されたことはない。宇宙の隅隅には存在していると考えられる。



6 エヴェレット  
ヒュー・エヴェレットは、多世界解釈の提唱者。ワームホールは、多世界解釈の理論的根拠。

7 「あべこべ惑星」  
左右が逆で、西から太陽が昇り、ジャパニーズが暮らす子で、ジャパニーズが暮らす。さらには「あべこべ」の天才になっているという、すべてがあべこべの星。

8 ドイツチェ  
ドイツの物理学者。量子力学の発展に貢献。エヴェレットの多世界解釈の支持者。

9 ドイツチェ  
ドイツの物理学者。量子力学の発展に貢献。エヴェレットの多世界解釈の支持者。

ルは、矛盾なくOKです。未来に行つたとしても、こうなっていたのか、と知るだけで、情報が過去に戻ってくるわけではないからです。一方、過去へ行くタイムトラベルでは、さまざまなパラドックスが考えられます。「ドラえもん」を題材に、紹介しましょう。

### 過去へのタイムトラベルと、さまざまなパラドックス

まず、過去を変えてしまったら、現在の自分も消えてしまふかもしれません。「プロボゾ作戦」では、パパとママがきちんと結婚するように、のび太とドラえもんがタイムマシンで12年前のプロボゾの日に戻ります。この話に、いわゆる「親殺しのパラドックス」と呼ばれる矛盾が登場します。タイムマシンで過去に行って親を殺してしまうと、自分が存在しなくなる問題を、ソフトに変えていますね。

「あやうし!ライオン仮面」では、ドラえもんがタイムマシンで来月号の漫画雑誌を買ってきて、それを元に締め切りを迫られた漫画家が描く話ですが、ここには「作者不明のパラドックス」が提示されています。未来から持ち帰った自分の漫画を本人が描き写したら、その作品は誰がはじめて描いたものか、という問題ですね。情報は無から生じない。何もないところから、意味のある情報が発生したとなると、因果律に反したことになります。

このようなパラドックスがあると、過去へのタイムトラベルは否定されるのでしょうか。いえいえ、物理学者は解決策も考えています。その一つが、

「のび太も天才になれる?」(てんとう虫コミックス32巻)

ママに説教され、家出しようとする「宇宙救命ボート」でワープしたら、自分が住む町とそっくりなところに着く。学校では問題が簡単すぎて満点ばかり。天才になったとはしゃぐが……



### パラレルワールド

パラレルワールドの存在を肯定すれば、いくつもある並行世界の中で、その中のひとつを選択しながら生きていることになる。

「あやうし!ライオン仮面」(てんとう虫コミックス3巻)

フナコフニヤ夫の人気連載漫画「ライオン仮面」の来月号を読みたくなったドラえもんは、1カ月後の未来へ、締め切りを迫られた先生は、ドラえもんから来月号をもらって……



### 作者不明のパラドックス

フナコフニヤ夫のように、未来から持ち帰った自分の漫画を描き写した場合、その作品の本当の作者はいったい誰になるのか。

### 親殺しのパラドックス&事後選択モデル

過去に行って親を殺すと自分が存在しなくなるパラドックスと、未来で矛盾となる出来事はあらかじめ除外されるという考え方。

エヴェレットによる多世界解釈です。量子論の確率解釈をマクロな世界に拡張した考えで、我々の世界は、多くの同じような世界(パラレルワールド)から一つ一つを選択することで実現しているという考え方です。「のび太も天才になれる?」は、ある惑星では、いまの世界ののび太が天才になっていた、という一種のパラレルワールドも、すべてがあべこべだけど、一種のパラレルワールドといえるでしょう。ドイツチェは、親殺しのパラドックスを多世界解釈で解決することを提案しました。タイムマシンで過去に行って親を殺した時点で、その世界は、自分が存在しない未来へ分岐する。自分自身は、パラレルワールドを移動しただけ、と考えれば、因果関係に矛盾は生じません。ただ、過去を変えて世界を変えたとしても、変わっていない世界が、常に存在することになります。最近、パラドックスの解決策として「事後選択モデル」という考え方が提案されました。「未来でパラドックスになりそうな出来事は、あらかじめ除外される(ような作用ははたらく)」という考え方です。パラドックスが起らない場合のみ、過去の改変が許されるということですね。先ほどの「プロボゾ作戦」では、のび太とドラえもんは活躍で、パパとママが元のサヤにおさまります。のび太が生まれるためには無矛盾ですから、この話はまさに「ドラえもん」には、タイムトラベル論の要素が、矛盾する問題点を含めてきちんと描かれています。

# 浦島太郎問題

高橋虫麻呂が水江の浦の島子を詠んだ歌

<https://bonjin-ultra.com/manyou091740.html>

万葉集 巻第9-1740~1741

1740

春の日の 霞める時に 墨吉（すみのえ）の 岸に出でて 釣船の とをらふ見れば 古（いにしへ）の 事ぞ思  
ほゆる 水江（みづのえ）の 浦の島子が 堅魚（かつを）釣り 鯛（たひ）釣り矜（ほこ）り 七日まで 家にも  
来ずて 海界（うなさか）を 過ぎて漕ぎ行くに 海若（わたつみ）の 神の女（をとめ）に たまさかに い漕ぎ  
向ひ 相とぶらひ こと成りしかば かき結び 常世に至り 海若の 神の宮の 内の重（へ）の妙（たへ）なる殿  
に 携はり 二人入り居て 老いもせず 死にもせずして 永き世に ありけるものを 世の中の愚人（おろかひ  
と）の 吾妹子（わぎもこ）に 告（の）りて語らく 須臾（しましく）は 家に帰りて 父母に 事も告（かた）  
らひ 明日のごと われは来なむと 言ひければ 妹が言へらく 常世辺（とこよへ）に また帰り来て 今のご  
と 逢はむとならば このくしげ 開くな勤（ゆめ）と そこらくに 堅めし言（こと）を 墨吉に 還り来（き  
た）りて 家見れど 家も見かねて 里見れど 里も見かねて あやしみと そこに思はく **家ゆ出でて 三歳（み  
とせ）の間に 垣も無く 家滅（う）せめやと** この箱を 開きて見てば もとの如（ごと） 家はあらむと 玉く  
しげ 少し開くに 白雲の 箱より出でて 常世辺に たなびきぬれば 立ち走り 叫び袖振り 反側（こいまる）  
び 足ずりしつつ たちまちに 情（こころ）消失（けう）せぬ 若かりし 膚（はだ）も皺（しわ）みぬ 黒かり  
し 髪も白けぬ ゆなゆなは 気（いき）さへ絶えて 後（のち）つひに 命死にける 水江の 浦の島子が 家地  
（いへどころ）見ゆ

1741

常世辺（とこよへ）に住むべきものを剣刀（つるぎたち）己（な）が心から鈍（おそ）やこの君

# 浦島太郎問題

高橋虫麻呂が水江の浦の島子を詠んだ歌

万葉集 巻第9-1740~1741

【意味】

<https://bonjin-ultra.com/manyou091740.html>

〈1740〉春の日の、霞がかかっている時に、墨吉の岸に出て腰を下ろし、釣船が波に揺れているのを見ていると、昔のことが思われてくる。水江の浦の島子が、かつお釣りや鯛釣りに夢中になり、何日も家に帰らず、海の境を越えてなお漕ぎ進んでいくと、海の神の姫に偶然出会った。互いに求婚しあい、結婚を決めて約束をし、不老不死の国へ行き、海の神の宮殿の奥にあるすばらしい御殿に、二人で手を取り合って入り、年も取らず、死にもしないで長い間暮らしていた。ところが、愚かな浦の島子が、いとしい妻に告げて、しばらくわが家に帰り、父母に事の次第を打ち明けて、すぐ明日にも戻ってこようと言った、妻は、この国にまたお帰りになって、今のように私に逢うとおっしゃるのでしたら、この櫛笥（くしげ）を絶対に開いてはなりませんと、堅く堅く約束して送り出した。

浦の島子は墨吉に帰ってきて、我が家を捜したが見つからない、里を捜しても見つからない、そこで思ったのは、家を出て三年しか経っていないのに、垣根も家もなくなるなどということがあろうか、この箱を開いてみたなら、元の通りわが家が現れるだろうと、玉櫛笥を少し明けてみた。すると、白い雲が箱の中から立ちのぼり、不老不死の国へたなびいて流れた。浦の島子は飛び上がって走り回り、叫んでは袖を振り、転げまわって地団太を踏んで嘆き悲しんでいるうち、急に気を失ってしまった。そして、若かった肌も皺だらけとなり、黒かった髪の毛も真っ白になってしまった。その後息まで絶えて、とうとう死んでしまった。その水江の浦の島子の家があった跡が見える。

〈1741〉不老不死の仙境に住んでいることができたのに、自分の心からとはいえ愚かであるよ、この人は…。

3年間竜宮城にいる間に、300年も経っていた。

$$300 \text{ year} = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} dt \implies v = 0.9999499c$$

竜宮城は光速の99.995%で動いていた。

# 浦島太郎問題

## 2.2.4 高速ロケットにおける時間の遅れ

光の進む速度はどの座標系で見ても一定である，とする原理に立脚する特殊相対性理論によれば，観測者によって時間の進み方が相対的に異なってくる．その違いは，法則 2.3 に示した関係になる．

いま，速度  $v$  で運動する宇宙船に乗っている座標系での固有時間間隔  $\tau$  を考えると，静止系での時間間隔  $t$  と経過時間の対応を考えるときには，法則 2.3 より，

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - (v/c)^2} \Delta t \quad (2.33)$$

の微小時間を足し合わせてゆけばよく，

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - (v/c)^2} dt \quad (2.34)$$

などとなる．

いま，宇宙船が地球から一定加速度  $a'$  で加速していくとする．この加速度  $a'$  は宇宙船で測定したものとすると，地球で見る加速度  $a$  は，式 (2.16) より

$$a = (1 - (v/c)^2)^{3/2} a' \quad (2.35)$$

となる．この加速運動中の，宇宙船内での経過時間  $T'_1$  のとき，地球から見た宇宙船の速度を  $v_1$  とすると，

$$T'_1 = \int_0^{T'_1} d\tau = \int_0^{T_1} \sqrt{1 - (v/c)^2} dt = \frac{1}{a'} \int_0^{v_1} \frac{1}{1 - (v/c)^2} dv = \frac{c}{2a'} \log \frac{1 + v_1/c}{1 - v_1/c} \quad (2.36)$$

の関係が得られる．また，このとき地球の経過時間  $T_1$  は

$$T_1 = \int_0^{T_1} dt = \int_0^{v_1} \frac{dv}{a'(1 - v^2/c^2)^{2/3}} = \frac{v_1}{a' \sqrt{1 - v_1^2/c^2}} \quad (2.37)$$

となる．



## 課題 2.9. 【浦島問題】

浦島に住む太郎は、助けた亀に誘われて竜宮城に行き、そこで楽しく過ごして帰ってきた。太郎の時間では往復も含めて 25 年の旅だったのだが、帰ってきてみると、住んでいた村には誰も知り合いがおらず、自分が旅立ってから約 75 年が経過した未来の村にいることを知った。

思い出してみると、自分の村から竜宮城までは宇宙船に乗っていた。相対性理論の効果で自分の感じる時間の進み方が、村の時間よりもずっとゆっくりだったため、約 50 年分の差が生じたと思われる。

- (1) 宇宙船の加速・減速を考えず、一定速度  $v_0$  の乗り物だとする。地球での経過時間に対して、宇宙船内の時間の進み方が  $1/3 (= 25/75)$  のとき、宇宙船の速度  $v_0$  は光速の何倍の大きさか。

実際の宇宙船は徐々に加速し、徐々に減速する。人間が快適に過ごせるように、宇宙船は地表の重力加速度と同じ  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  のまま一定で加速できるとする。

宇宙船は  $T'_1 = 3$  年間の間、この加速度  $g$  を保って加速し、最高速度に到達したのち等速運動で  $T'_2 = 1$  年間航行し、 $T'_3 = 3$  年間加速度  $-g$  で減速して、合計 7 年かけて竜宮城に着いたとする。ここでの年数・加速度は宇宙船内で測定した値である。加速運動している期間は、式 (2.36) より、静止系で測る最高速度  $V_{\text{max}}$  と

$$T'_1 = \frac{c}{2g} \log_e \frac{1 + V_{\text{max}}/c}{1 - V_{\text{max}}/c} \quad (2.38)$$

の関係が成り立つので、 $V_{\text{max}}$  が求められる。また、式 (2.37) よりこの期間に相当する地球での経過日数が求められる。

- (2) 宇宙船の最高速度  $V_{\text{max}}$  は光速  $c$  の何倍か。  $c = 299792458 \text{ m/s}$  として計算せよ。  
 $e^{6.19} = 485.6$  である。
- (3) 宇宙船が最高速度  $V_{\text{max}}$  に到達したとき、地球では何日経過しているか。
- (4) 宇宙船が最高速度  $V_{\text{max}}$  で航行している間、地球では何日経過しているか。
- (5) 宇宙船が竜宮城に 7 年かけて到達したとき、地球では何日経過しているか。
- (6) 浦島太郎が竜宮城に 11 年滞在し、再び 7 年かけて地球に戻ってきたとき、地球では何年経過しているか。

### レポート課題 1

#### 課題 2.7

締め切り 金曜正午

### レポート課題 2

#### 課題 2.9 浦島問題

or

#### 課題 2.10 太陽問題

どちらか選択して答えよ

期限：土曜午後 1 時

### レポート課題 3

#### 課題 3.2 浦島問題

or

#### 課題 3.3 GPS 問題

どちらか選択して答えよ

期限：土曜午後 1 時

# 不思議の国のトムキンス

## コラム 17 不思議の国のトムキンス

光速に近い速さで移動すると、ニュートン力学とは違った現象が起きる。光がドップラー効果を受けて色を変えたり、角度によって光が到着する時間差が生じるので、見かけの形が変形する。

物理学者のガモフ (George Gamow, 1904–68) は、このような現象を一般向けにわかりやすく伝えるため、物語として『不思議の国のトムキンス (Mr. Tompkins in Wonderland)』を著した。もし、光の速度が時速 30 km/s だったとしたら、日常生活でも相対性理論の効果がいろいろ見えるだろうというストーリーである。

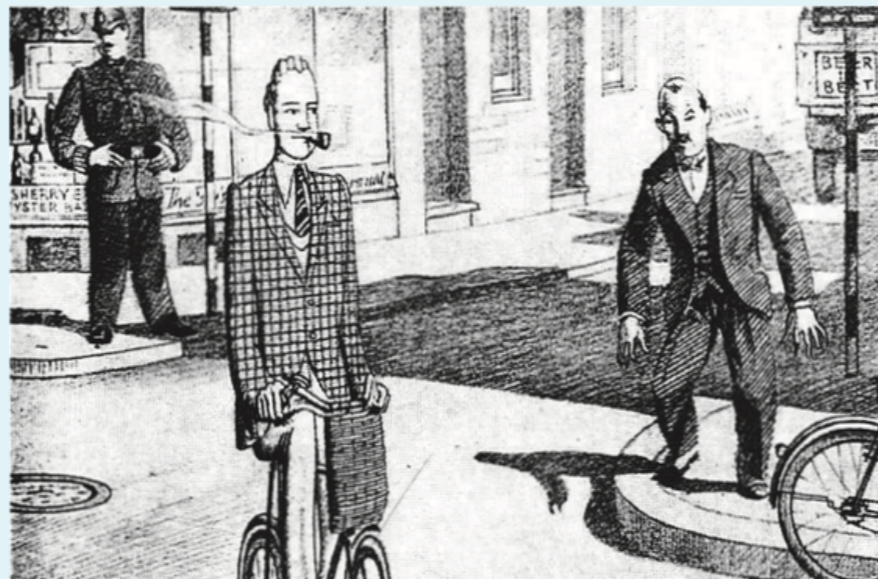
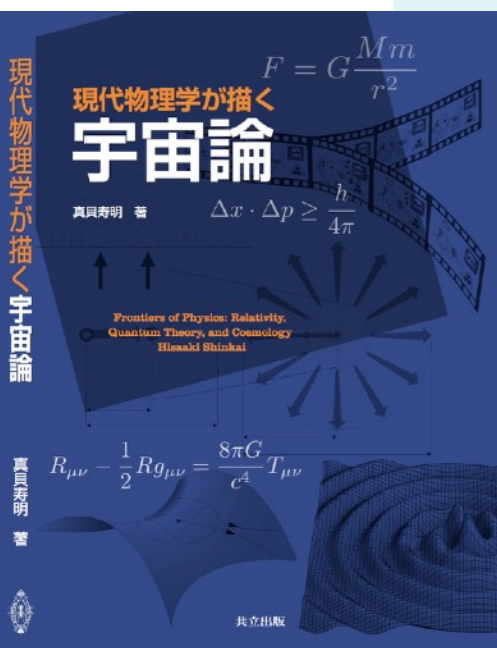


図 3.18 ガモフ著『不思議の国のトムキンス』(伏見康治 (訳), 創元科学選書, 1943) の挿絵. 最高速度が時速 30 km/s の世界では, 自転車で移動する人から見ると世界が歪んで見え, 止まっている人から自転車の人を見ると平たく見える.



「現代物理学が描く宇宙論」 (真貝, 共立出版, 2018年10月刊)

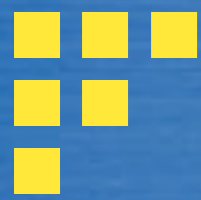
# 「不思議の国のトムキンス」 効果の由来

## 準光速ロケットからの眺め (1) 光のドップラー効果





$$f_N = \frac{c + v_{source}}{c - v_{obs}} f_{source}$$

$$f_{SR} = \left( \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^{1/2} f_{source}, \quad \beta = \frac{v_{obs}}{c}$$



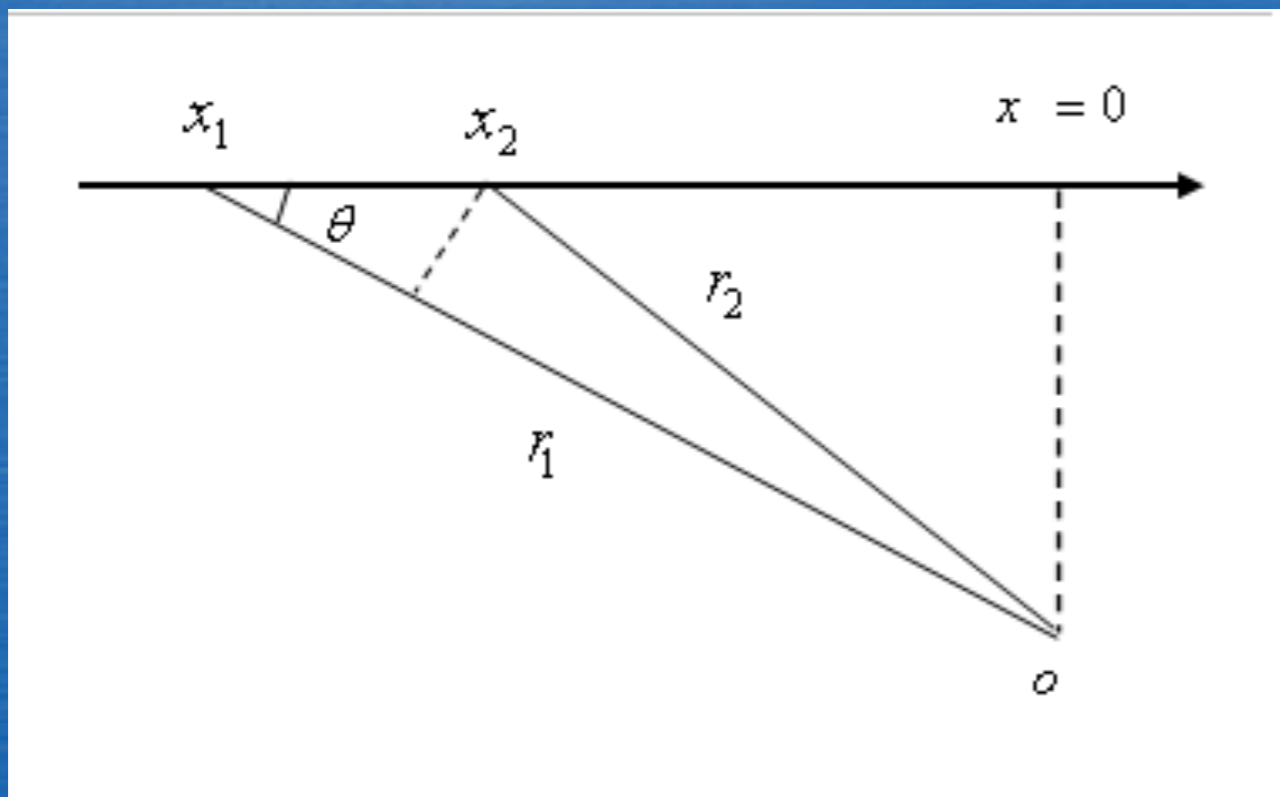
# 準光速ロケットからの眺め (1) 光のドップラー効果

SourceFrequency 520    Sourcespd 0    Originspd -0.9    kekka SR2266.62745    kekka N988.0    ttt

	不可視	不可視
特殊相対性理論		不可視
ニュートン力学		不可視 

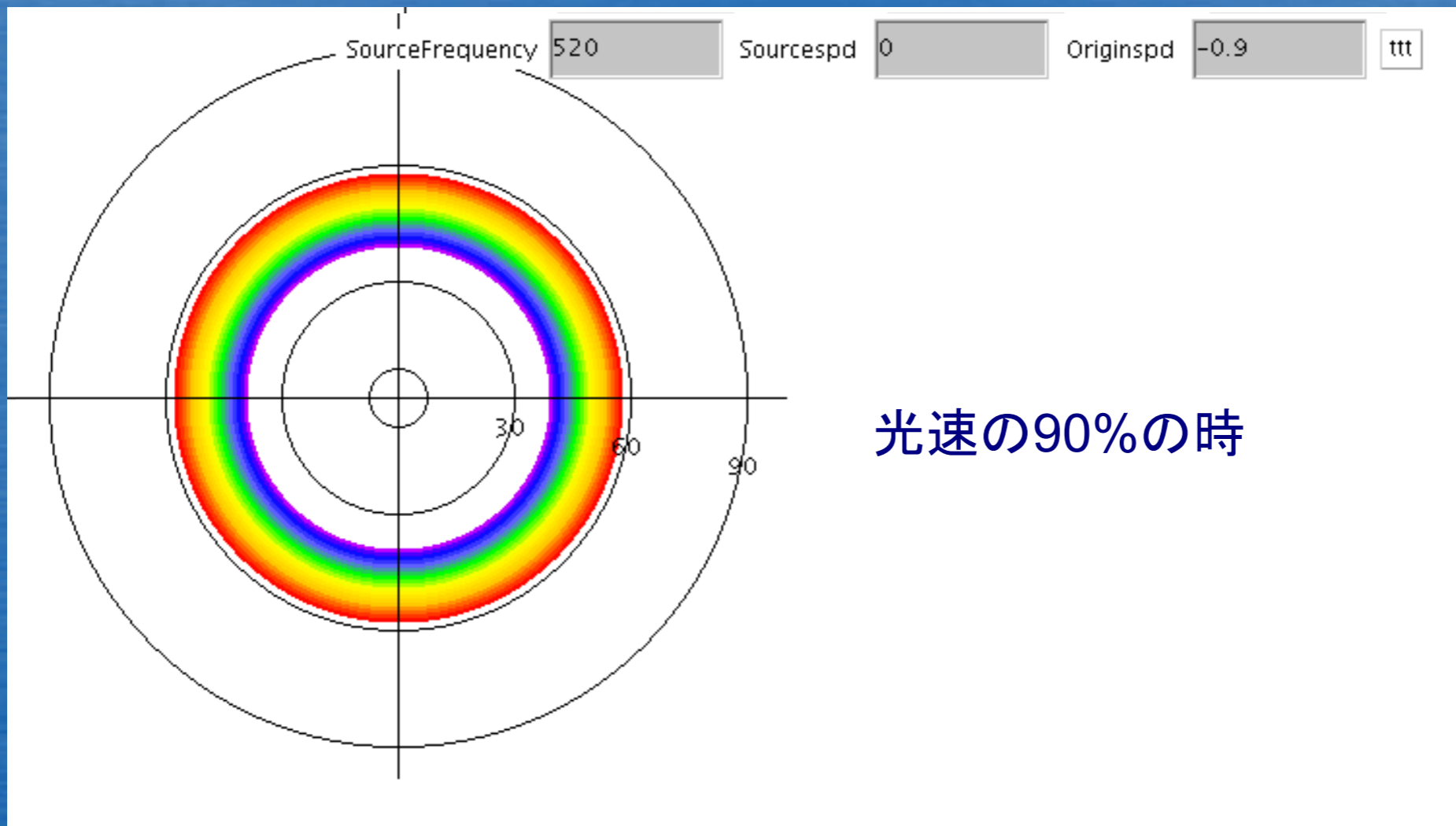
# 「不思議の国のトムキンス」 効果の由来

## 準光速ロケットからの眺め (2) 光の横ドップラー効果



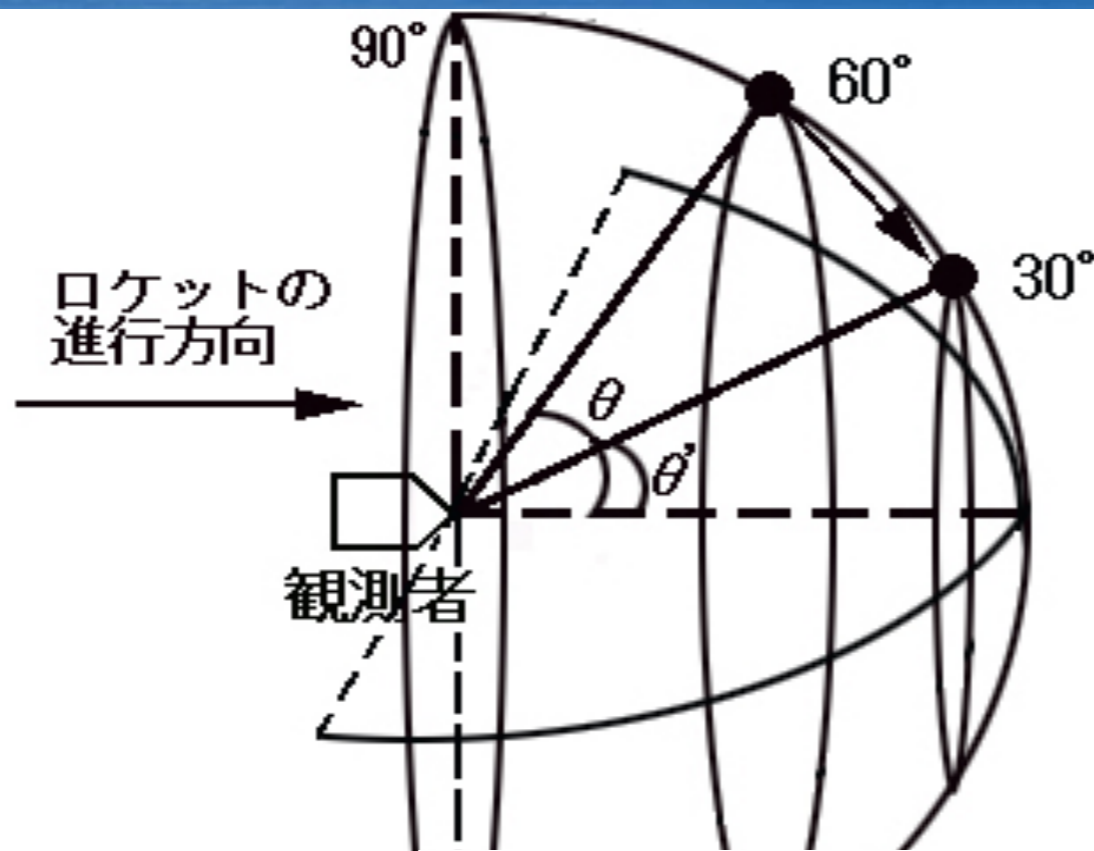
$$f_{SR} = \frac{(1 - \beta^2)^{1/2}}{1 - \beta \cos \theta} f_{source}, \quad \beta = \frac{v_{obs}}{c}$$

# 準光速ロケットからの眺め (2) 光の横ドップラー効果



# 「不思議の国のトムキンス」 効果の由来

## 準光速ロケットからの眺め (3) 光行差現象



$$\tan \theta' = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\cos \theta + \beta} \sin \theta, \quad \beta = \frac{v_{obs}}{c}$$

# 準光速ロケットから見える世界(1)

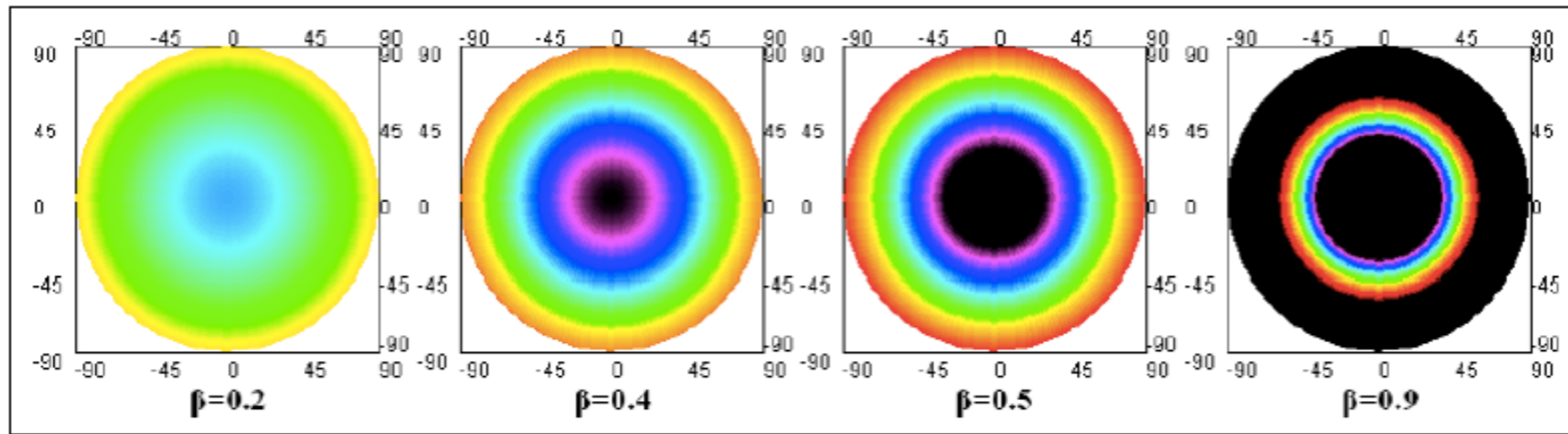


図 13: ドップラー効果のみを考えた前方の景色

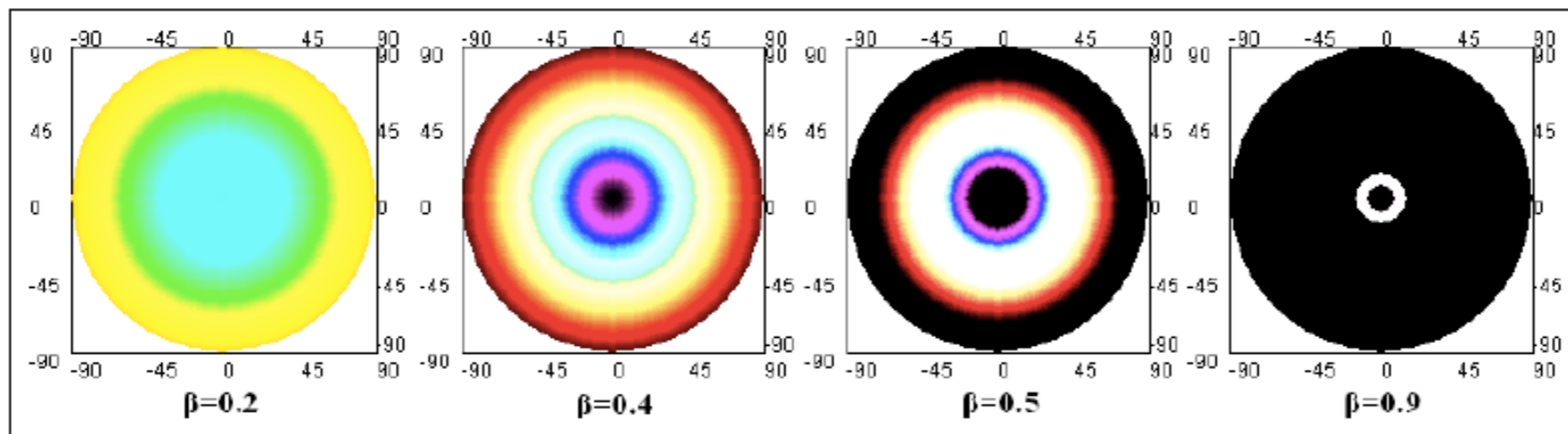
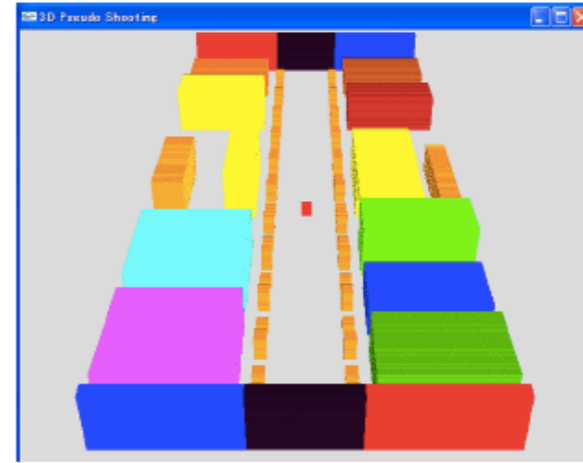


図 14: 図 13 に光行差及び明るさ変化を取り入れた前方の景色

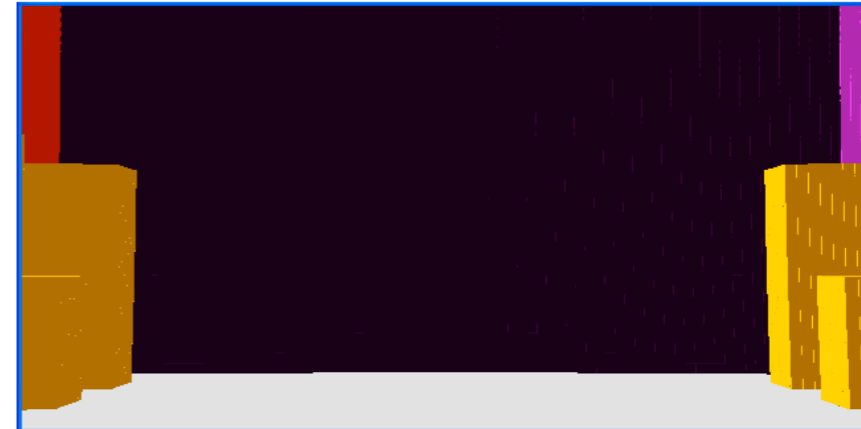
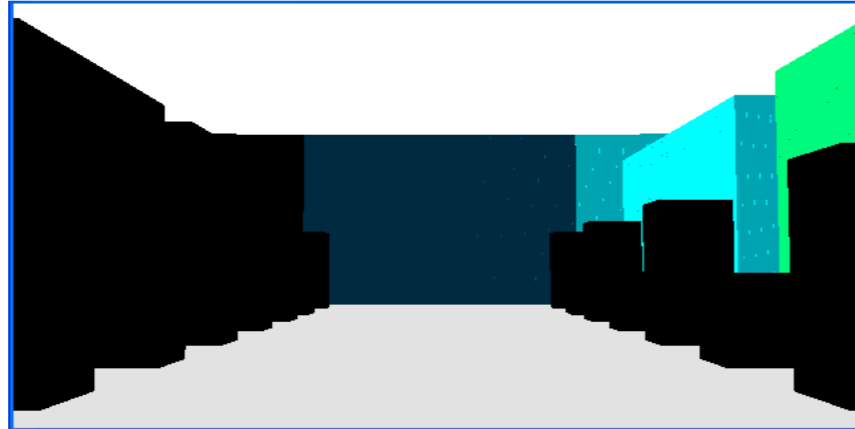
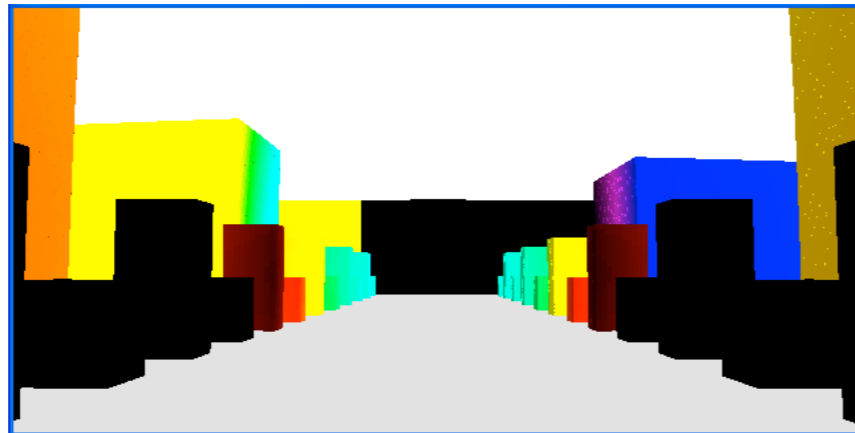


# 準光速ロケットから見える世界(2)

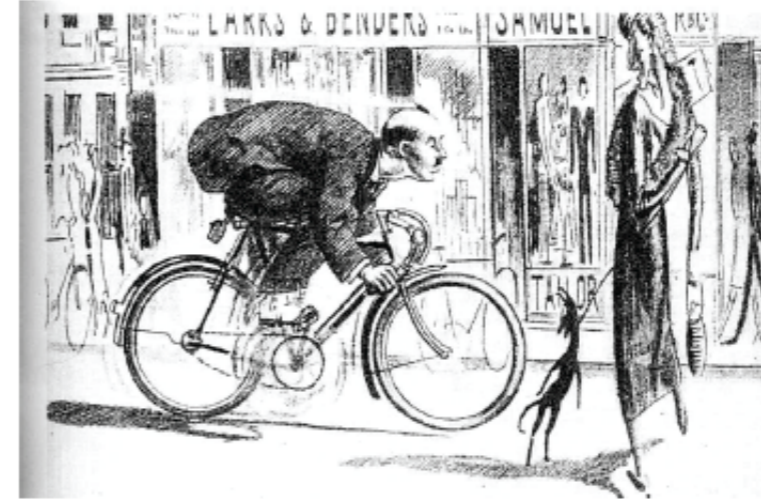
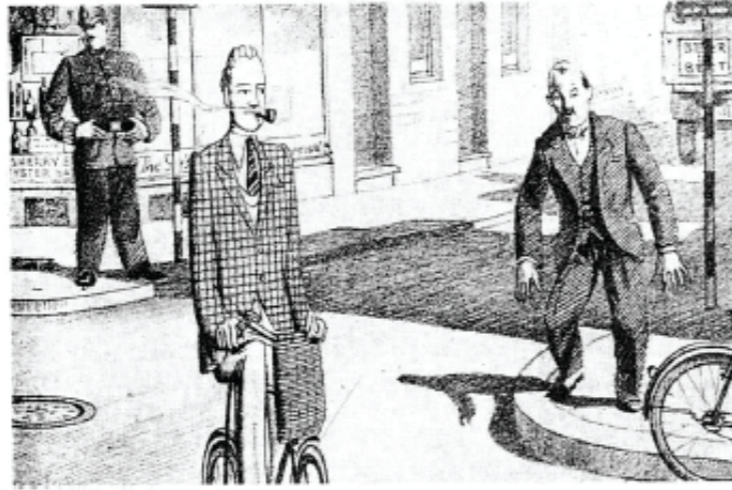
$v=0$



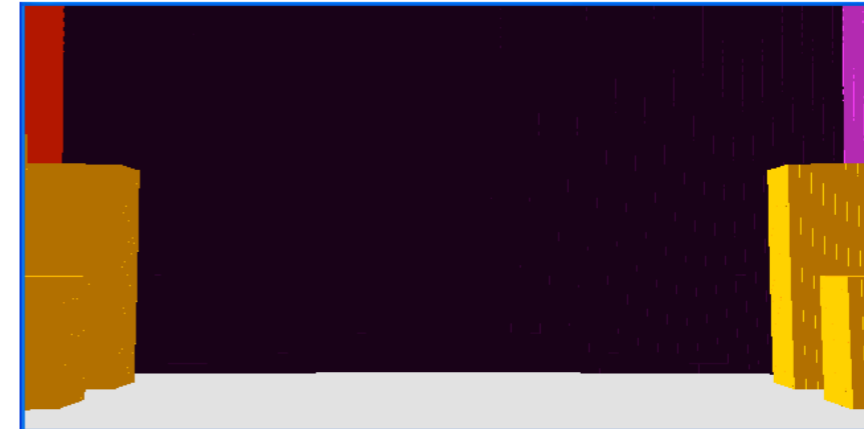
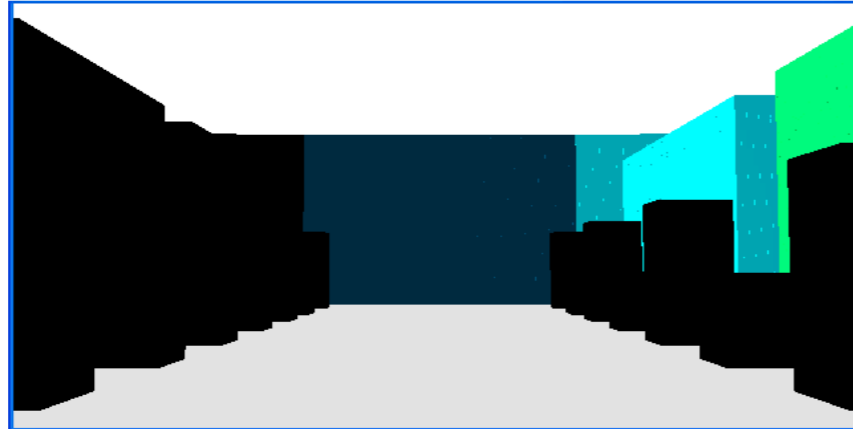
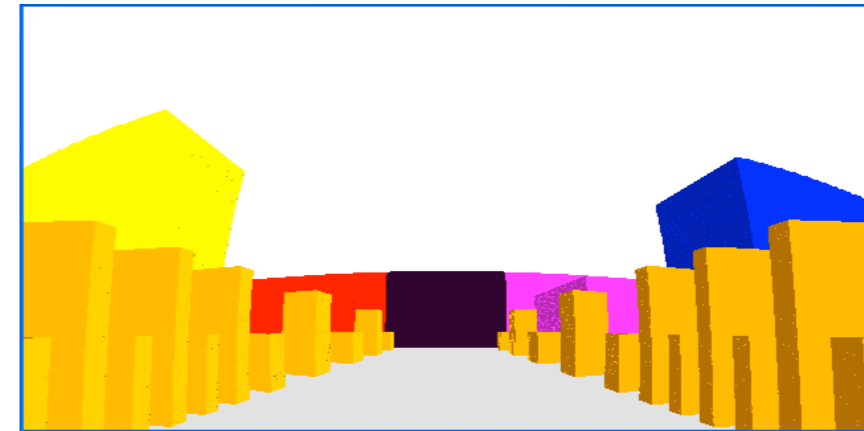
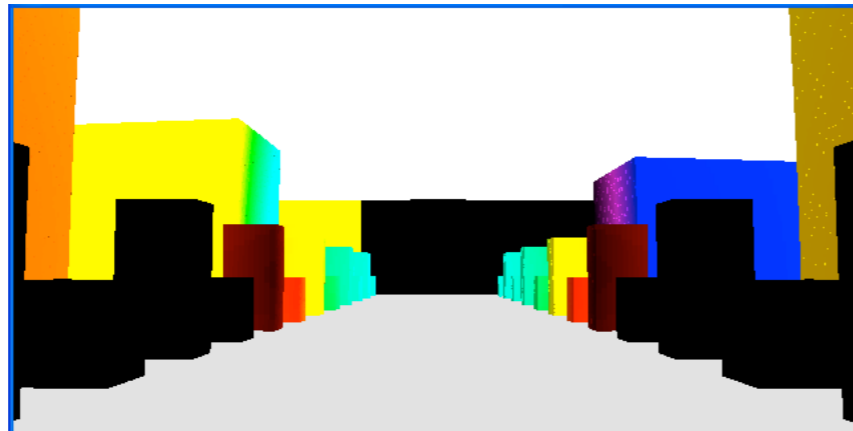
$v=0.8c$



# 準光速ロケットから見える世界(3)



$v=0.8c$



# 相対性理論

アインシュタインはどこまで正しいのか

## 1. 序論

## 2. 特殊相対性理論

時間の進み方は観測者によって異なる

$E=mc^2$ , 原子核反応, 星の一生

干渉計

GPS

## 3. 一般相対性理論

時間の進み方は重力によって異なる

ブラックホール, 重力波

光格子時計

真貝寿明 (しんかい ひさあき)

大阪工業大学 情報科学部 教授

武庫川女子大学 非常勤講師

理化学研究所 客員研究員



<http://www.oit.ac.jp/is/shinkai/>

# Maxwell方程式は， Lorentz変換のもとで不変である

## 法則 2.2 (Lorentz 変換)

ある慣性系  $S(t, x, y, z)$  から  $+x$  方向に速度  $v$  で運動する慣性系  $S'(t', x', y', z')$  への座標変換は

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z. \end{aligned} \quad (2.7)$$

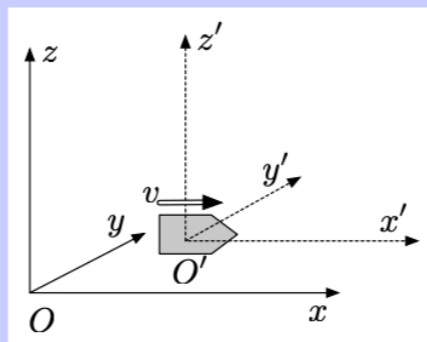


図 5: 静止している  $xyz$  座標系と，速度  $v$  で  $x$  方向に移動している  $x'y'z'$  座標系.

となる．この式は，行列とベクトルの積として，次のようにも書ける．

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{-v/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

# Maxwell方程式は, Lorentz変換のもとで不変である

## 6.5 マクスウェル方程式のローレンツ不変性

### ■力のローレンツ変換

#### 問題 6.5.1

運動方程式が二つの慣性系 S と S' で同じ形になることから, 特殊相対性理論における力の変換則を導くことができる.

(1) 力のローレンツ変換を求めよ.

[解] 運動量のローレンツ変換 (6.4.12), 時空の逆ローレンツ変換 (6.2.1) 及び速度のローレンツ変換 (6.0.3) を用いて,

$$\begin{aligned} F'_x &= \frac{dp'_x}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \frac{dp'_x}{dt} = \frac{d}{dt'} \left( \frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \right) \frac{d}{dt} \left( \frac{p_x - (v/c^2)E}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \right) \\ &= \left( \frac{1 + (v/c^2)u'_x}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \right) \left( \frac{dp_x}{dt} - (v/c^2) \frac{dE}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{1-(v/c)^2} \left( 1 + \frac{v}{c^2} \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2} \right) \left( F_x - \frac{v}{c^2} \vec{F} \cdot \vec{u} \right) \\ &= \frac{F_x - (v/c^2) \vec{F} \cdot \vec{u}}{1 - u_x v/c^2} \end{aligned} \quad (6.5.1)$$

ここで,  $\frac{dp_x}{dt} = F_x$ ,  $\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{u}$  であることを用いた. 又,

$$F'_y = \frac{dp'_y}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \frac{dp'_y}{dt} = \frac{1 + (v/c^2)u'_x}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \frac{dp_y}{dt} = \frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{1 - u_x v/c^2} F_y \quad (6.5.2)$$

$$F'_z = \frac{dp'_z}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \frac{dp'_z}{dt} = \frac{1 + (v/c^2)u'_x}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \frac{dp_z}{dt} = \frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{1 - u_x v/c^2} F_z \quad (6.5.3)$$

となる.  $F_x$  のローレンツ変換 (6.5.1) に現れる仕事率  $\vec{F} \cdot \vec{u}$  は次のように変換される.

$$\vec{F}' \cdot \vec{u}' = \frac{dE'}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \frac{dE'}{dt} = \frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{1 - u_x v/c^2} \frac{d}{dt} \left( \frac{E - vp_x}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \right) = \frac{\vec{F} \cdot \vec{u} - vF_x}{1 - u_x v/c^2} \quad \square \quad (6.5.4)$$

これらの変換式から

$$\begin{aligned} \left( \frac{\vec{F}' \cdot \vec{u}'}{c} \right)^2 - F_x'^2 &= \frac{1}{(1 - u_x v/c^2)^2} \left\{ \left( \frac{\vec{F} \cdot \vec{u} - vF_x}{c} \right)^2 - \left( F_x - \frac{v}{c^2} \vec{F} \cdot \vec{u} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1 - (v/c)^2}{(1 - u_x v/c^2)^2} \left\{ \left( \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}}{c} \right)^2 - F_x^2 \right\} \\ F_y'^2 + F_z'^2 &= \frac{1 - (v/c)^2}{(1 - u_x v/c^2)^2} (F_y^2 + F_z^2) \end{aligned}$$

となることが分かり, 式 (6.4.7) を用いて以下のローレンツ不変量が見出される.

$$\frac{(\vec{F}' \cdot \vec{u}'/c)^2 - F_x'^2 - F_y'^2 - F_z'^2}{1 - (u'/c)^2} = \frac{(\vec{F} \cdot \vec{u}/c)^2 - F_x^2 - F_y^2 - F_z^2}{1 - (u/c)^2} \quad (6.5.5)$$

故に  $\left( \frac{\vec{F} \cdot \vec{u}/c}{\sqrt{1-(u/c)^2}}, \frac{F_x}{\sqrt{1-(u/c)^2}}, \frac{F_y}{\sqrt{1-(u/c)^2}}, \frac{F_z}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \right)$  は 4 元ベクトルである.

### ■電磁場のローレンツ変換

#### 問題 6.5.2

電荷  $q$ , 速度  $\vec{u}$  の小物体にはたらく電磁力は, 電場を  $\vec{E}$ , 磁束密度を  $\vec{B}$  として  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$  である. このとき,  $\vec{F} \cdot \vec{u} = q\vec{E} \cdot \vec{u}$  となる.

(2) 電磁場のローレンツ変換を求めよ.

[解] (1) で求めた力のローレンツ変換の式 (6.5.1)~(6.5.3) から

$$q(E'_x + u'_y B'_z - u'_z B'_y) = \frac{q(E_x + u_y B_z - u_z B_y) - (v/c^2)q\vec{E} \cdot \vec{u}}{1 - u_x v/c^2} \quad (6.5.6)$$

$$q(E'_y + u'_z B'_x - u'_x B'_z) = \frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{1 - u_x v/c^2} q(E_y + u_z B_x - u_x B_z) \quad (6.5.7)$$

$$q(E'_z + u'_x B'_y - u'_y B'_x) = \frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{1 - u_x v/c^2} q(E_z + u_x B_y - u_y B_x) \quad (6.5.8)$$

が得られる. 右辺の分母を払い, ローレンツ変換 (6.0.3), (6.4.8) を用いて慣性系 S' の速度を S の速度に変換すると,

# Maxwell方程式は、Lorentz変換のもとで不変である

$$(1 - u_x v/c^2) E'_x + \sqrt{1 - (v/c)^2} (u_y B'_z - u_z B'_y) = E_x + u_y B_z - u_z B_y - (v/c^2) (u_x E_x + u_y E_y + u_z E_z) \quad (6.5.9)$$

$$(1 - u_x v/c^2) E'_y + \sqrt{1 - (v/c)^2} u_z B'_x - (u_x - v) B'_z = \sqrt{1 - (v/c)^2} (E_y + u_z B_x - u_x B_z) \quad (6.5.10)$$

$$(1 - u_x v/c^2) E'_z + (u_x - v) B'_y - \sqrt{1 - (v/c)^2} u_y B'_x = \sqrt{1 - (v/c)^2} (E_z + u_x B_y - u_y B_x) \quad (6.5.11)$$

となる。これらの式が  $u_x, u_y, u_z$  の任意の値に対して成り立つための条件を整理することで、 $\vec{E}, \vec{B}$  の各成分のローレンツ変換が以下のように求められる。

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \frac{E_y - v B_z}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} & B'_y &= \frac{B_y + (v/c^2) E_z}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\ E'_z &= \frac{E_z + v B_y}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} & B'_z &= \frac{B_z - (v/c^2) E_y}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \end{aligned} \quad (6.5.12)$$

仕事率  $\vec{F} \cdot \vec{v}$  のローレンツ変換 (6.5.4) から電場  $\vec{E}$  のローレンツ変換が得られるが、これは式 (6.5.12) と同じである。□

## ■マクスウェル方程式のローレンツ不変性

### 問題 6.5.3

特殊相対性原理によりマクスウェル方程式はローレンツ変換で不変である。

- (3) マクスウェル方程式がローレンツ変換で不変であることから、電荷密度  $\rho$  [C/m<sup>3</sup>] と電流密度  $\vec{i}$  [A/m<sup>2</sup>] のローレンツ変換を求めよ。

[解]  $t', x'$  での微分は、ローレンツ逆変換 (6.2.1), (6.2.2) より、次のように  $t, x$  での微分に書き換えられる。

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (6.5.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial t}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \left( \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (6.5.14)$$

$y', z'$  はそれぞれ  $y, z$  と等しく変化しないので、これらの微分も変わらない。従って、慣性系  $S'$  において

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E}' &= \frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \left( \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) E_x + \frac{\partial}{\partial y} \frac{E_y - v B_z}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{E_z + v B_y}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} - v \left( \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) + \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \left( \text{div} \vec{E} - v \left( \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \right) \right) \end{aligned}$$

となる。ここで  $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$  を用いた。慣性系  $S$  におけるマクスウェル方程式より、

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \text{rot} \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ の } x \text{ 成分} = \mu_0 i_x$$

であるから、 $v \mu_0 = v \mu_0 \epsilon_0 / \epsilon_0 = v / (c^2 \epsilon_0)$  より

$$\text{div} \vec{E}' = \frac{\rho'}{\epsilon_0}, \quad \rho' = \frac{\rho - (v/c^2) i_x}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (6.5.15)$$

となる。これで電荷密度のローレンツ変換  $\rho'$  が得られた。同様に、

$$\begin{aligned} \text{div} \vec{B}' &= \frac{\partial B'_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \left( \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) B_x + \frac{\partial}{\partial y} \frac{B_y + (v/c^2) E_z}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{B_z - v E_y}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \left( \text{div} \vec{B} + \frac{v}{c^2} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial t} \right) \right) \end{aligned}$$

となり、 $\text{div} \vec{B} = 0, \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial t} = \text{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ の } x \text{ 成分} = 0$  より

$$\text{div} \vec{B}' = 0 \quad (6.5.16)$$

であることが分かる。次に、 $\text{rot} \vec{E}' + \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'}$  の各成分を調べよう。

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E}' + \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} \text{ の } x \text{ 成分} &= \frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} + \frac{\partial B'_x}{\partial t'} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{E_z + v B_y}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{E_y - v B_z}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) B_x \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \left( v \left( \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial t} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \left( v \text{div} \vec{B} + \left( \text{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ の } x \text{ 成分} \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

# Maxwell方程式は, Lorentz変換のもとで不変である

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{E}' + \frac{\partial\vec{B}'}{\partial t'} \text{ の } y \text{ 成分} &= \frac{\partial E'_x}{\partial z'} - \frac{\partial E'_z}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial t'} \\ &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left( \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{B_y + (v/c^2)E_z}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{1}{1-(v/c)^2} \left( \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial x} + v \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) \\ &\quad + \frac{1}{1-(v/c)^2} \left( \frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} + v \frac{\partial B_y}{\partial x} + \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial t} = \text{rot}\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \text{ の } y \text{ 成分} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{E}' + \frac{\partial\vec{B}'}{\partial t'} \text{ の } z \text{ 成分} &= \frac{\partial E'_y}{\partial x'} - \frac{\partial E'_x}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial t'} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left( \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{B_z - (v/c^2)E_y}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ &= -\frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{1}{1-(v/c)^2} \left( \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} - \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} - v \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \\ &\quad + \frac{1}{1-(v/c)^2} \left( \frac{\partial B_z}{\partial t} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} + v \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial t} = \text{rot}\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \text{ の } z \text{ 成分} = 0 \end{aligned}$$

となり

$$\text{rot}\vec{E}' = -\frac{\partial\vec{B}'}{\partial t'} \quad (6.5.17)$$

となることが分かる. 最後に,  $\text{rot}\vec{B}' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial\vec{E}'}{\partial t'}$  の各成分を調べる.

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{B}' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial\vec{E}'}{\partial t'} \text{ の } x \text{ 成分} &= \frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_x}{\partial t'} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{B_z - (v/c^2)E_y}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{B_y + (v/c^2)E_z}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - \frac{1}{c^2 \sqrt{1-(v/c)^2}} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) E_x \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left( -\frac{v}{c^2} \text{div}\vec{E} + \left( \text{rot}\vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \right) \text{ の } x \text{ 成分} \right) \\ &= \frac{\mu_0 i_x - (v/c^2)(\rho/\epsilon_0)}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \mu_0 \frac{i_x - v\rho}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{B}' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial\vec{E}'}{\partial t'} \text{ の } y \text{ 成分} &= \frac{\partial B'_x}{\partial z'} - \frac{\partial B'_z}{\partial x'} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_y}{\partial t'} \\ &= \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left( \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{B_z - (v/c^2)E_y}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ &\quad - \frac{1}{c^2 \sqrt{1-(v/c)^2}} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ &= \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{1}{1-(v/c)^2} \left( \frac{v}{c^2} \frac{\partial B_z}{\partial t} - \frac{v^2}{c^4} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \\ &\quad - \frac{1}{1-(v/c)^2} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} = \text{rot}\vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \text{ の } y \text{ 成分} = \mu_0 i_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{B}' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial\vec{E}'}{\partial t'} \text{ の } z \text{ 成分} &= \frac{\partial B'_y}{\partial x'} - \frac{\partial B'_x}{\partial y'} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_z}{\partial t'} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \left( \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{B_y + (v/c^2)E_z}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \\ &\quad - \frac{1}{c^2 \sqrt{1-(v/c)^2}} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ &= -\frac{\partial B_x}{\partial y} + \frac{1}{1-(v/c)^2} \left( \frac{v}{c^2} \frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{v^2}{c^4} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{\partial B_y}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \\ &\quad - \frac{1}{1-(v/c)^2} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \text{rot}\vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \text{ の } z \text{ 成分} = \mu_0 i_z \end{aligned}$$

となり

$$\text{rot}\vec{B}' = \mu_0 \vec{i}' + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial\vec{E}'}{\partial t'} \quad (6.5.18)$$

であることが分かる. 但し, 電流密度  $\vec{i}'$  のローレンツ変換は次の式で与えられる.

$$i'_x = \frac{i_x - v\rho}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad i'_y = i_y, \quad i'_z = i_z \quad (6.5.19)$$

式(6.5.15)~(6.5.18)はマクスウェル方程式がローレンツ変換で不変であることを示す. 又,  $(c\rho, i_x, i_y, i_z)$  は4元ベクトルで

$$(c\rho')^2 - (i'_x)^2 - (i'_y)^2 - (i'_z)^2 = (c\rho)^2 - (i_x)^2 - (i_y)^2 - (i_z)^2$$

が成り立つ.

Newtonの運動方程式は、Galilei変換のもとで不変である

Maxwell方程式は、Lorentz変換のもとで不変である

Newtonの運動方程式も、Lorentz変換のもとで不変である形式にしたい 【相対論的運動方程式】



# 4元速度, 4元加速度, 4元運動量

## 2.1.6 4元速度, 4元加速度

固有時間  $\tau$  を用いて, 質点の位置の変化率と速度の変化率をそれぞれ

$$u^\mu \equiv \frac{d}{d\tau} x^\mu(\tau), \quad a^\mu \equiv \frac{d}{d\tau} u^\mu(\tau) = \frac{d^2}{d\tau^2} x^\mu(\tau) \quad (2.21)$$

として定義し, **4元速度** (four-velocity), **4元加速度** (four-acceleration) と呼ぶ. これらは Lorentz 不変な量である.

法則 2.3 を用いると,

$$u^0 = \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad u^i = \frac{v^i}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta \equiv \frac{|\mathbf{v}|}{c} \quad (2.22)$$

となり,

$$-(u^0)^2 + (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 = -c^2 \quad (2.23)$$

となるので,  $u^\mu$  には (2.23) の条件が常につく. すなわち,  $u^\mu$  の独立な成分は3つであることに注意しよう. この関係は, (2.17) と (2.19) から直接導くことができる.

また, **4元運動量** (four-momentum) として,

$$p^\mu \equiv m u^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (2.24)$$

を定義する.  $p^\mu$  にも拘束条件

$$-(p^0)^2 + (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 = -(mc)^2 \quad (2.25)$$

がつくので, 独立な成分は3つである.

固有時間  $\tau$  を使う  
4成分をもつ

拘束条件つき  
(3成分のみ独立)

# 相対論的運動方程式からエネルギー公式へ

Newton の運動方程式は、3つの空間成分をもつベクトル形式の式で、

$$m \frac{dv^i}{dt} = F^i \quad \text{あるいは} \quad \frac{dp^i}{dt} = F^i \quad (2.26)$$

の形である。これを4元速度や4元運動量に置き換えた

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} = F^\mu \quad \text{あるいは} \quad \frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu \quad (2.27)$$

と拡張することで、Lorentz 不変な運動方程式が与えられる。ただし、4元力 (four-force) の  $F^0$  成分は、 $u^\mu$  と  $F^\mu$  が直交する条件から定められるものとする。

ここで、 $p^0, F^0$  の意味を考えてみよう。 $p^\mu = (p^0, p^i)$  の空間成分  $p^i$  は Newton 力学での運動量である。 $F^\mu = (F^0, F^i)$  の空間成分  $F^i$  は Newton 力学での力である (式 (2.26))。いま、

$$\frac{d}{dt}(cp^0) = cF^0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = F^1 v^1 + F^2 v^2 + F^3 v^3 \quad (2.28)$$

となり、右辺は力  $F^i$  が単位時間に質点に与える仕事の意味をもつ。したがって、 $cp^0$  はエネルギーの意味を持つことになる。すなわち、

$$cp^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad \text{質点のエネルギー } E \quad (2.29)$$

$$p^i = \frac{mv^i}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad \text{質点の運動量 } \mathbf{p} \quad (2.30)$$

と解釈することができる。

# 相対論的運動方程式からエネルギー公式へ

$$cp^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad \text{質点のエネルギー } E \quad (2.29)$$

$$p^i = \frac{mv^i}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad \text{質点の運動量 } p \quad (2.30)$$

と解釈することができる。

(2.29) は,  $v = 0$  の場合でも質点はエネルギーを持つことを示す. エネルギー  $E$  を  $v/c$  で展開すると,

$$E = m \frac{c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \dots \quad (2.31)$$

となる. 第 2 項は運動エネルギーだが, 第 1 項は物体が静止しているときにも持つ質量エネルギーである. 第 3 項以下は相対論的補正項と言える.

法則 2.4 (静止質量エネルギー (エネルギーと質量の等価性))

**エネルギーは質量と等価である!**

$$E = mc^2 \quad (2.32)$$

**質量はエネルギーに変換できる!**

# 最も有名な物理の公式

$$E=mc^2$$



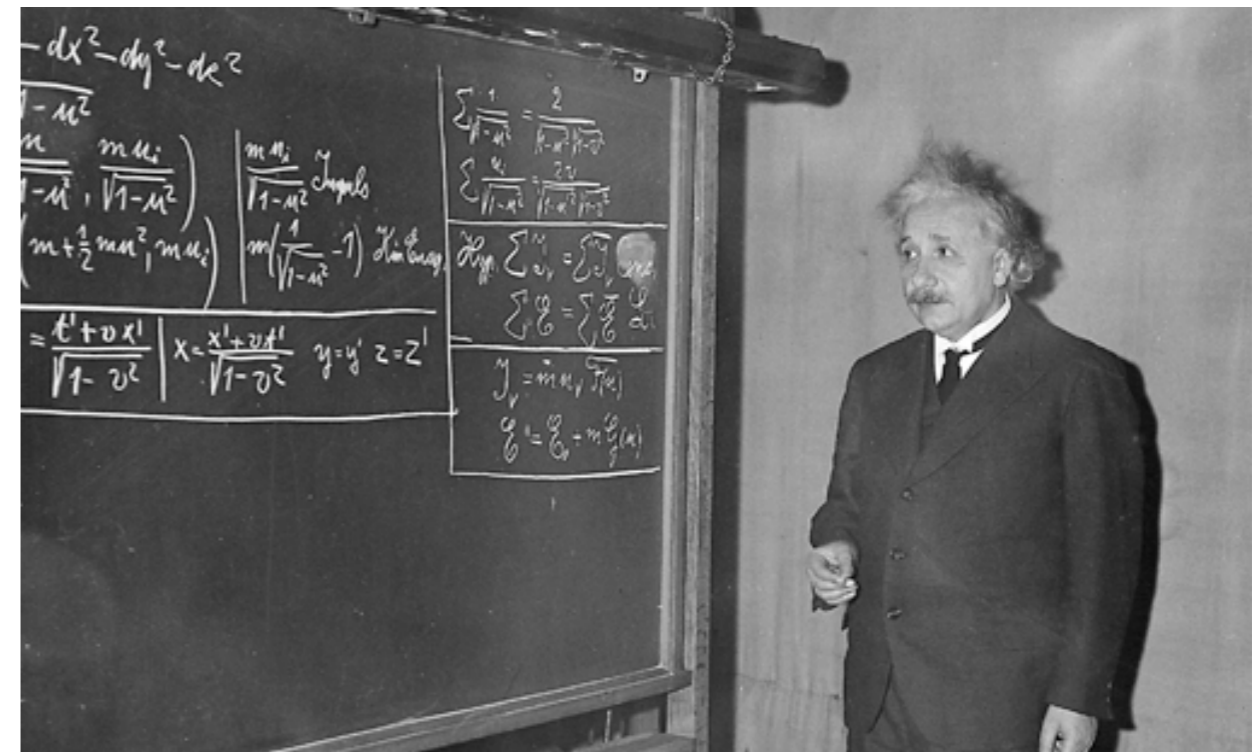
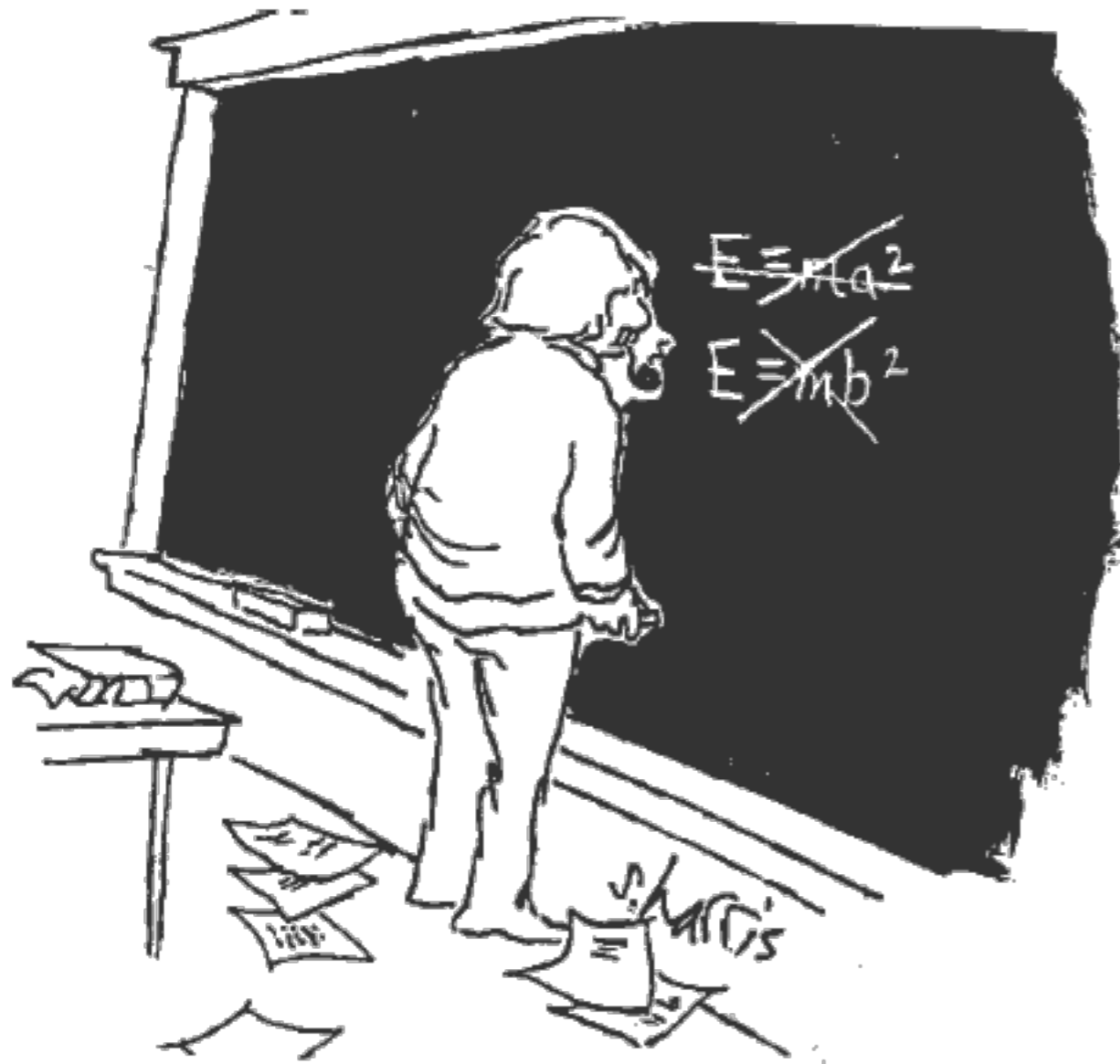
……本の中に数式を1つ入れるたびに、売れ行きは半減すると教えてくれた人がいる。そこで、数式はいっさい入れない決心をした。しかし、とうとう一つだけは入れることになってしまった。アインシュタインの有名な式

$$E = mc^2$$

である。この式が私の本の潜在的な読者をおびえさせ、半分に減らさないことを願っている。……

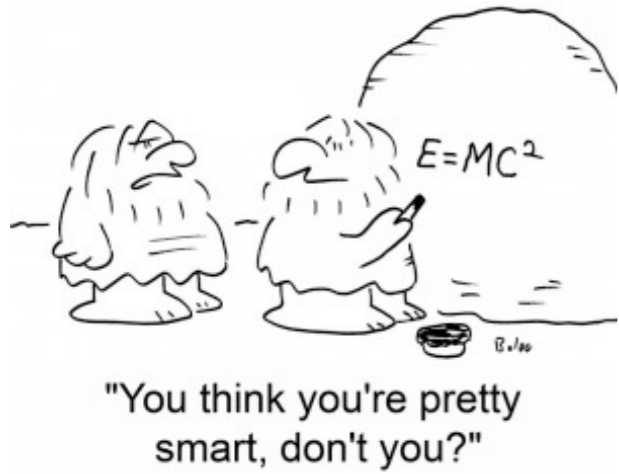
# 最も有名な物理の公式

$$E=mc^2$$

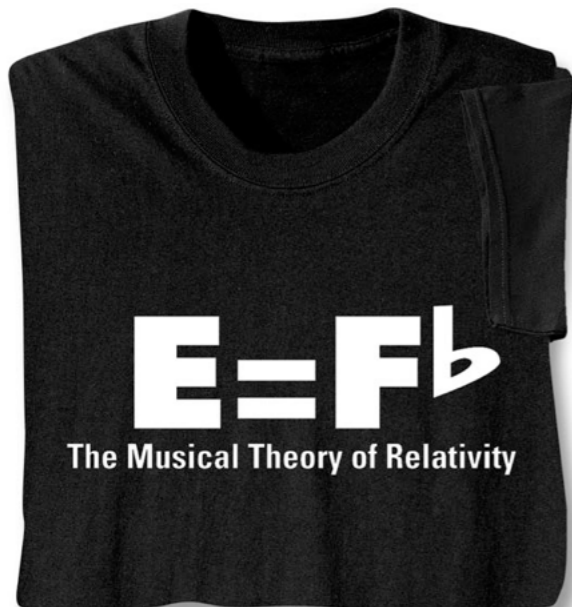


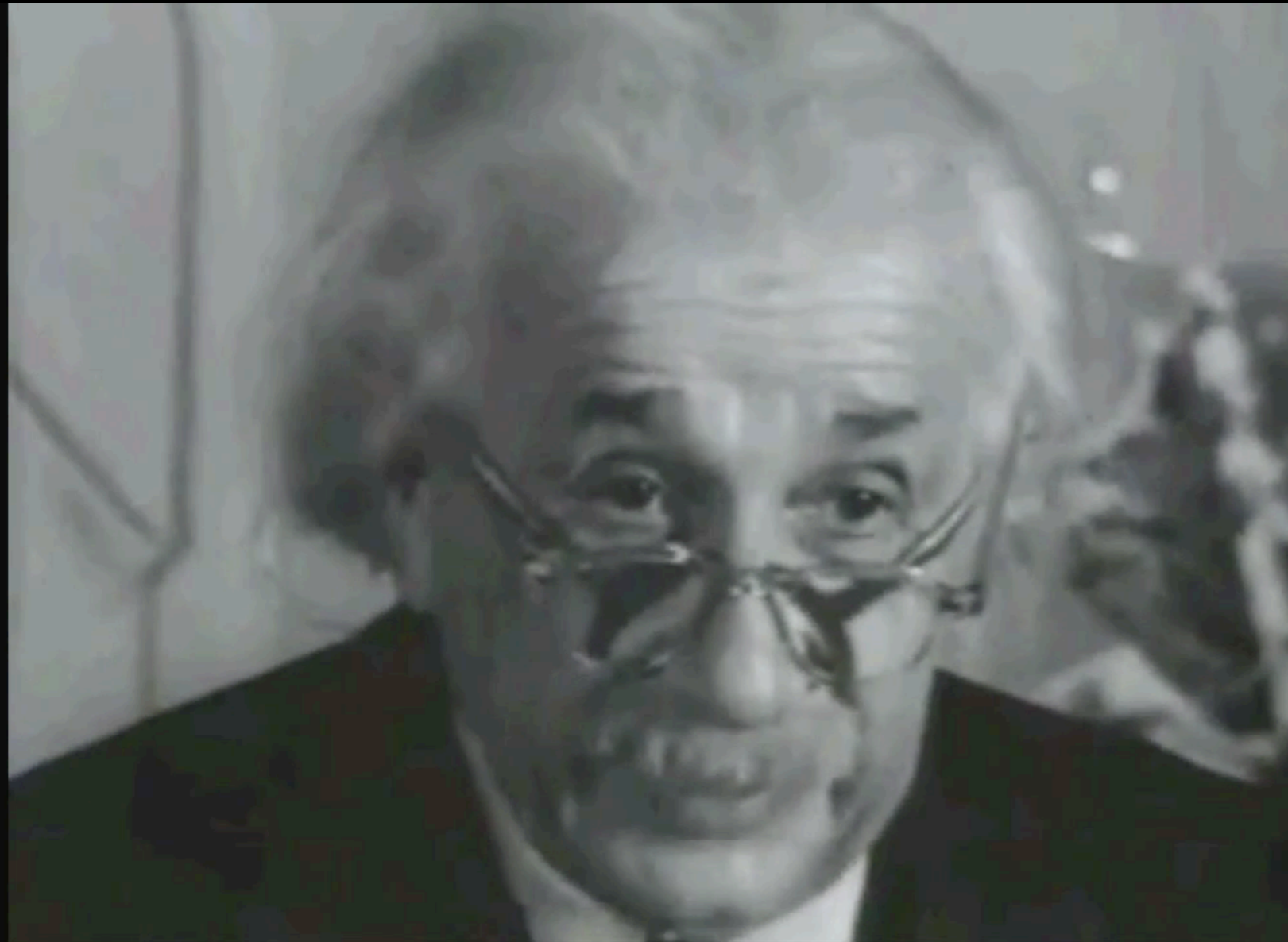
# 最も有名な物理の公式

$$E=mc^2$$



$$E = mc^2$$





## Einstein 自身による $E = mc^2$ の説明

It followed from the special theory of relativity that mass and energy are both but different manifestations of the same thing — a somewhat unfamiliar conception for the average mind.

Furthermore, the equation  $E = mc^2$ , in which energy is put equal to mass, multiplied by the square of the velocity of light, showed that very small amounts of mass may be converted into a very large amount of energy and vice versa.

The mass and energy were in fact equivalent, according to the formula mentioned before.

This was demonstrated by Cockcroft and Walton in 1932, experimentally.

# 相対性理論

アインシュタインはどこまで正しいのか

## 1. 序論

## 2. 特殊相対性理論

時間の進み方は観測者によって異なる

$E=mc^2$ , 原子核反応, 星の一生

干渉計

GPS

## 3. 一般相対性理論

時間の進み方は重力によって異なる

ブラックホール, 重力波

光格子時計

真貝寿明 (しんかい ひさあき)

大阪工業大学 情報科学部 教授

武庫川女子大学 非常勤講師

理化学研究所 客員研究員



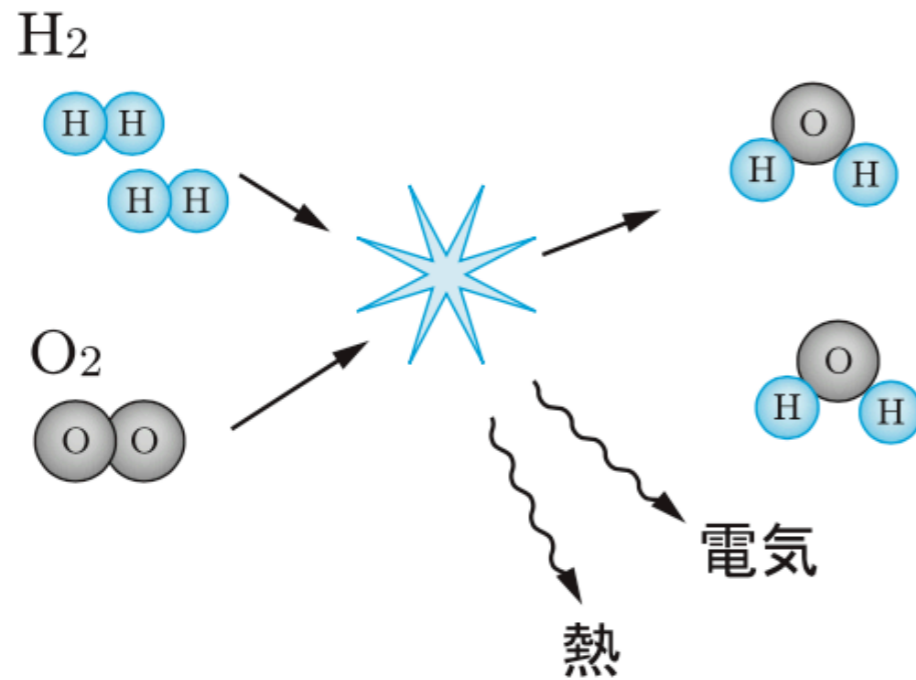
<http://www.oit.ac.jp/is/shinkai/>



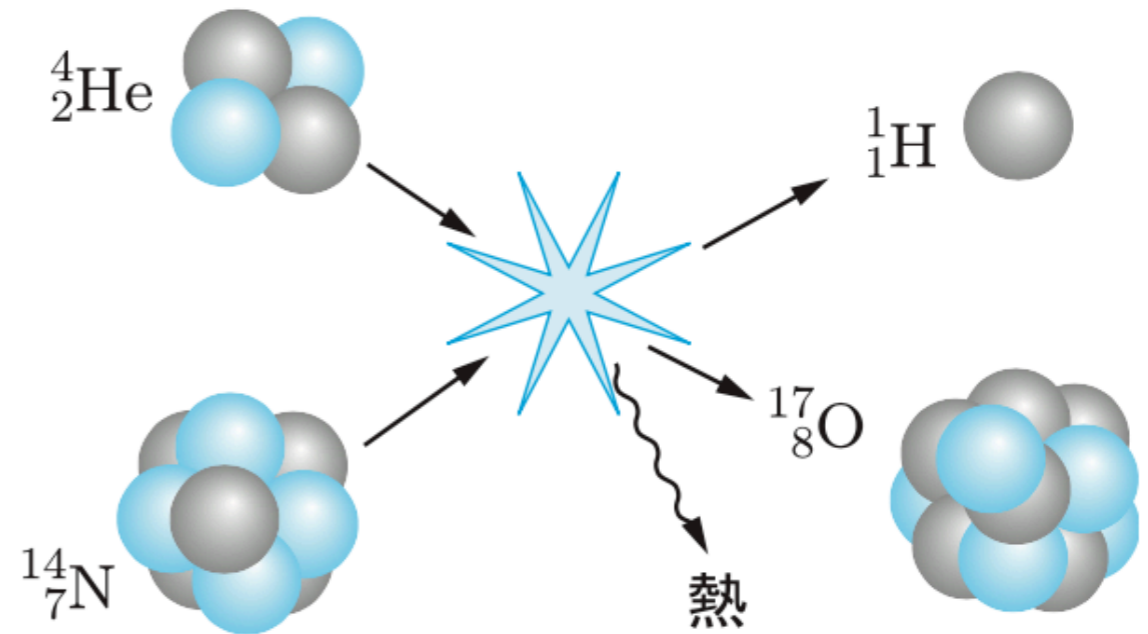
# 原子核反応

分子どうしの組み替えは、**化学反応**

原子核の組み替えは、**核反応**



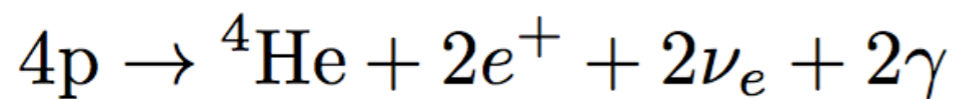
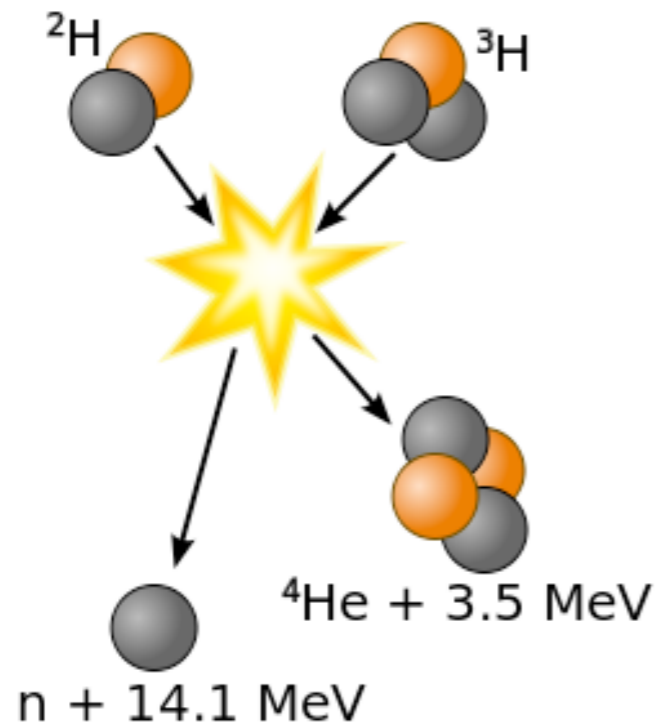
(a) 化学反応



(b) 核反応

図 3.14: 化学反応は実験室レベル. 核反応は, 原子爆弾や水素爆弾, 原子力発電や太陽の中心. エネルギーレベルがまったく異なる.

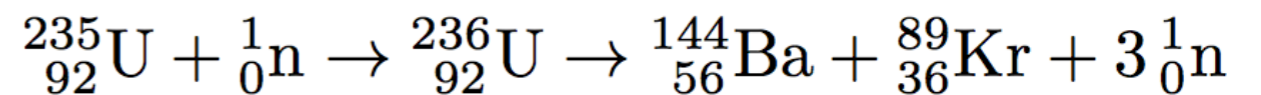
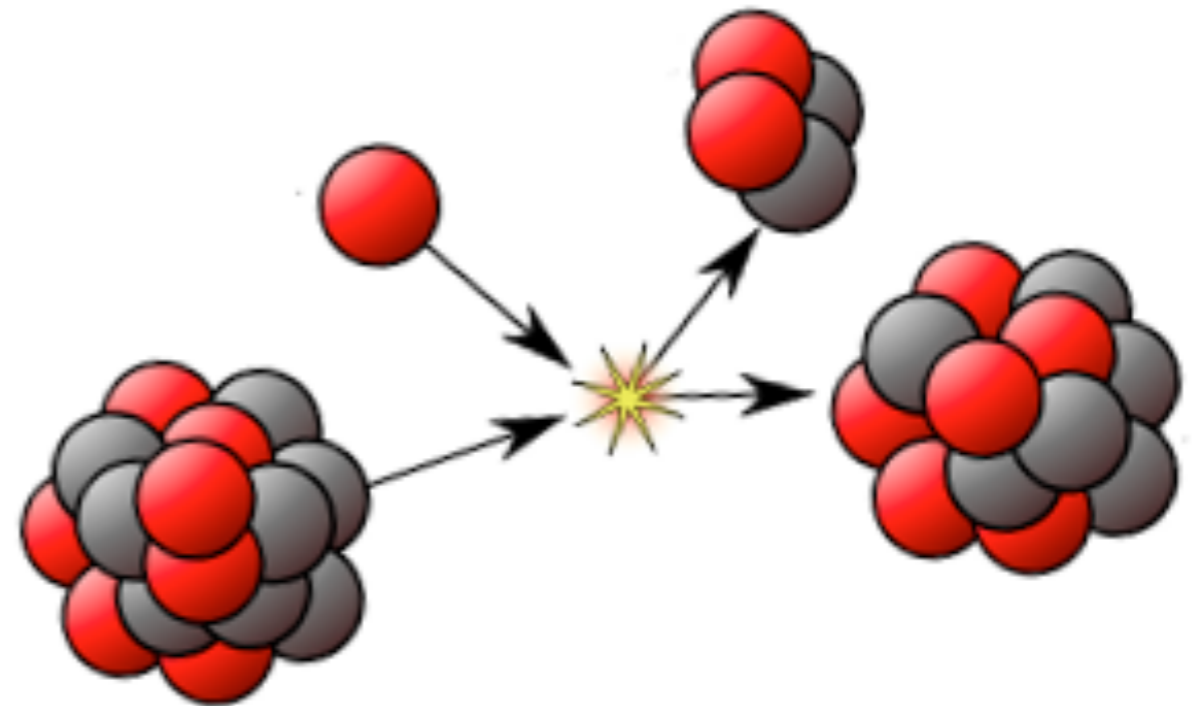
# 核融合 と 核分裂



## 核融合

(nuclear fusion)

合体した方が安定  
(エネルギー放出)

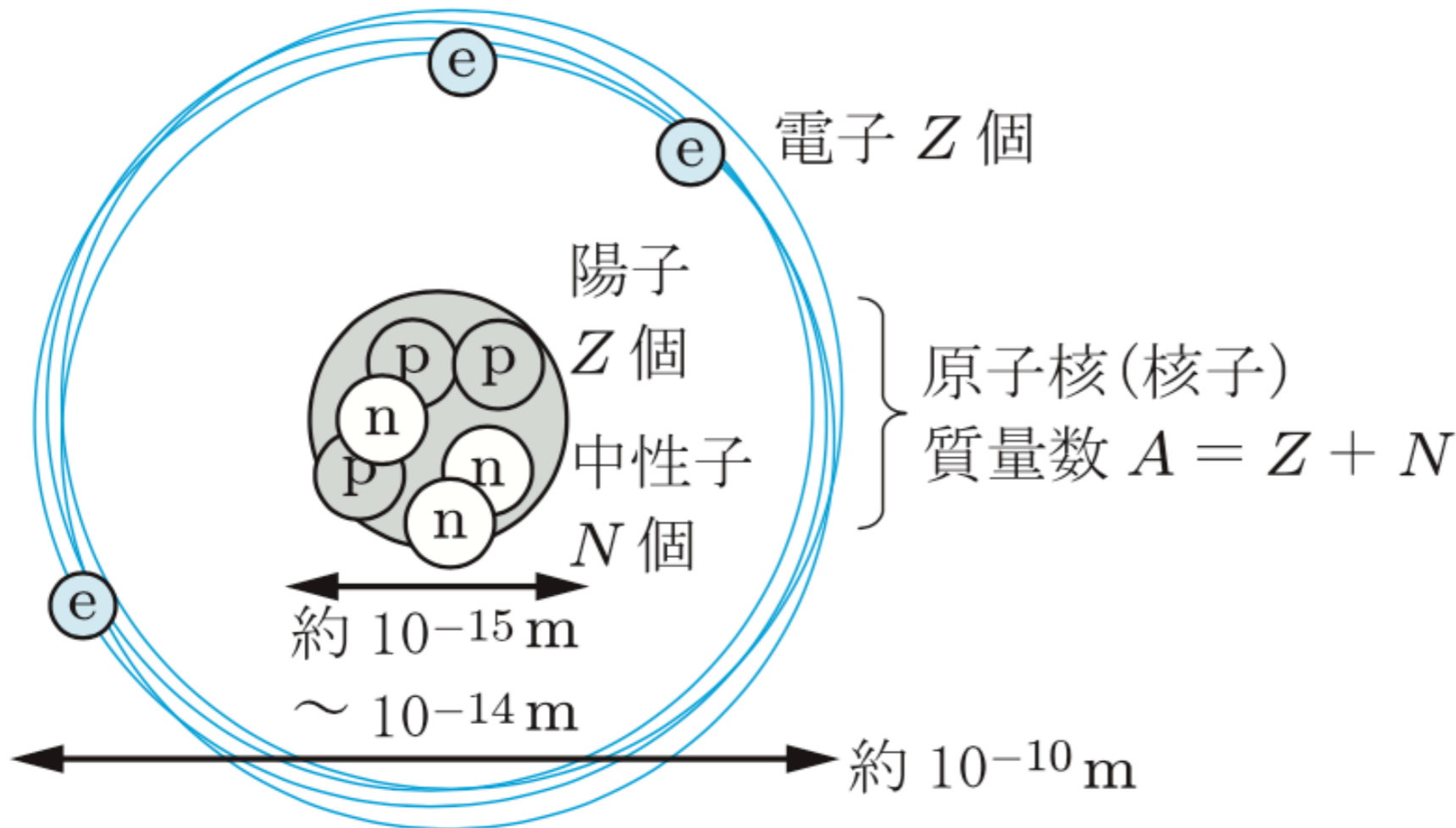


## 核分裂

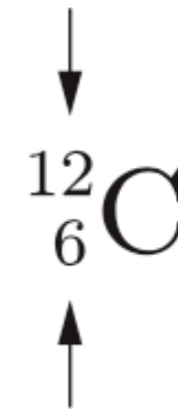
(nuclear fission)

分裂した方が安定  
(エネルギー放出)

# 原子・原子核



質量数  $A$   
(核子の数)



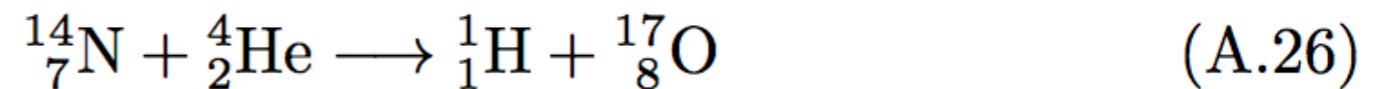
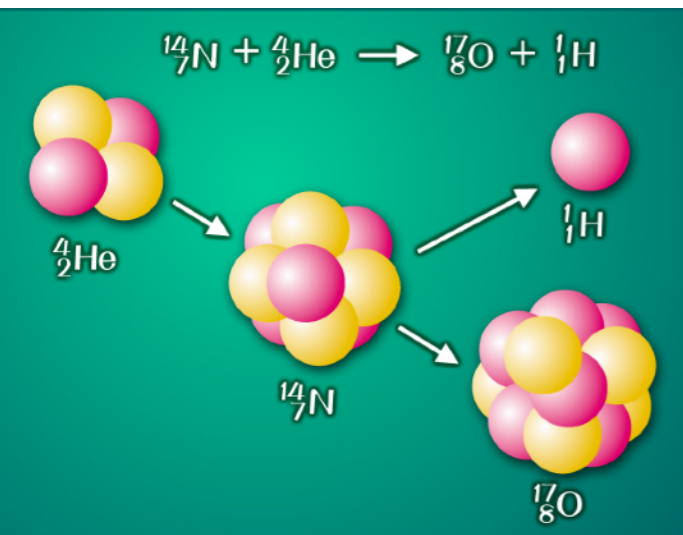
原子番号  $Z$   
(陽子の数)

	記号	電荷	質量	質量比
陽子	p proton	+1	$1.67262158 \times 10^{-27} \text{ kg}$	1836.15
中性子	n neutron	0	$1.67492735 \times 10^{-27} \text{ kg}$	1838.68
電子	e electron	-1	$9.10938188 \times 10^{-31} \text{ kg}$	1

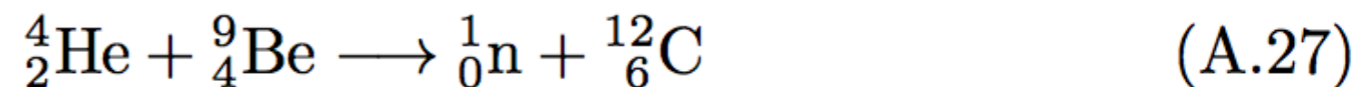
# 質量欠損

## ● 質量欠損

原子核を人工的に変換できることは、1919年、ラザフォードによって確かめられた。彼は、窒素の原子核に $\alpha$ 粒子（ヘリウム原子核）を衝突させて、



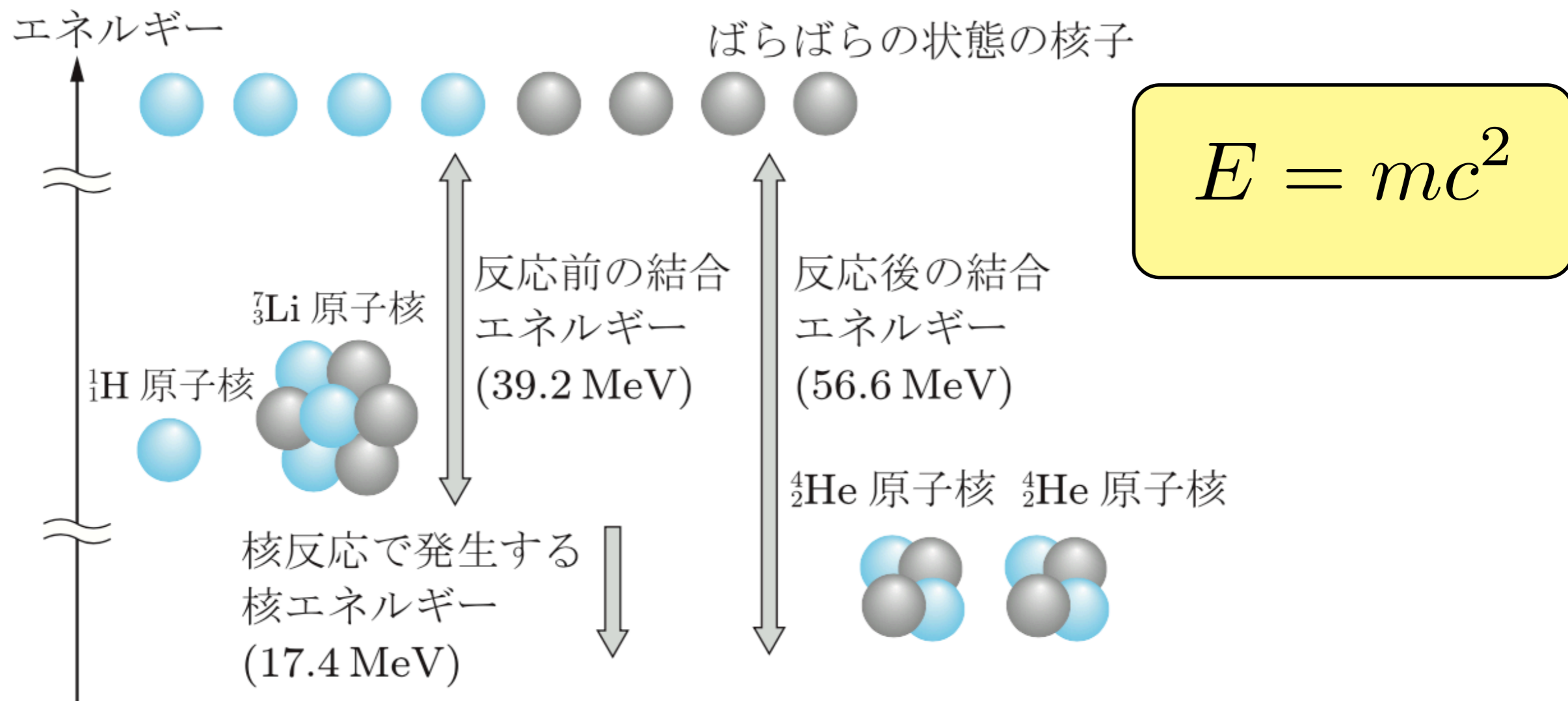
の反応を検出した。中性子をはじめて発見したのは、チャドウィックで



の核反応からである（1932年）。

このような核反応が生じる原因は、原子核の結合エネルギーの差にある。原子核は、陽子と中性子が結合することによって、個々に存在するよりも質量エネルギー（ $E = mc^2$ ）の和が小さくてすむ。これを質量欠損と呼ぶ。

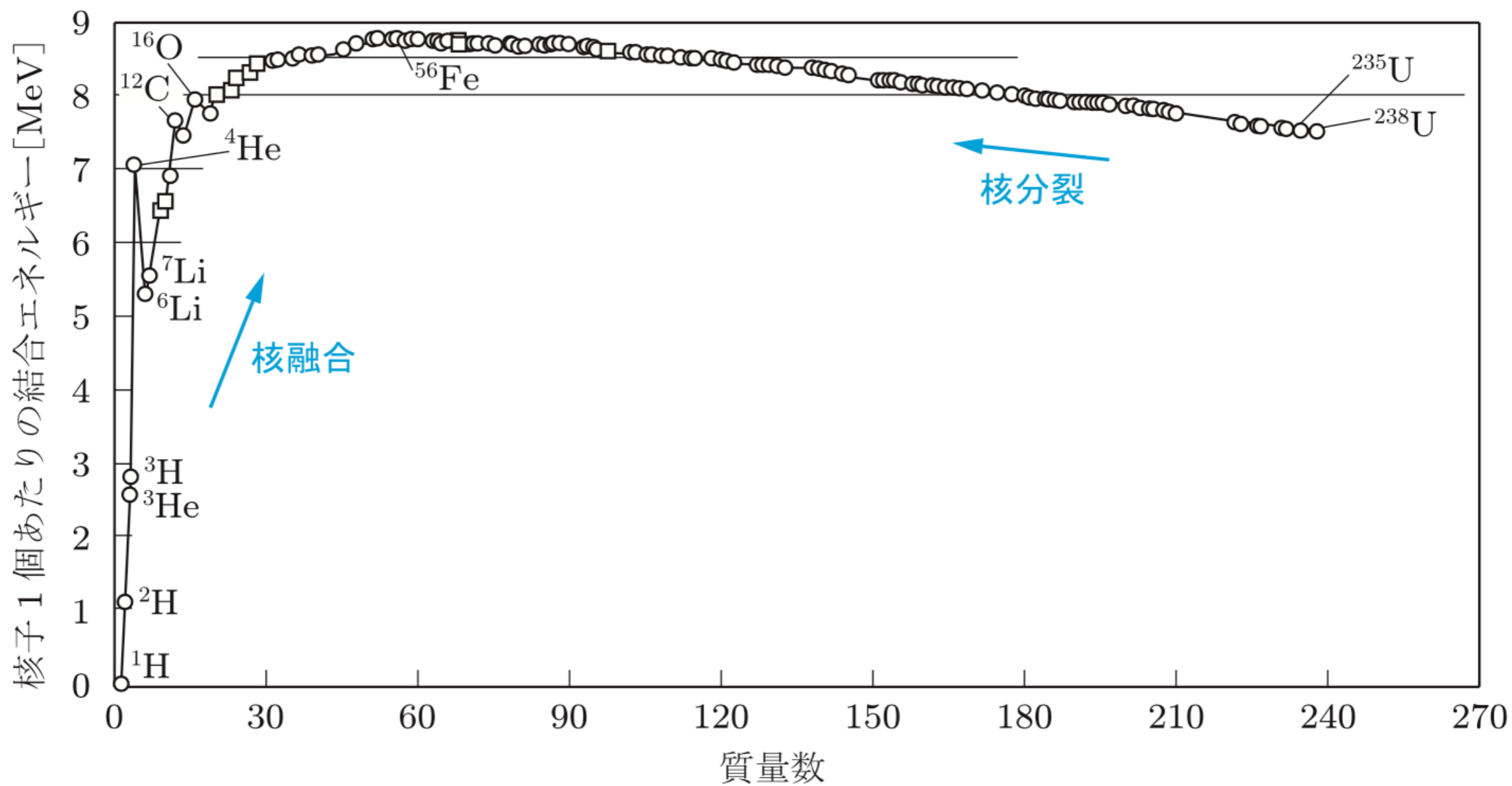
# 結合エネルギー



ばらばらでいるより、結合している方が、エネルギーが低い

# 核融合も核分裂もおきる理由は何か？

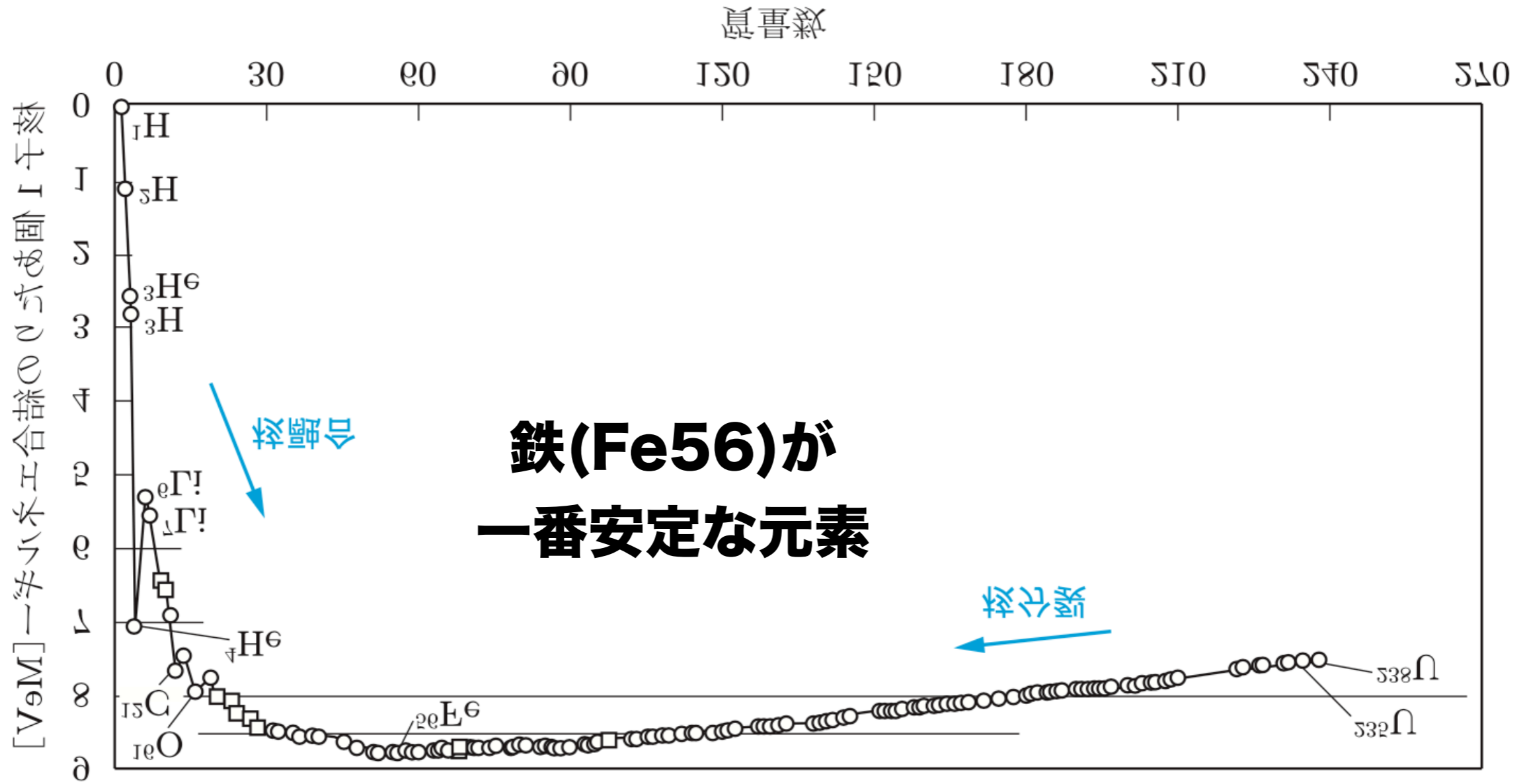
↑ ↑  
結合エネルギー (大)



→ → 質量数 (大)

# 核融合も核分裂もどちらもおきる理由は何か？

結合エネルギー (大)



→ → 質量数 (大)

# 周期表 (periodic table)

Period	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
	1A	2A											III A	IV A	V A	VI A	VII A	VIII A	
1	1s 1 <b>H</b> 水素 hydrogen 1.008																	2 <b>He</b> ヘリウム helium 4.003	
2	2s 3 <b>Li</b> リチウム lithium 6.941	4 <b>Be</b> ベリリウム beryllium 9.012											5 <b>B</b> ホウ素 boron 10.81	6 <b>C</b> 炭素 carbon 12.01	7 <b>N</b> 窒素 nitrogen 14.01	8 <b>O</b> 酸素 oxygen 16.00	9 <b>F</b> フッ素 fluorine 19.00	10 <b>Ne</b> ネオン neon 20.18	
3	3s 11 <b>Na</b> ナトリウム sodium 22.99	12 <b>Mg</b> マグネシウム magnesium 24.31											13 <b>Al</b> アルミニウム aluminum 26.98	14 <b>Si</b> ケイ素 silicon 28.09	15 <b>P</b> リン phosphorus 30.97	16 <b>S</b> 硫黄 sulfur 32.07	17 <b>Cl</b> 塩素 chlorine 35.45	18 <b>Ar</b> アルゴン argon 39.95	
4	4s 19 <b>K</b> カリウム potassium 39.10	20 <b>Ca</b> カルシウム calcium 40.08	21 <b>Sc</b> スカンジウム scandium 44.96	22 <b>Ti</b> チタン titanium 47.87	23 <b>V</b> バナジウム vanadium 50.94	24 <b>Cr</b> クロム chromium 52.00	25 <b>Mn</b> マンガン manganese 54.94	26 <b>Fe</b> 鉄 iron 55.85	27 <b>Co</b> コバルト cobalt 58.93	28 <b>Ni</b> ニッケル nickel 58.69	29 <b>Cu</b> 銅 copper 63.55	30 <b>Zn</b> 亜鉛 zinc 65.41		31 <b>Ga</b> ガリウム gallium 69.72	32 <b>Ge</b> ゲルマニウム germanium 72.64	33 <b>As</b> ヒ素 arsenic 74.92	34 <b>Se</b> セレン selenium 78.96	35 <b>Br</b> 臭素 bromine 79.90	36 <b>Kr</b> クリプトン krypton 83.80
5	5s 37 <b>Rb</b> ルビジウム rubidium 85.47	38 <b>Sr</b> ストロンチウム strontium 87.62	39 <b>Y</b> イットリウム yttrium 88.91	40 <b>Zr</b> ジルコニウム zirconium 91.22	41 <b>Nb</b> ニオブ niobium 92.91	42 <b>Mo</b> モリブデン molybdenum 95.94	43 <b>Tc</b> テクネチウム technetium 98	44 <b>Ru</b> ルテニウム ruthenium 101.1	45 <b>Rh</b> ロジウム rhodium 102.9	46 <b>Pd</b> パラジウム palladium 106.4	47 <b>Ag</b> 銀 silver 107.9	48 <b>Cd</b> カドミウム cadmium 112.4		49 <b>In</b> インジウム indium 114.8	50 <b>Sn</b> スズ tin 118.7	51 <b>Sb</b> アンチモン antimony 121.8	52 <b>Te</b> テルル tellurium 127.6	53 <b>I</b> ヨウ素 iodine 126.9	54 <b>Xe</b> キセノン xenon 131.3
6	6s 55 <b>Cs</b> セシウム cesium 132.9	56 <b>Ba</b> バリウム barium 137.3	† 5d 57-71 ランタノイド lanthanides	72 <b>Hf</b> ハフニウム hafnium 178.5	73 <b>Ta</b> タンタル tantalum 180.9	74 <b>W</b> タングステン tungsten 183.8	75 <b>Re</b> レニウム rhenium 186.2	76 <b>Os</b> オスmium osmium 190.2	77 <b>Ir</b> イリジウム iridium 192.2	78 <b>Pt</b> 白金 platinum 195.1	79 <b>Au</b> 金 gold 197.0	80 <b>Hg</b> 水銀 mercury 200.6		81 <b>Tl</b> タリウム thallium 204.4	82 <b>Pb</b> 鉛 lead 207.2	83 <b>Bi</b> ビスマス bismuth 209.0	84 <b>Po</b> ポロニウム polonium 209	85 <b>At</b> アスタチン astatine 210	86 <b>Rn</b> ラドン radon 222
7	7s 87 <b>Fr</b> フランシウム francium 223	88 <b>Ra</b> ラジウム radium 226	‡ 6d 89-103 アクチノイド actinides	104 <b>Rf</b> ラザホージウム rutherfordium 261	105 <b>Db</b> ドブニウム dubnium 262	106 <b>Sg</b> シーボーギウム seaborgium 266	107 <b>Bh</b> ボーリウム bohrium 264	108 <b>Hs</b> ハッシウム hassium 277	109 <b>Mt</b> マイトネリウム meitnerium 268	110 <b>Ds</b> ダームスタチウム darmstadtium 281	111 <b>Rg</b> レントゲニウム roentgenium 272	112 <b>Cn</b> コペルニシウム copernicium 285		113 <b>Nh</b> ニホニウム nihonium 284	114 <b>Fl</b> フレロビウム flerovium 289	115 <b>Mc</b> モスコビウム moscovium 288	116 <b>Lv</b> リバモリウム livermorium 292	117 <b>Ts</b> テネシン tennessine 293	118 <b>Og</b> オガネソン oganesson 294

原子番号 → 29 ← 通常できるイオンの価数  
 元素記号 → Cu ← 元素記号が灰色のものは人工合成された元素  
 元素名(日本語) → 銅  
 元素名(英語) → copper  
 ← 原子量  
 63.55

常温で気体  
 単体は半導体  
 常温で液体  
 単体は強磁性体  
 放射性同位体のみからなる元素

ランタノイド  
lanthanides  
(レアアース金属)  
rare earth metals




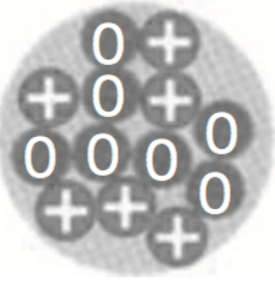
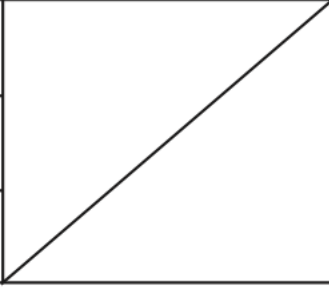
アクチノイド  
actinides

† 4f	57 <b>La</b> ランタン lanthanum 138.9	58 <b>Ce</b> セリウム cerium 140.1	59 <b>Pr</b> プラセオジウム praseodymium 140.9	60 <b>Nd</b> ネオジウム neodymium 144.2	61 <b>Pm</b> プロメチウム promethium 145	62 <b>Sm</b> サマリウム samarium 150.4	63 <b>Eu</b> ユロピウム europium 152.0	64 <b>Gd</b> ガドリニウム gadolinium 157.3	65 <b>Tb</b> テルビウム terbium 158.9	66 <b>Dy</b> ジスプロシウム dysprosium 162.5	67 <b>Ho</b> ホルミウム holmium 164.9	68 <b>Er</b> エルビウム erbium 167.3	69 <b>Tm</b> ツリウム thulium 168.9	70 <b>Yb</b> イットルビウム ytterbium 173.0	71 <b>Lu</b> ルテチウム lutetium 175.0
‡ 5f	89 <b>Ac</b> アクチニウム actinium 227	90 <b>Th</b> トリウム thorium 232.0	91 <b>Pa</b> プロトアクチニウム protactinium 231.0	92 <b>U</b> ウラン uranium 238.0	93 <b>Np</b> ネプツニウム neptunium 237	94 <b>Pu</b> プルトニウム plutonium 239	95 <b>Am</b> アメリシウム americium 243	96 <b>Cm</b> キュリウム curium 247	97 <b>Bk</b> バークリウム berkelium 247	98 <b>Cf</b> カリホルニウム californium 251	99 <b>Es</b> アインスタイニウム einsteinium 252	100 <b>Fm</b> フェルミウム fermium 257	101 <b>Md</b> メンデレビウム mendelevium 258	102 <b>No</b> ノーベリウム nobelium 259	103 <b>Lr</b> ローレンシウム lawrencium 262

↑ 非金属元素  
↓ 金属元素

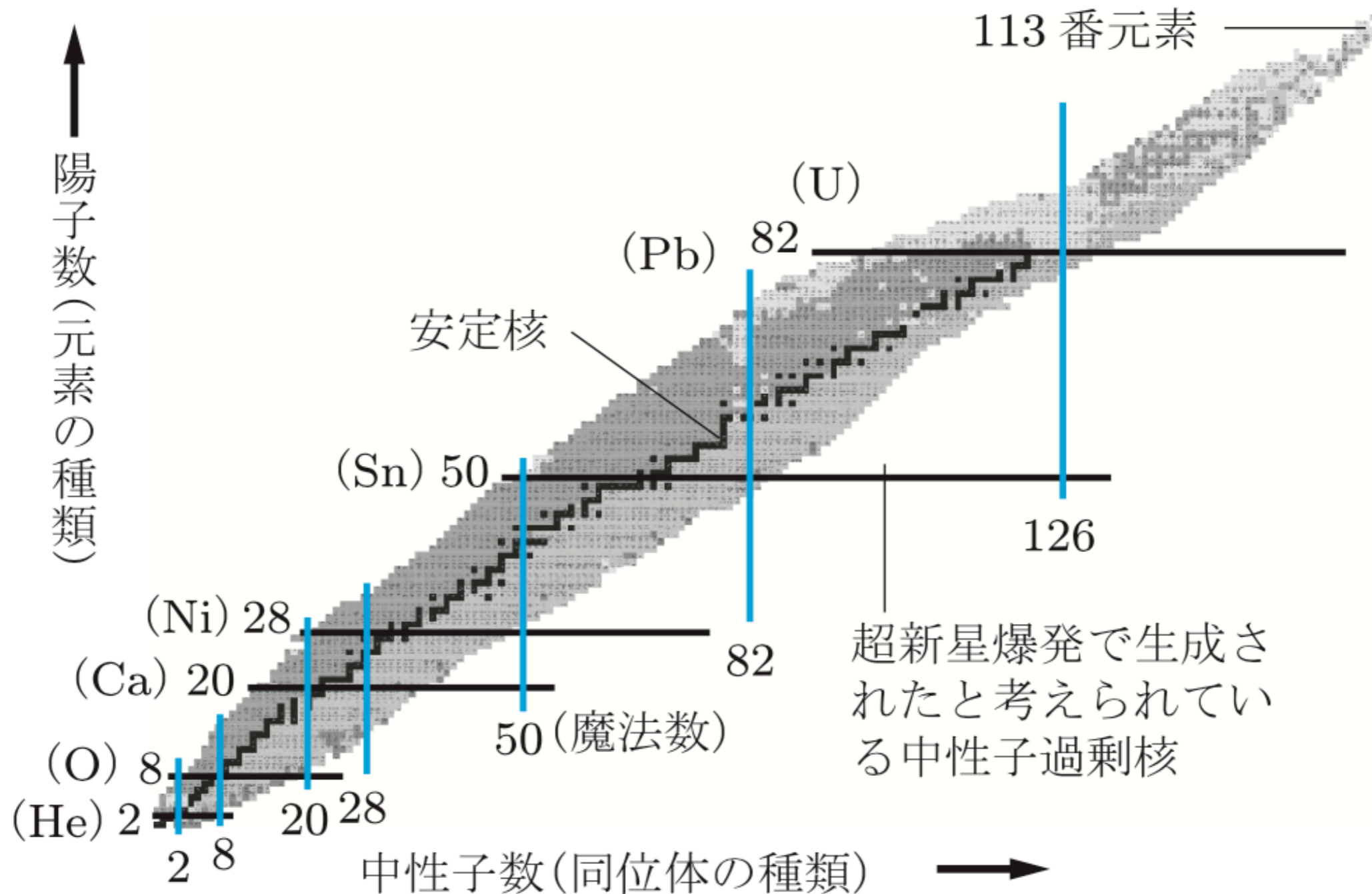


## ●自然界に存在する同位体の例

	名称	記号	模式図	陽子の数	中性子の数	質量 (u) <sup>†</sup>	存在比 (%)
水素	水素	${}^1_1\text{H}$		1	0	1.0078	99.9885
	重水素	${}^2_1\text{H}$ D			1	2.0141	0.0115
炭素	炭素 12	${}^{12}_6\text{C}$		6	6	12	98.93
	炭素 13	${}^{13}_6\text{C}$			7	13.0034	1.07
ウラン	ウラン 234	${}^{234}_{92}\text{U}$		92	142	234.0409	0.0054
	ウラン 235	${}^{235}_{92}\text{U}$			143	235.0439	0.7204
	ウラン 238	${}^{238}_{92}\text{U}$			146	238.0508	99.2742

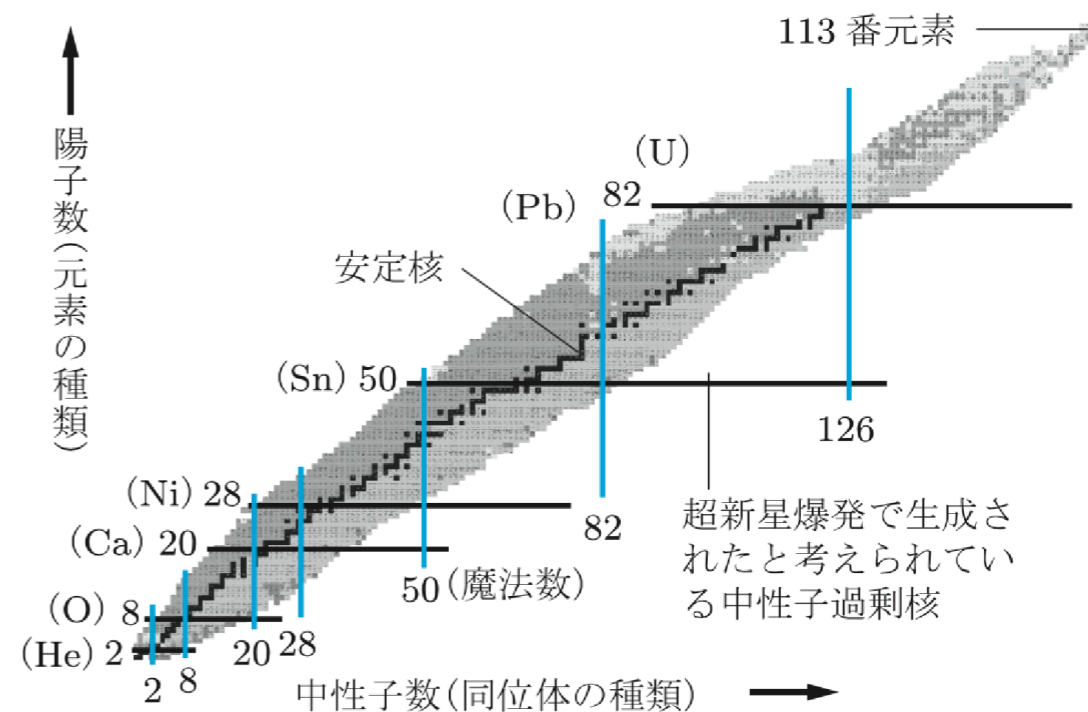
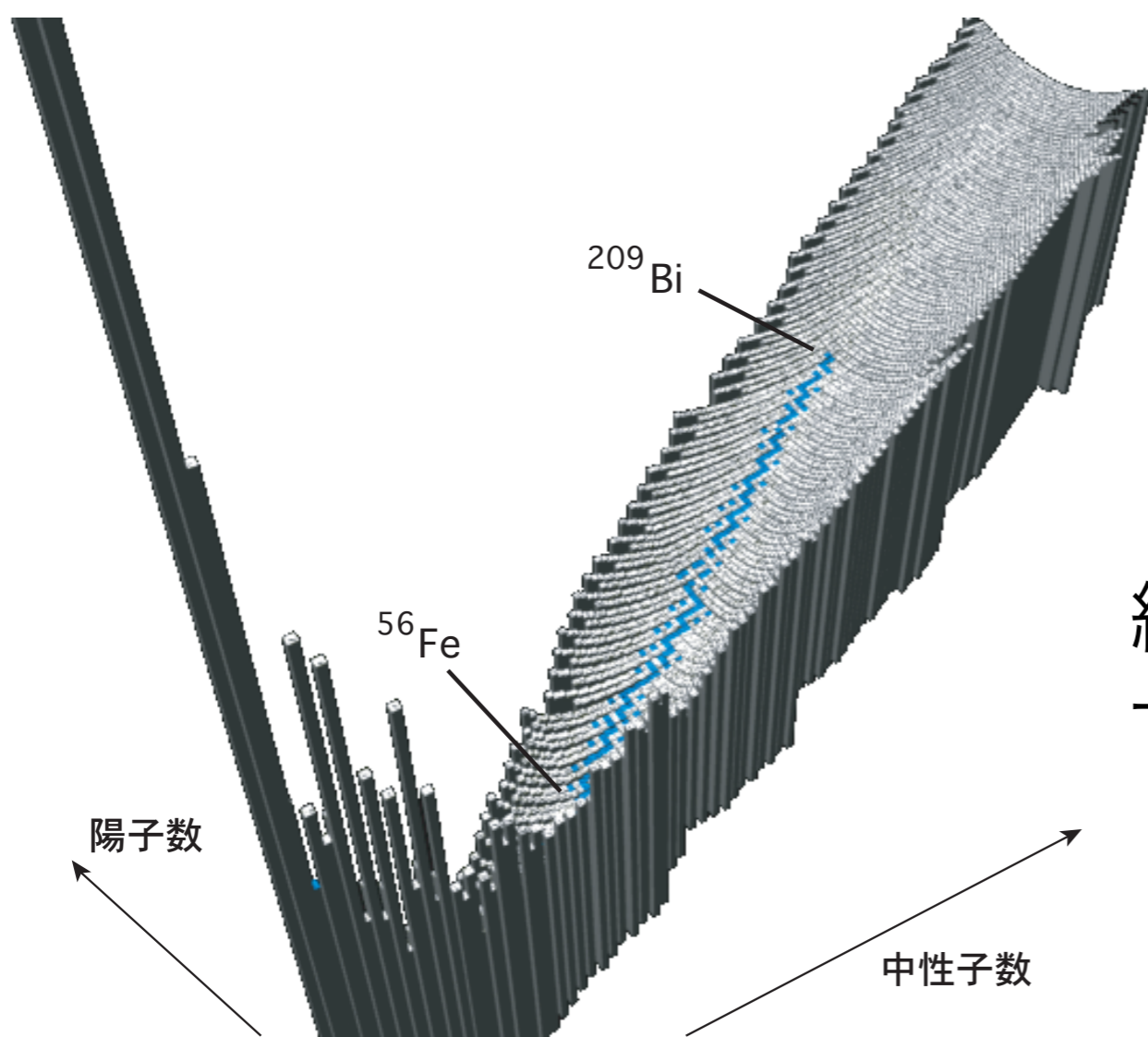
同位体の名称は、「炭素 12」のように「元素名 + 質量数」で表す。水素は例外的に、 ${}^2_1\text{H}$ （記号 D も用いる）を**重水素**という。また、**三重水素**（ ${}^3_1\text{H}$ または T）も発見されている。

# 核図表



# 核融合も核分裂もどちらもおきる理由は何か？

## 核図表



結合エネルギーの大きなモノが下になるように描いた核図表

# 相対性理論

アインシュタインはどこまで正しいのか

## 1. 序論

## 2. 特殊相対性理論

時間の進み方は観測者によって異なる

$E=mc^2$ , 原子核反応, 星の一生

干渉計

GPS

## 3. 一般相対性理論

時間の進み方は重力によって異なる

ブラックホール, 重力波

光格子時計

真貝寿明 (しんかい ひさあき)

大阪工業大学 情報科学部 教授

武庫川女子大学 非常勤講師

理化学研究所 客員研究員



<http://www.oit.ac.jp/is/shinkai/>

## コラム 18 酸素がない宇宙で太陽が燃えているのは何故？

太陽系の起源は約 50 億年前と考えられている。物理学がそろい始めた 19 世紀末、太陽のエネルギー源は何か、という大問題が解けずにいた。（当時、太陽の年齢は 3 億年以上ということしかわかっていなかったが）単純に化学反応で説明するには寿命が長すぎていたのだ。ケルビンとヘルムホルツ (von Helmholtz, H. L. F. 1821–94) は「太陽は大きな重力で収縮しているため、周囲に熱を放出する」という説を考えたが、それでも太陽年齢は 2000 万年以上にはならなかった。

決定的な理論となったのは、アインシュタインが 1905 年に提出した相対性理論による、 $E = mc^2$  という式である。この式から、1920 年、天文学者エディントン (Eddington, A. S. 1882–1944) は、太陽内部での水素からヘリウムへの核融合の可能性を指摘している。太陽が水素で満たされていることが 1925 年にわかり、1930 年代に物理学者チャンドラセカール (Chandrasekhar, S. 1910–95) とベータ (Bethe, H. 1906–2005) によって核融合の理論が進むと、太陽のエネルギー源が核融合反応であることがようやく明らかになる。

このコラムのタイトルにした疑問はよく科学館に寄せられる質問だそう。核融合反応は物理的な結合エネルギーの組み替えで発生している反応であり、化学的燃焼とは違うので酸素は不要なのである。

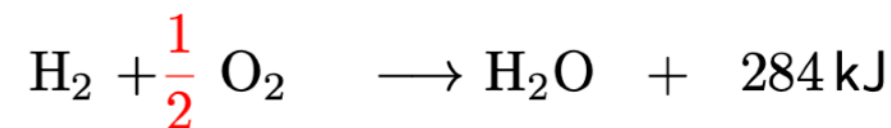
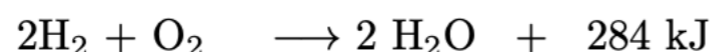
## 課題 2.10. 【太陽の寿命】

太陽のエネルギー源が核融合反応であることで太陽の寿命が計算できることを確かめよう。

- (1) 地球は太陽から  $R = 1.5 \times 10^8$  km 離れている。地球の位置で太陽から受けるエネルギーは、単位面積あたり単位時間あたり約  $1.37 \times 10^3$  J/s/m<sup>2</sup> である（太陽定数という）。太陽が1秒間に放射するエネルギーはいくらか。

まず、普通の化学反応で太陽の放射エネルギーを説明してみよう。

- (2) 水素が酸素と化合し水を生成するとき、すなわち

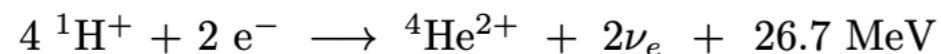


訂正

の反応では、水素 1 mol (2g) あたり、 $2.8 \times 10^5$  J の熱エネルギーが発生する。太陽が水素燃焼によって放射しているとすれば、1秒間あたり、どれだけの水素を消費するか。

- (3) 太陽の質量  $M_\odot$  は、 $M_\odot = 2.0 \times 10^{33}$  [g] で、そのうち、70% が水素である。太陽が水素燃焼によって放射しているとすれば、太陽は何年間輝いているか。

この計算をすると、あきらかに太陽の寿命は短い。そこで、太陽のエネルギー源が水素がヘリウムになる核融合反応であるとしよう。太陽の中心では、p-p チェインと呼ばれる連鎖的な核融合反応がおきている。p は陽子 (proton) のことで、何段階かある反応をまとめると、



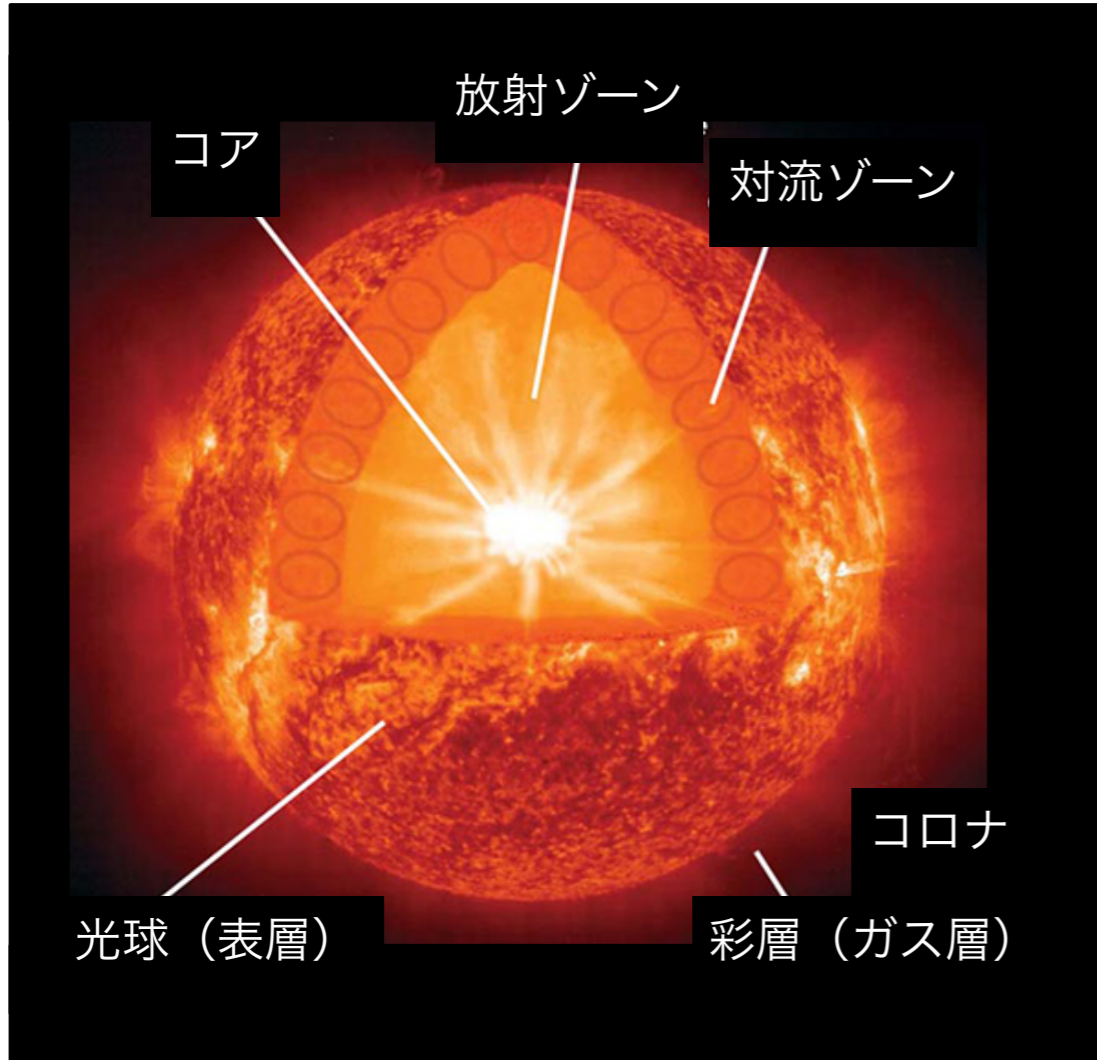
となる。すなわち、水素 1 g あたり、 $6.4 \times 10^{11}$  J のエネルギーを生み出すことができる。

- (4) 太陽の寿命はどれだけと考えられるか。



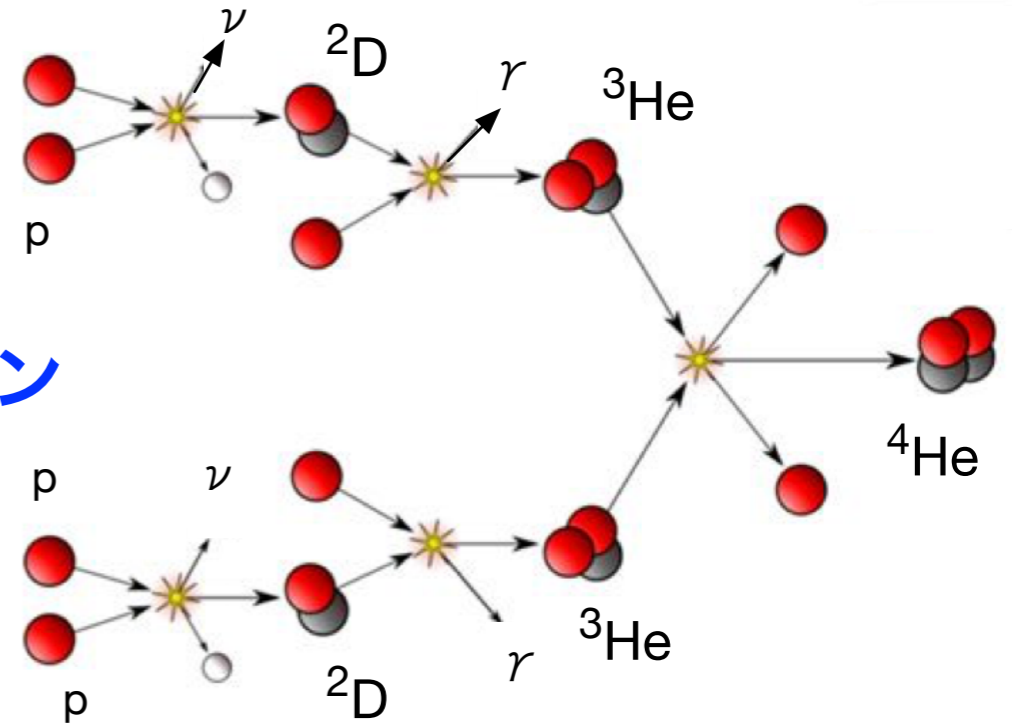
酸素はどこかにある、  
と仮定してください

# 星の一生

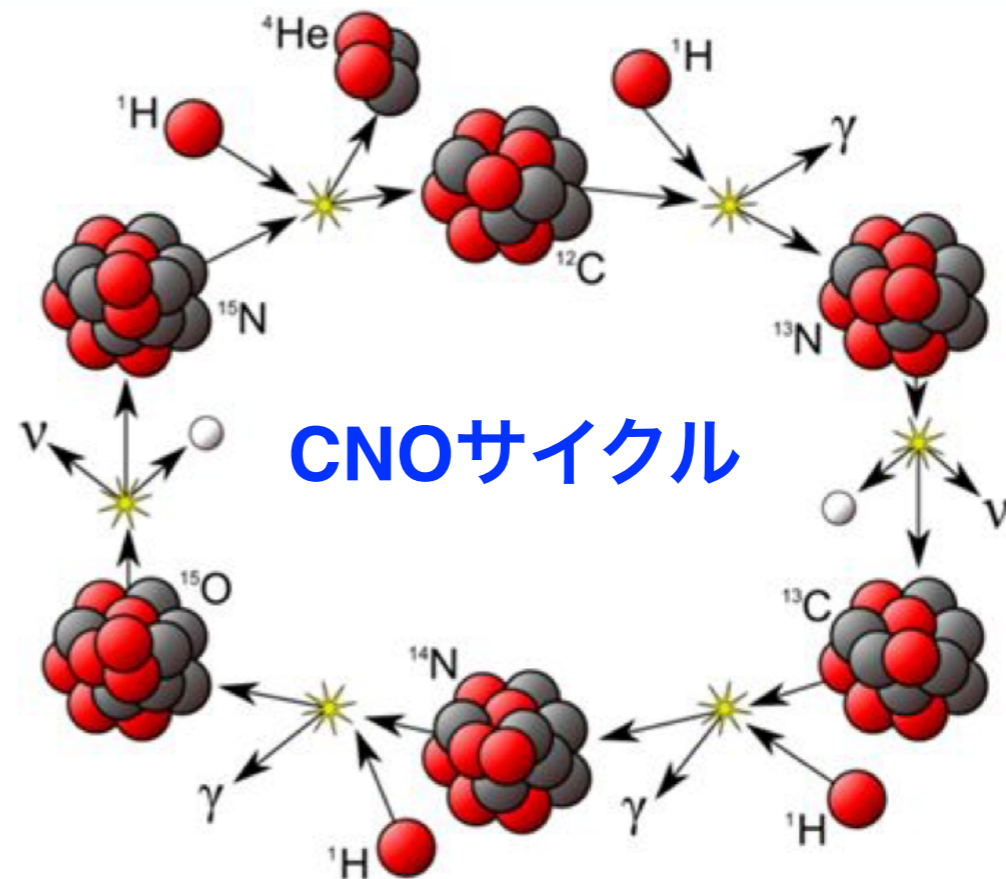


- 陽子 (proton)
- 中性子 (neutron)
- 陽電子 (positron)
- $\gamma$  ガンマ線
- $\nu$  ニュートリノ

## ppチェーン



## CNOサイクル



ブラックホールができるまで

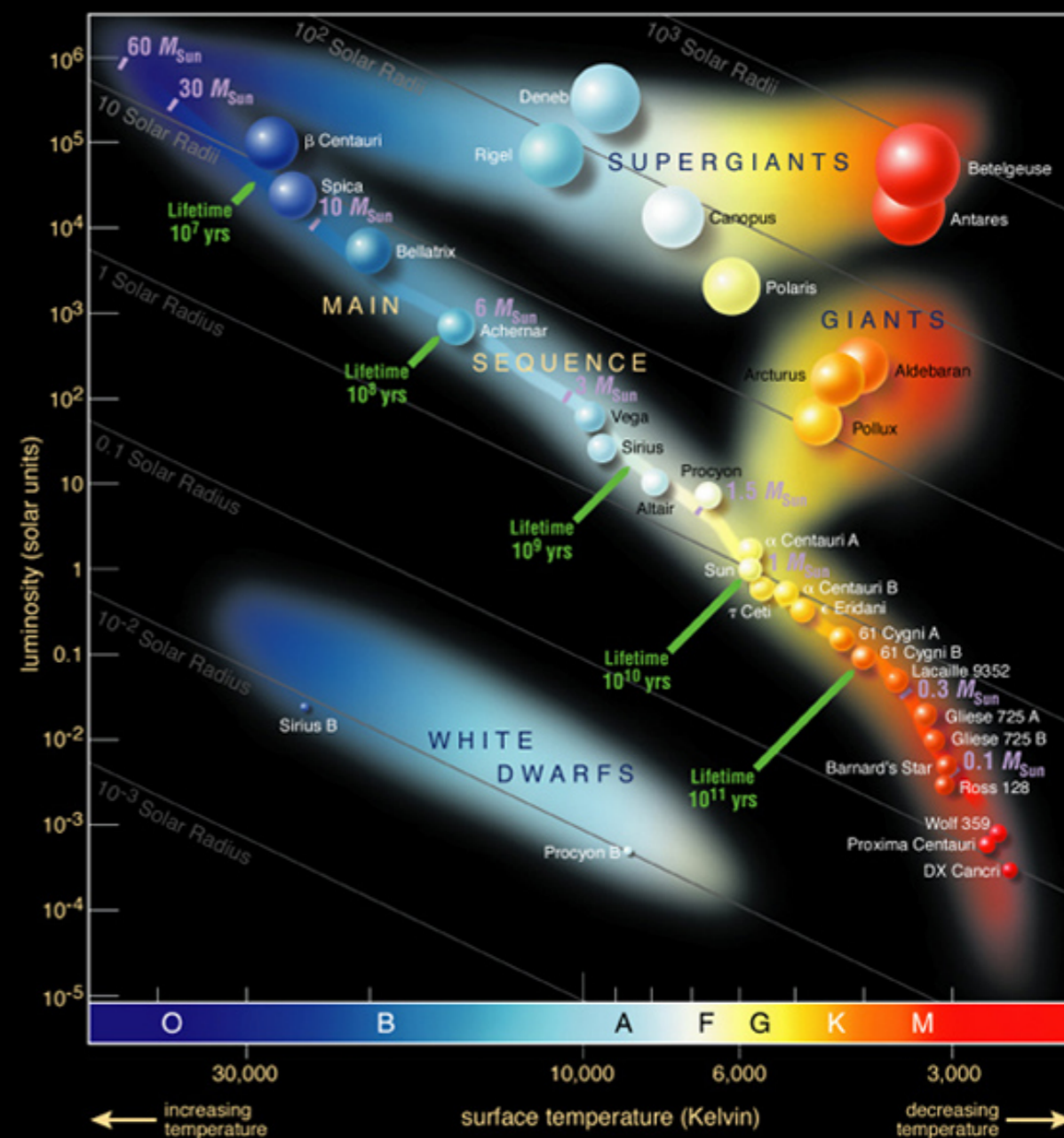
星は何を燃やしているのか？

燃え尽きた星はどうなるのか？

1920年代, 星の燃える理由が, 核融合による  
 $E=mc^2$  の式で説明できることがわかった.

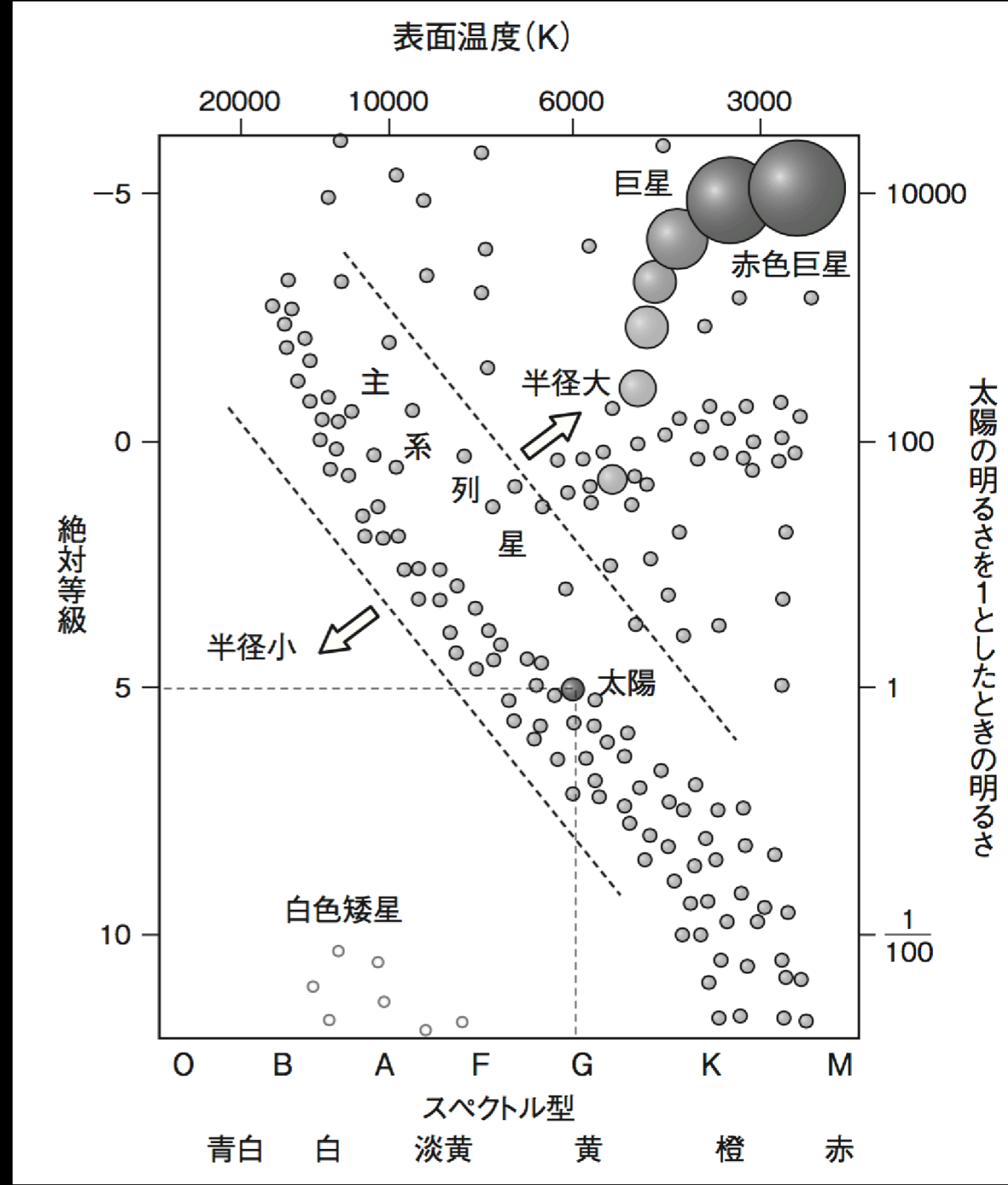
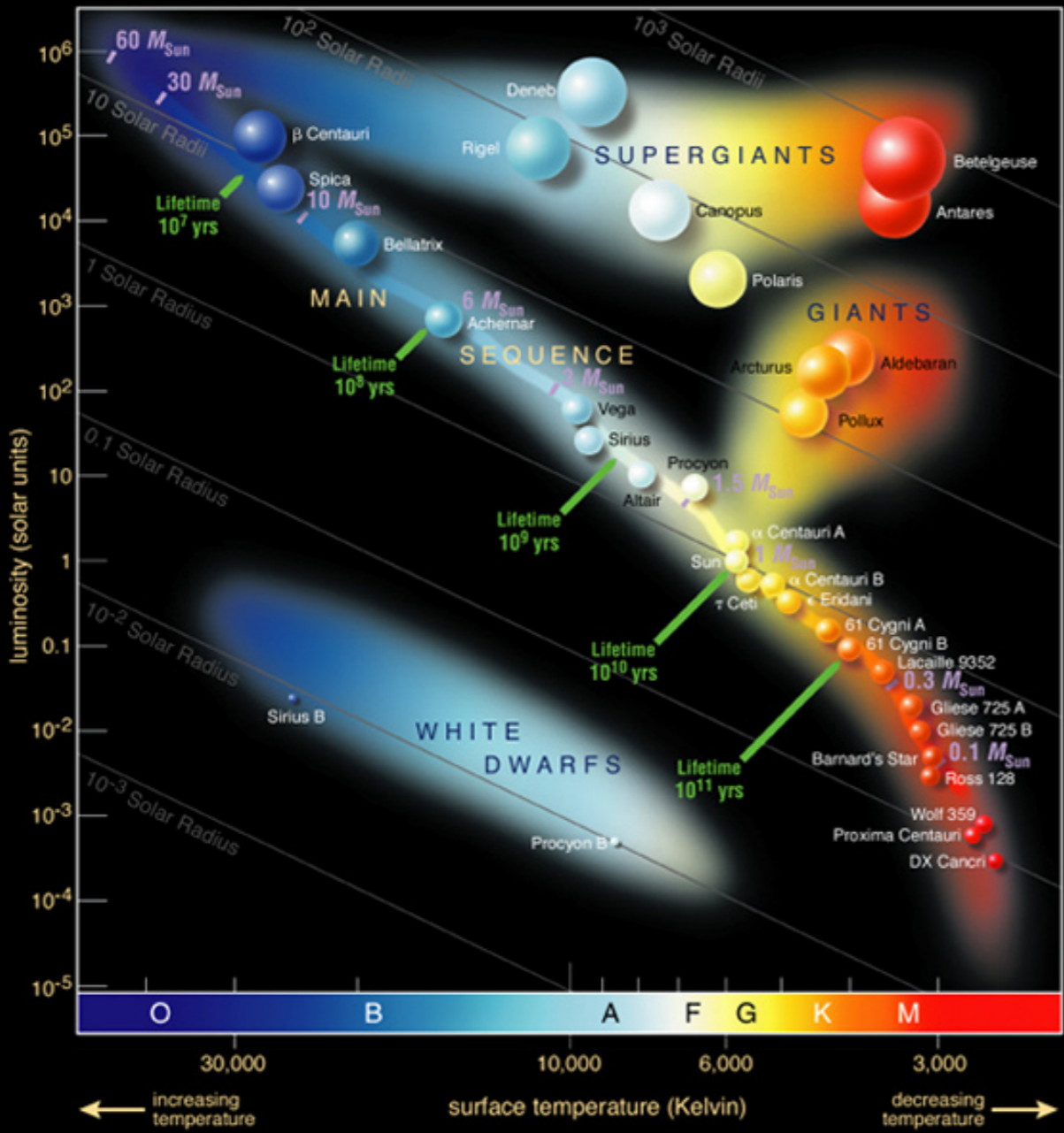
ヘルツシュプルング・ラッセル図で, 主系列な星が, 星の  
一生の経路と理解された.

暗い星「白色矮星white dwarf」  
が発見される. 燃え尽きた星が  
電子の縮退圧で支えられている  
星だと考えられた.



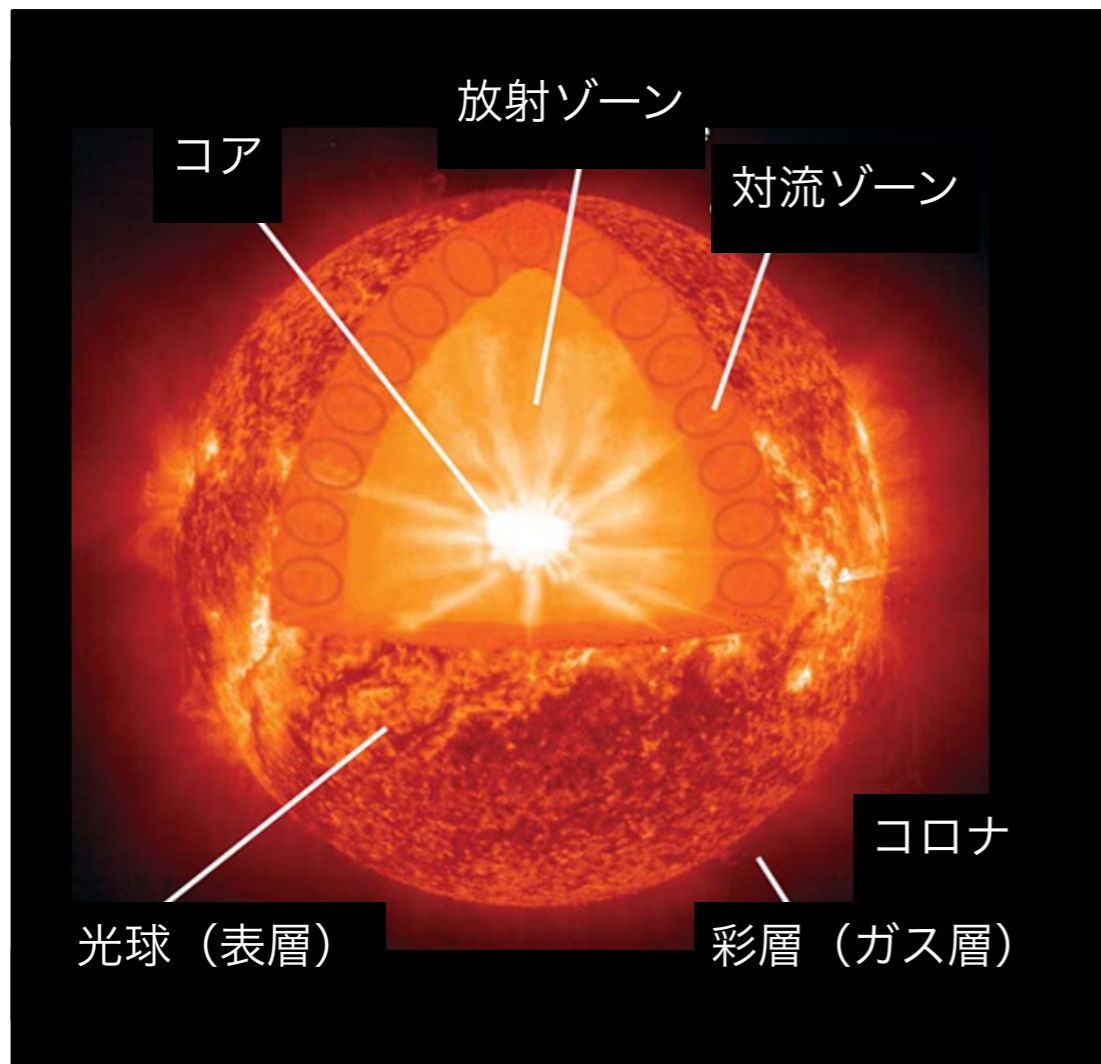


# ヘルツシュプルング・ラッセル図 (HR図)



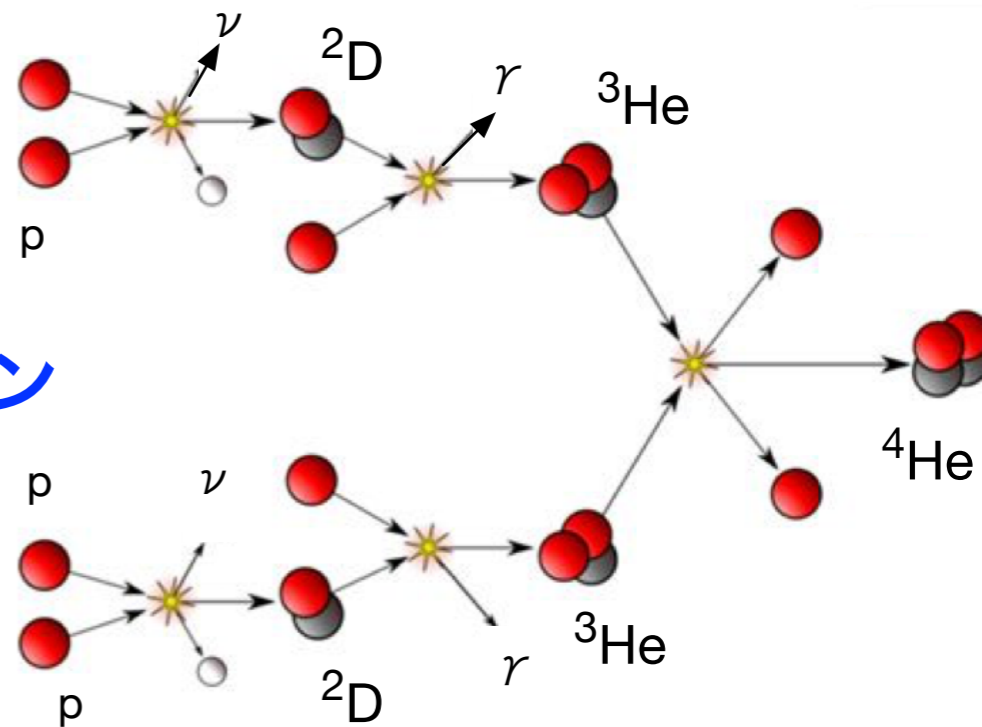
# 水素からヘリウムへ

# さらに重元素への核融合

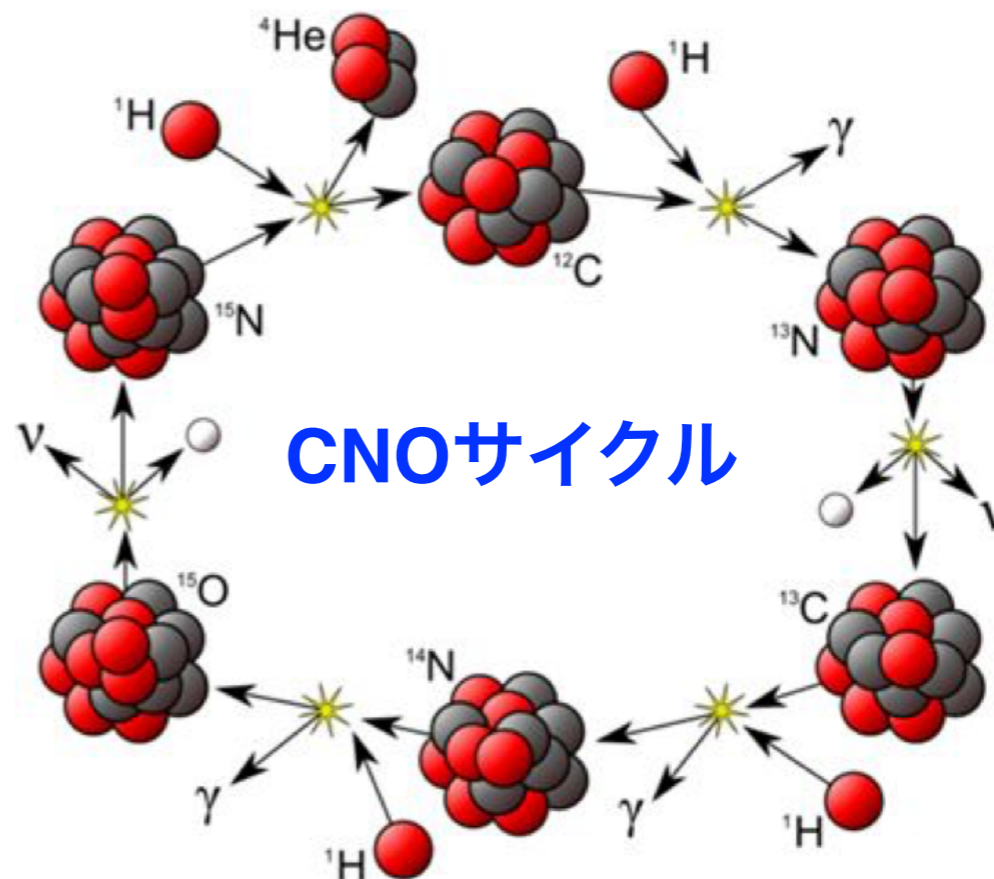


- 陽子(proton)
- 中性子(neutron)
- 陽電子(positron)
- $\gamma$  ガンマ線
- $\nu$  ニュートリノ

## ppチェーン



## CNOサイクル



## The Convection Zone

Energy continues to move toward the surface through convection currents of heated and cooled gas in the convection zone.

## The Corona

The ionized elements within the corona glow in the x-ray and extreme ultraviolet wavelengths. NASA instruments can image the Sun's corona at these higher energies since the photosphere is quite dim in these wavelengths.

## The Radiative Zone

Energy moves slowly outward—taking more than 170,000 years to radiate through the layer of the Sun known as the radiative zone.

## Sun's Core

Energy is generated by thermonuclear reactions creating extreme temperatures deep within the Sun's core.

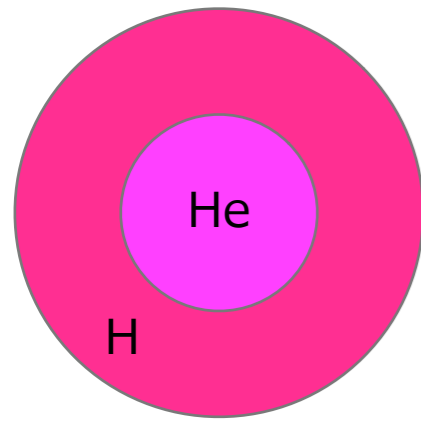
## Coronal Streamers

The outward-flowing plasma of the corona is shaped by magnetic field lines into tapered forms called coronal streamers, which extend millions of miles into space.

## The Chromosphere

The relatively thin layer of the Sun called the chromosphere is sculpted by magnetic field lines that restrain the electrically charged solar plasma. Occasionally larger plasma features—called prominences—form and extend far into the very tenuous and hot corona, sometimes ejecting material away from the Sun.

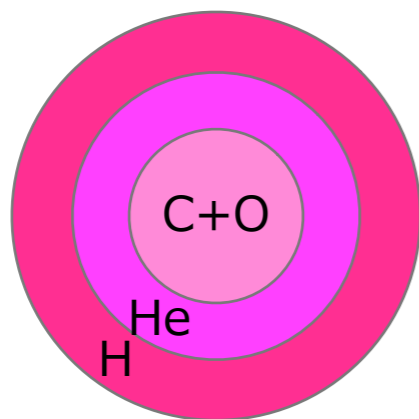
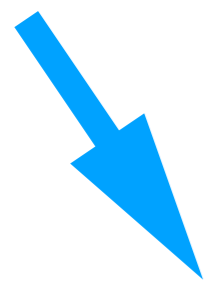
# 水素からヘリウムへ さらに重元素への核融合



水素HからヘリウムHeへ (pp chain)

中心部がHeになると、核融合止まる。

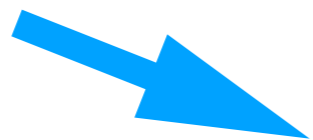
冷却し、収縮し、温度上昇して、次の核融合に点火



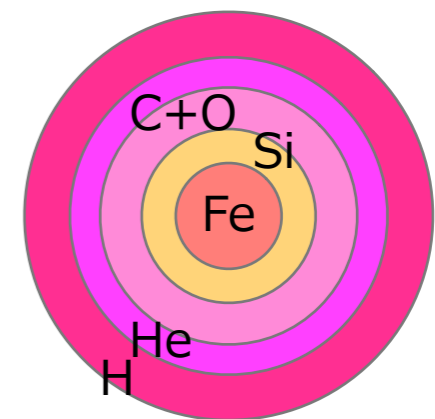
ヘリウムHeからCNOへ (pp chain)

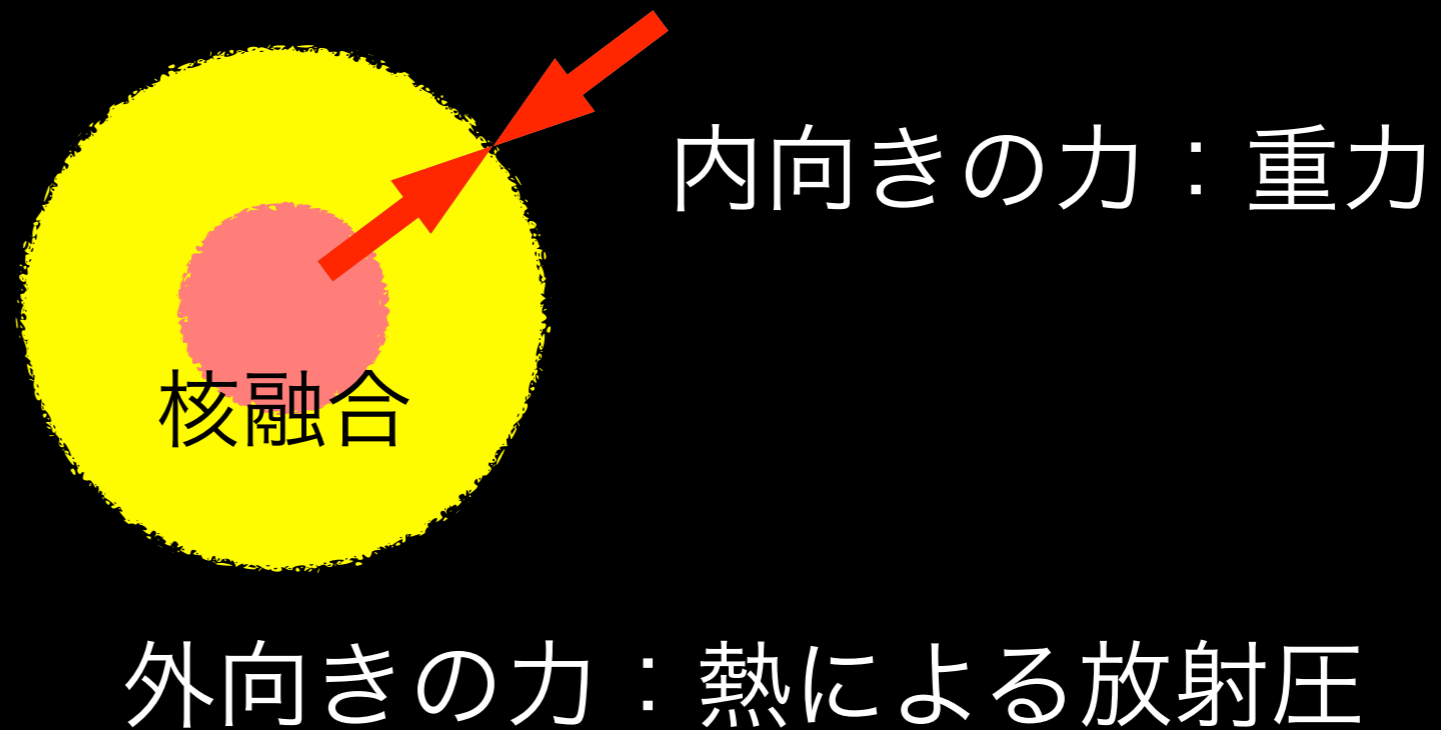
中心部がCNOになると、核融合止まる。

冷却し、収縮し、温度上昇して、次の核融合に点火



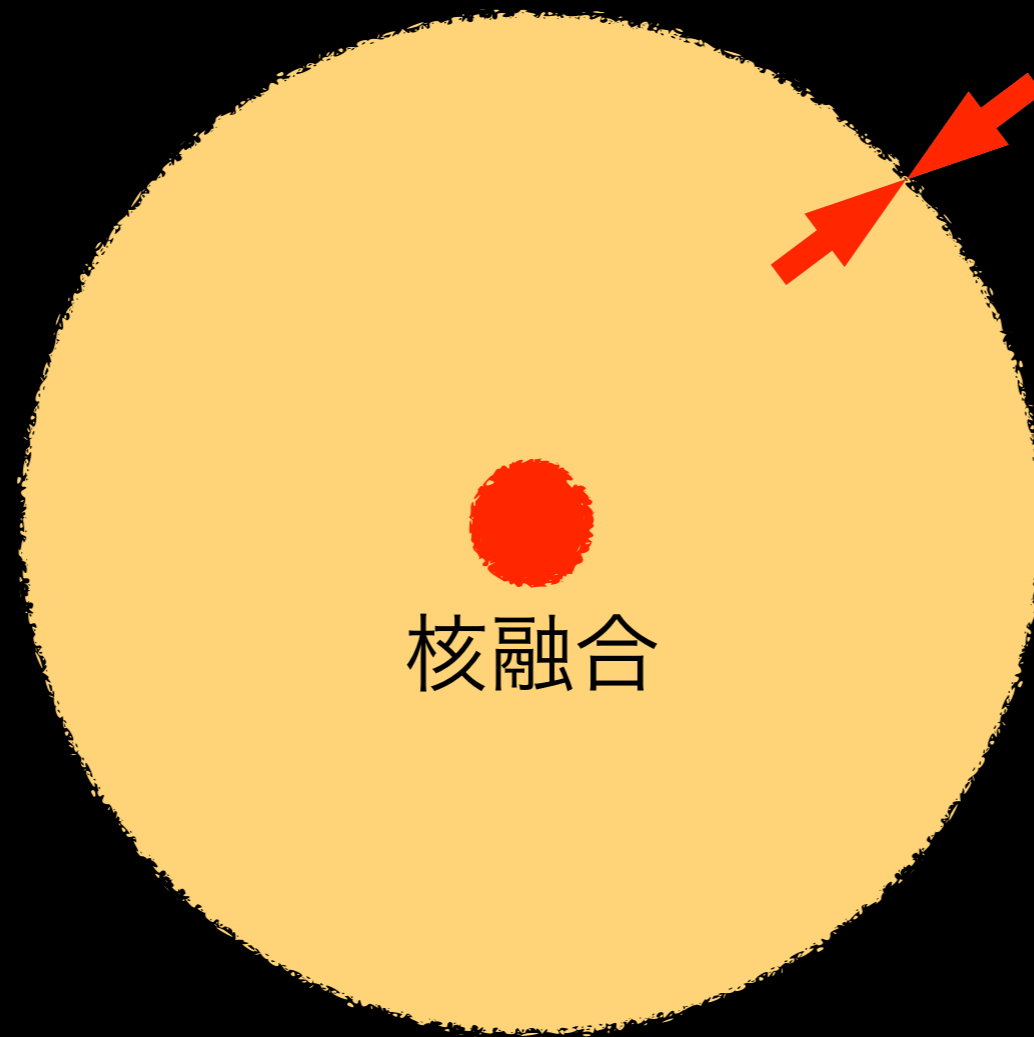
中心部がFeになると、...





\*現在の太陽：水素がヘリウムに核融合

\*放射圧＝重力 となるところで星の半径が決まる



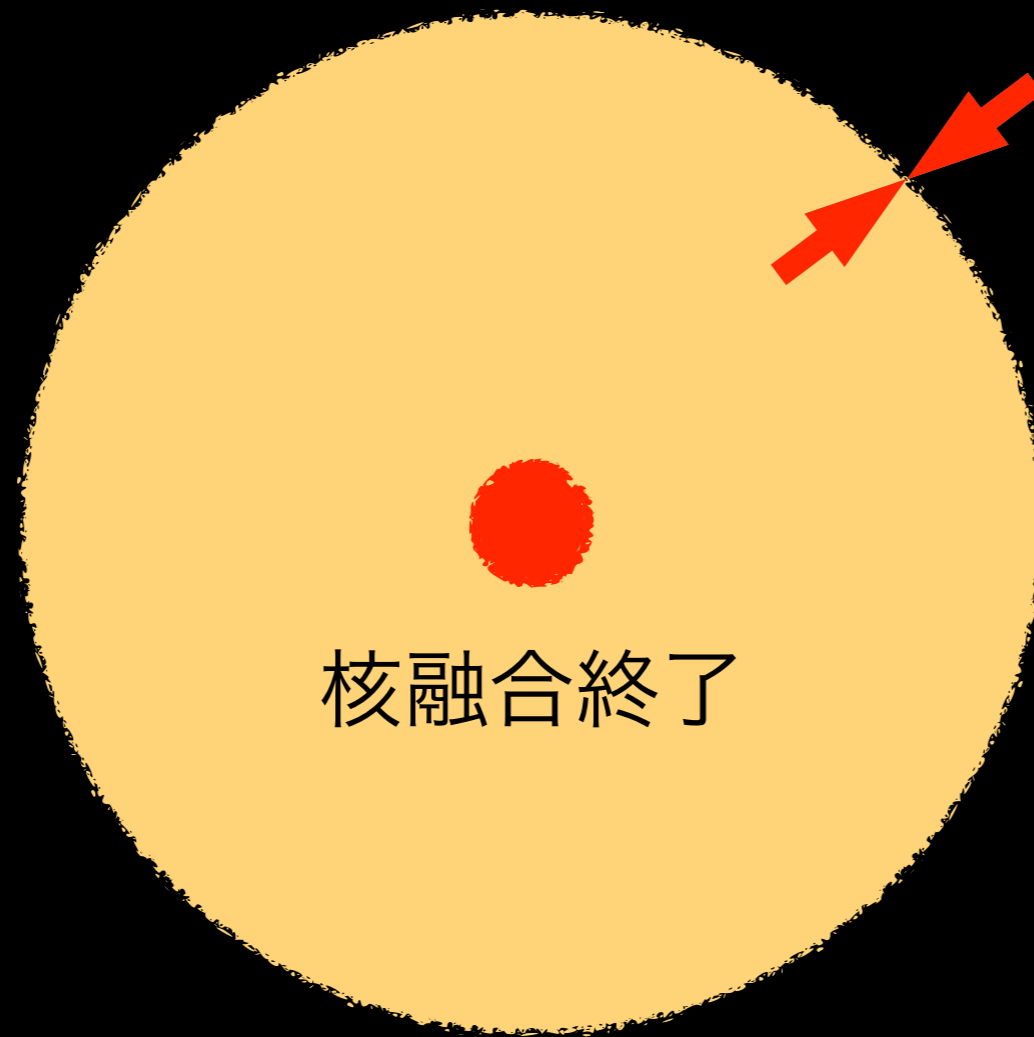
内向きの力：重力

外向きの力：

熱による放射圧

\*核融合反応で質量をエネルギーに変換し続けると、  
軽くなるので重力が弱くなる。

\*放射圧=重力 となるところで星の半径が決まる



内向きの力：重力

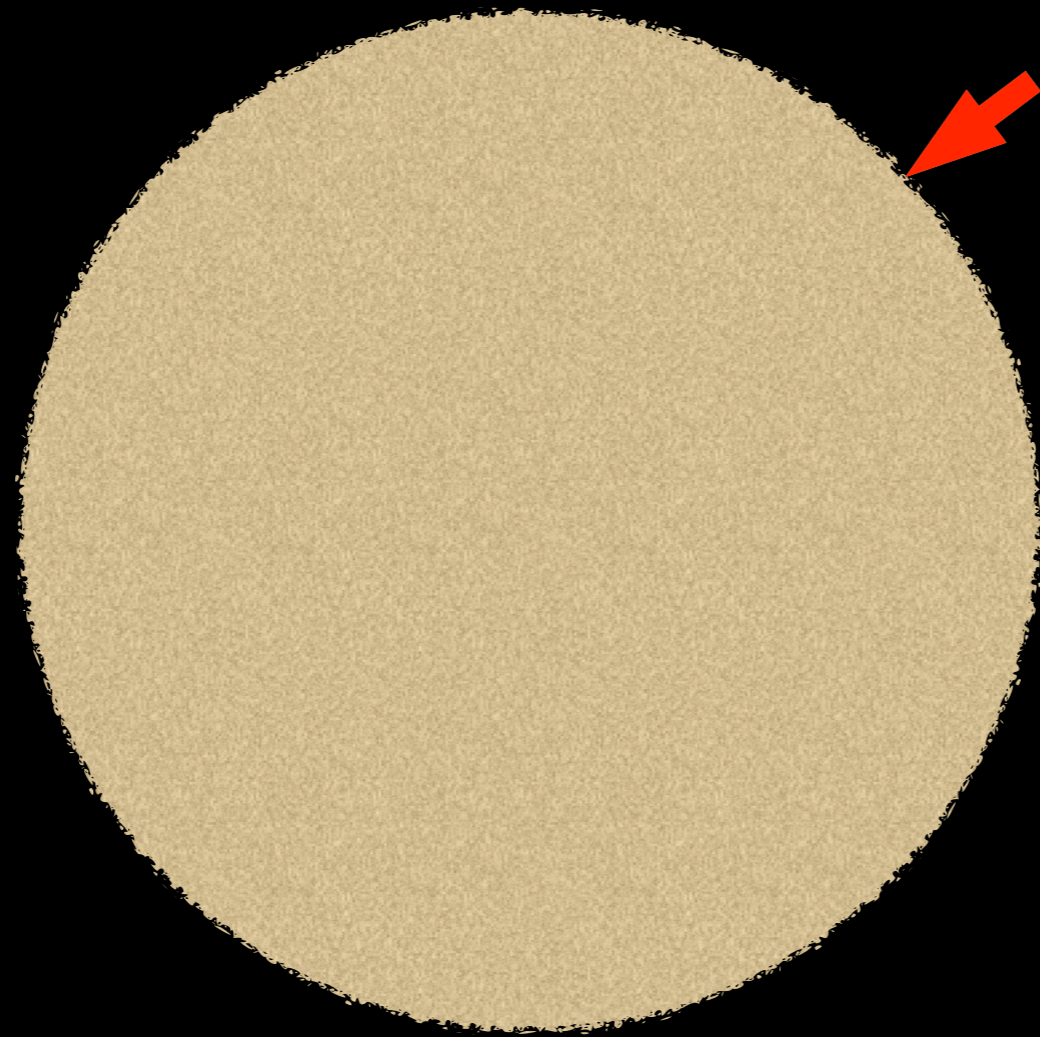
外向きの力：

熱による放射圧

\*核融合反応は鉄まで進むと終了

\*放射圧がなくなるので星の収縮が始まる

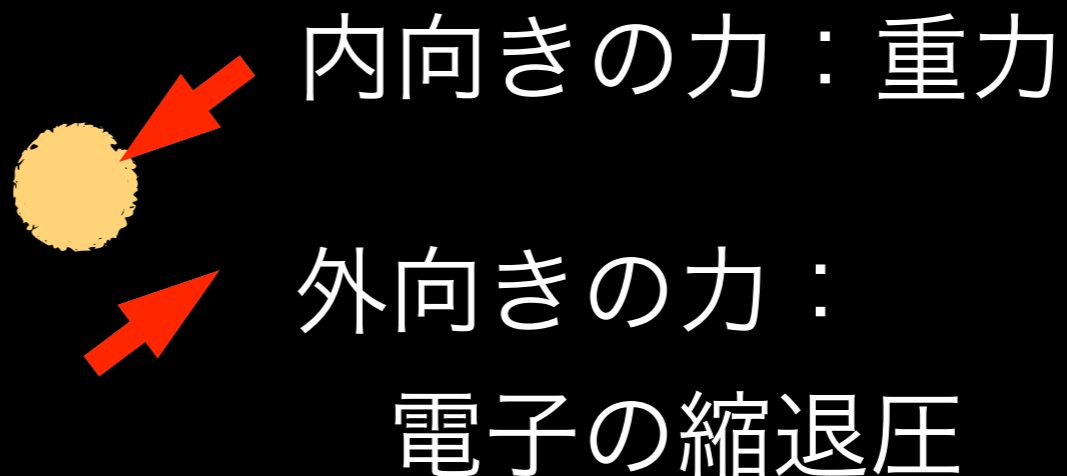
# 超新星爆発のしくみ (4) 収縮する



内向きの力：重力

\*収縮が始まる





\*密につまった物質が星を支えるようになる

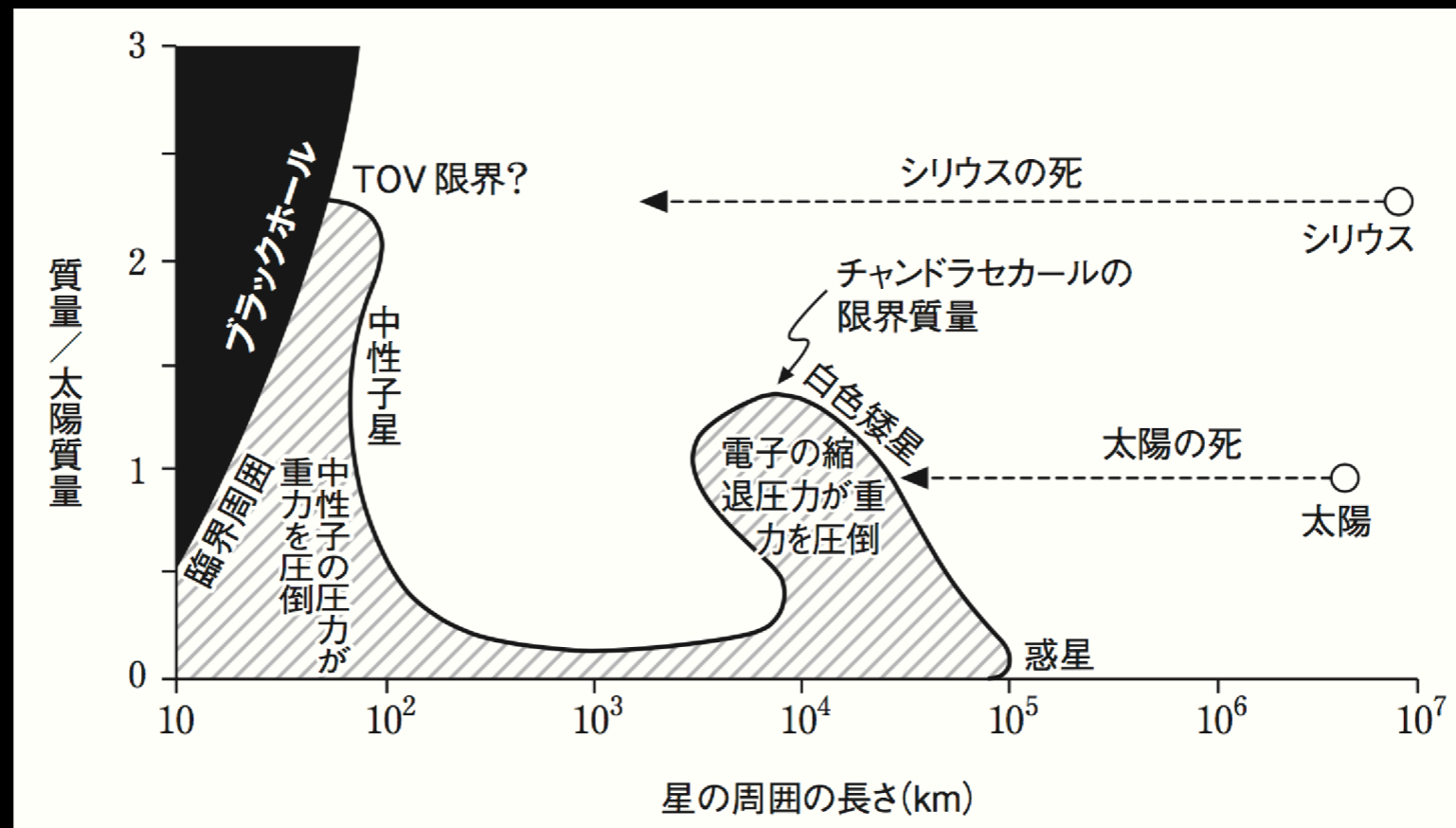
【運命その1】 電子の縮退圧で支える「白色矮星」になる

1933年チャンドラセカールの考え

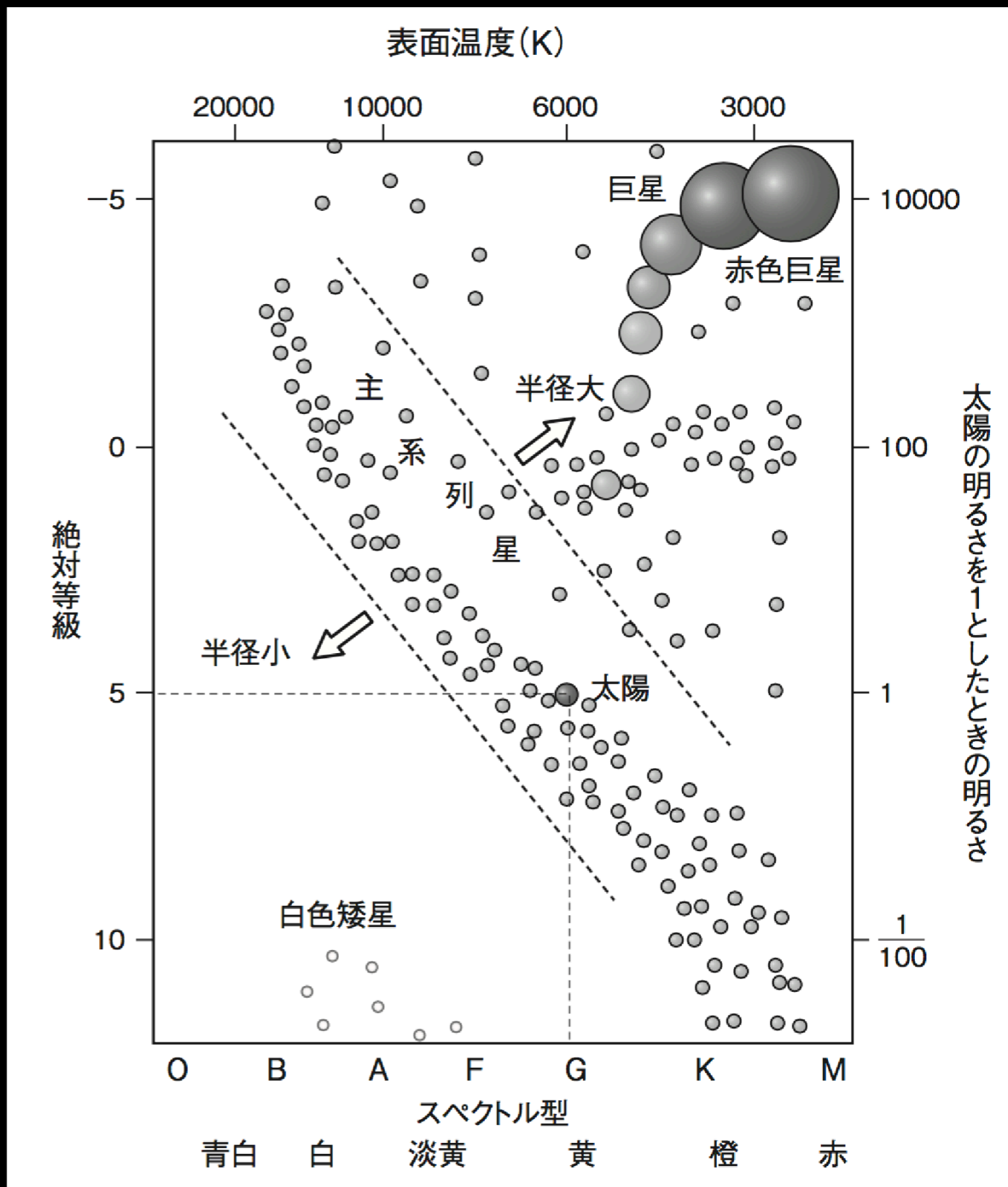
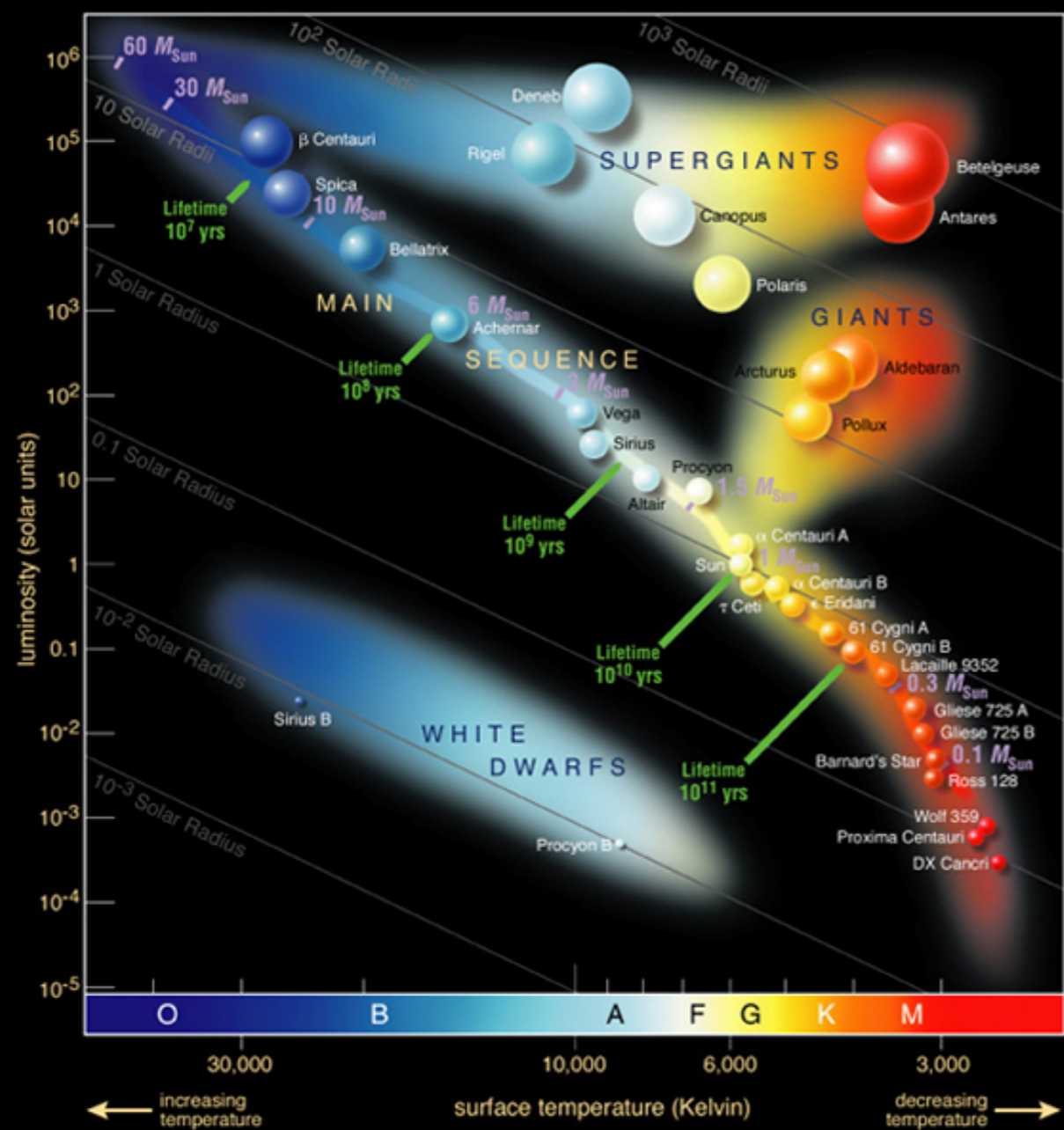
# 相対論の産物：ブラックホールと時空特異点

本当に、このような天体は存在するのか。

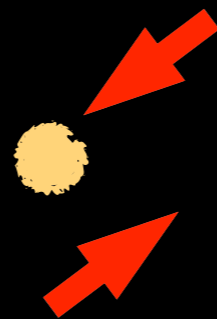
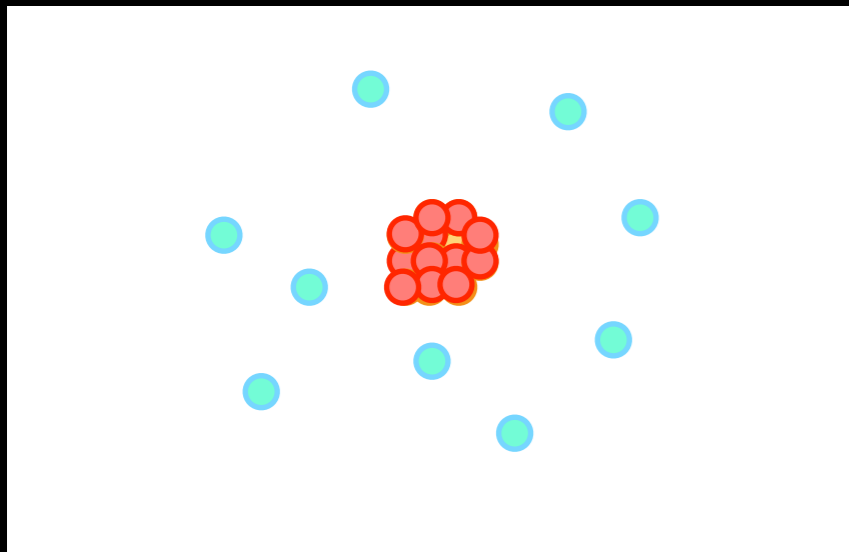
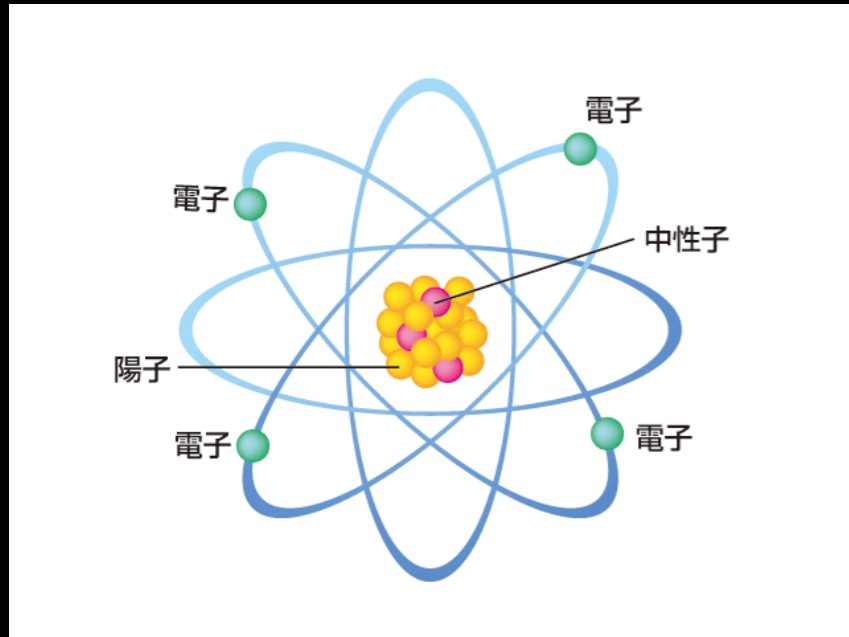
1930年代はじめ、チャンドラセカールは、白色矮星の質量に上限（ $1.4 \times$ 太陽質量）があることを発見する。



これより重い星は永久につぶれてしまう?? 大論争がおきる



太陽の明るさを1としたときの明るさ



内向きの力：重力

外向きの力：  
中性子の縮退圧

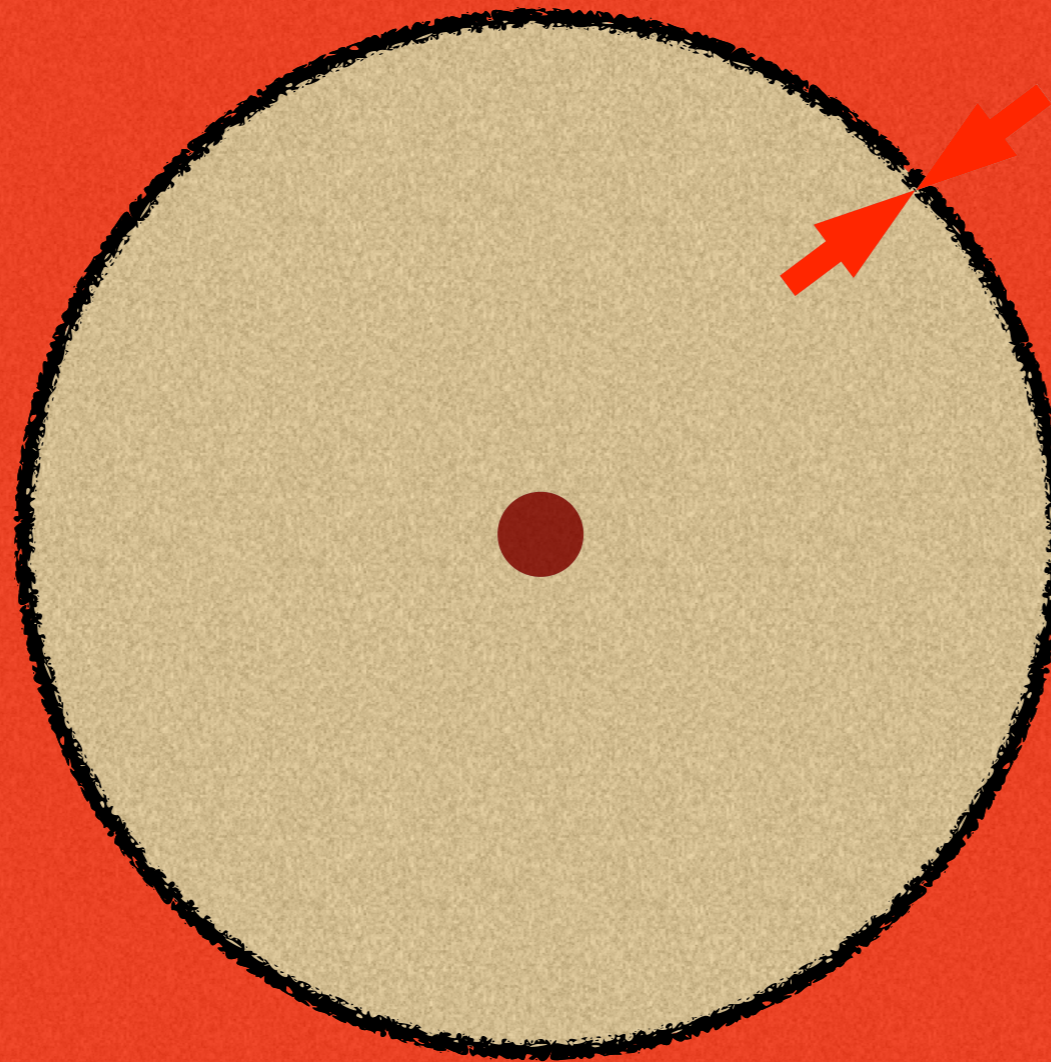


\*密につまった物質が星を支えるようになる

【運命その2】 中性子の縮退圧で支える「中性子星」になる

1938年ツヴィツキーの考え

# 超新星爆発のしくみ (6) さらに降り積もると...



内向きの力：重力

外向きの力：

中性子の縮退圧

硬い殻ができる

\*収縮が始まる

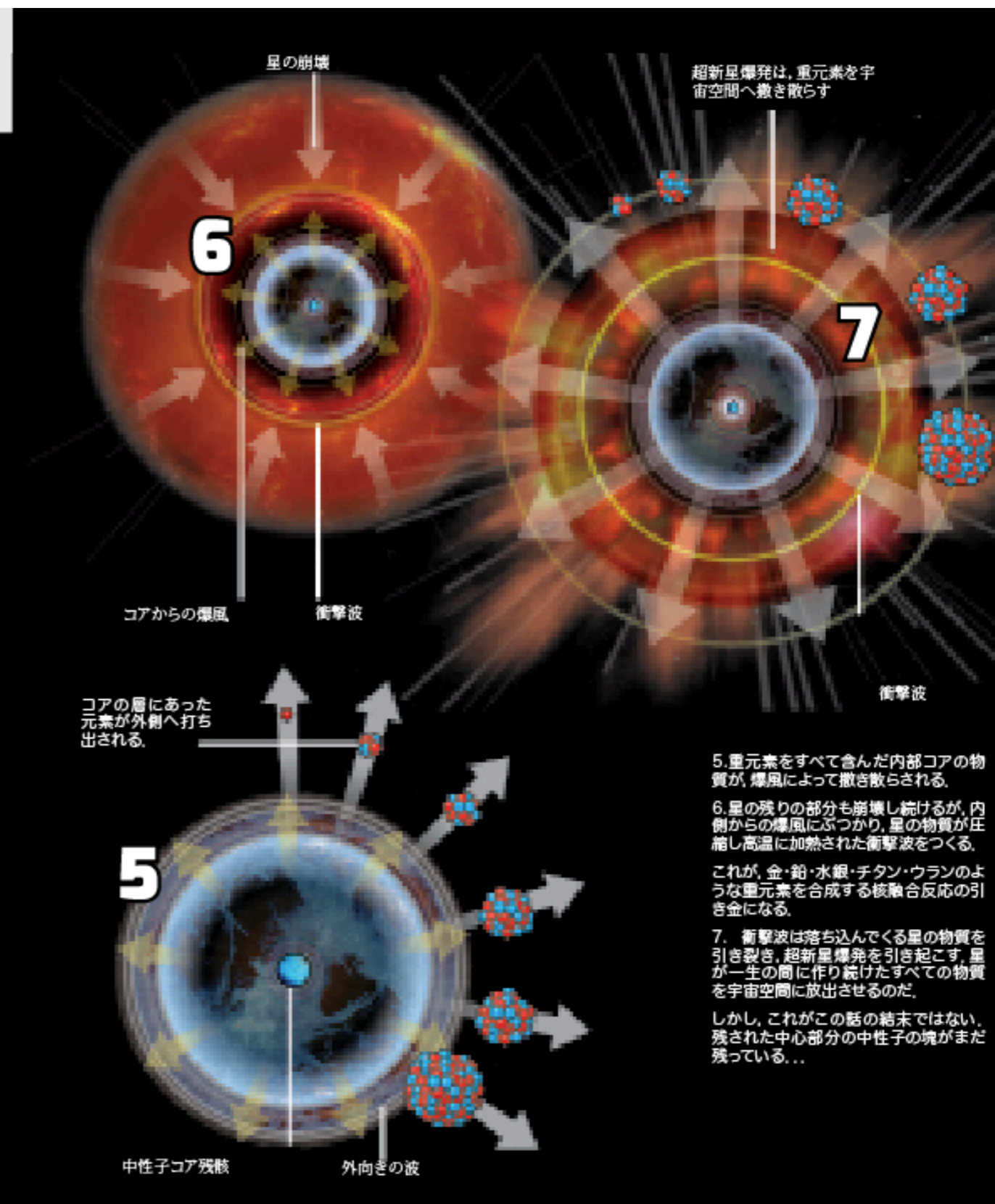
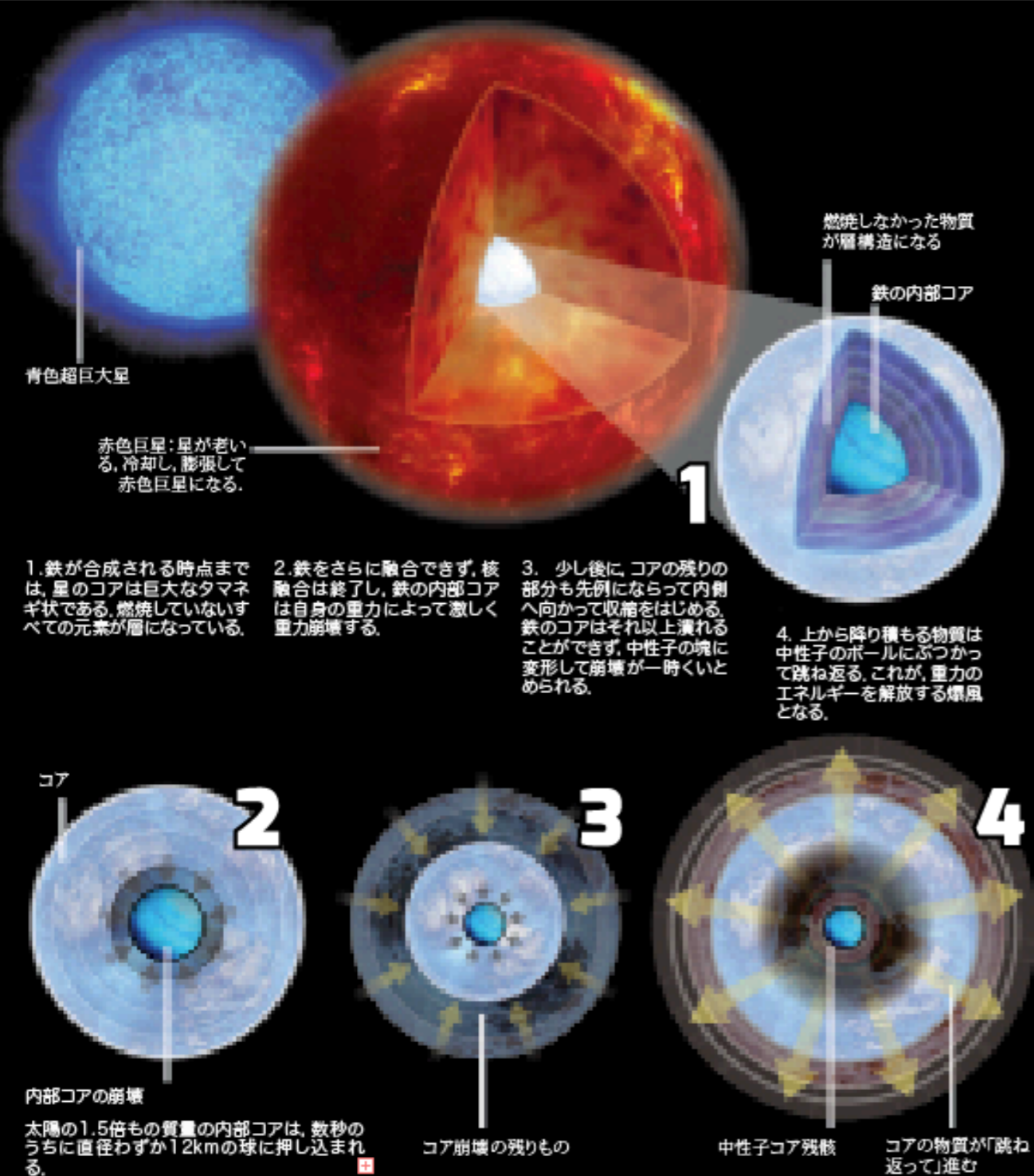
中性子の塊ができる。

さらに外側からガスが落下すると...

# 星の一生

## ダイハード:重元素を合成するまでは死ねない

鉄の核融合を発生させるには、エネルギーを解放するよりも多くのエネルギーを必要とする。ひとたび星のコアに鉄ができれば、それは死を意味する。核融合反応は終了し、星は重力の報酬を受けることになる。重元素が合成されるのは、この星の断末魔の時期である。



# 超新星爆発のしくみ

- 星の内部で原子核融合が進む：



- 質量を失って、膨張する。 放射の力 > 重力

- 核融合が生じなくなる。 放射の力 < 重力  
急速に潰れる。

- 星の内部は押しつぶされて、  
原子核 は 中性子の固まり に

- 大爆発：

外から降り積もってきた物質が中性子核ではね返る

# 周期表 (periodic table)

Period	1	1A																	18	VIII A						
	1	1s	1 H 水素 hydrogen 1.008																	2 He ヘリウム helium 4.003						
	2	2s	3 Li リチウム lithium 6.941	4 Be ベリリウム beryllium 9.012																	5 B ホウ素 boron 10.81	6 C 炭素 carbon 12.01	7 N 窒素 nitrogen 14.01	8 O 酸素 oxygen 16.00	9 F フッ素 fluorine 19.00	10 Ne ネオン neon 20.18
	3	3s	11 Na ナトリウム sodium 22.99	12 Mg マグネシウム magnesium 24.31	3 III B	4 IV B	5 V B	6 VI B	7 VII B	8 VIII B	9 VIII B	10 VIII B	11 I B	12 II B	13 Al アルミニウム aluminum 26.98	14 Si ケイ素 silicon 28.09	15 P リン phosphorus 30.97	16 S 硫黄 sulfur 32.07	17 Cl 塩素 chlorine 35.45	18 Ar アルゴン argon 39.95						
	4	4s	19 K カリウム potassium 39.10	20 Ca カルシウム calcium 40.08	21 Sc スカンジウム scandium 44.96	22 Ti チタン titanium 47.87	23 V バナジウム vanadium 50.94	24 Cr クロム chromium 52.00	25 Mn マンガン manganese 54.94	26 Fe 鉄 iron 55.85	27 Co コバルト cobalt 58.93	28 Ni ニッケル nickel 58.69	29 Cu 銅 copper 63.55	30 Zn 亜鉛 zinc 65.41	31 Ga ガリウム gallium 69.72	32 Ge ゲルマニウム germanium 72.64	33 As ヒ素 arsenic 74.92	34 Se セレン selenium 78.96	35 Br 臭素 bromine 79.90	36 Kr クリプトン krypton 83.80						
	5	5s	37 Rb ルビジウム rubidium 85.47	38 Sr ストロンチウム strontium 87.62	39 Y イットリウム yttrium 88.91	40 Zr ジルコニウム zirconium 91.22	41 Nb ニオブ niobium 92.91	42 Mo モリブデン molybdenum 95.94	43 Tc テクネチウム technetium 98	44 Ru ルテニウム ruthenium 101.1	45 Rh ロジウム rhodium 102.9	46 Pd パラジウム palladium 106.4	47 Ag 銀 silver 107.9	48 Cd カドミウム cadmium 112.4	49 In インジウム indium 114.8	50 Sn スズ tin 118.7	51 Sb アンチモン antimony 121.8	52 Te テルル tellurium 127.6	53 I ヨウ素 iodine 126.9	54 Xe キセノン xenon 131.3						
	6	6s	55 Cs セシウム cesium 132.9	56 Ba バリウム barium 137.3	57-71 ランタノイド lanthanides	72 Hf ハフニウム hafnium 178.5	73 Ta タンタル tantalum 180.9	74 W タングステン tungsten 183.8	75 Re レニウム rhenium 186.2	76 Os オスミウム osmium 190.2	77 Ir イリジウム iridium 192.2	78 Pt 白金 platinum 195.1	79 Au 金 gold 197.0	80 Hg 水銀 mercury 200.6	81 Tl タリウム thallium 204.4	82 Pb 鉛 lead 207.2	83 Bi ビスマス bismuth 209.0	84 Po ポロニウム polonium 209	85 At アスタチン astatine 210	86 Rn ラドン radon 222						
7	7s	87 Fr フランシウム francium 223	88 Ra ラジウム radium 226	89-103 アクチノイド actinides	104 Rf ラザホージウム rutherfordium 261	105 Db ドブニウム dubnium 262	106 Sg シーボーギウム seaborgium 266	107 Bh ボーリウム bohrium 264	108 Hs ハッシウム hassium 277	109 Mt マイトネリウム meitnerium 268	110 Ds ダームスタチウム darmstadtium 281	111 Rg レントゲニウム roentgenium 272	112 Cn コペルニシウム copernicium 285	113 Nh ニホニウム nihonium 284	114 Fl フレロビウム flerovium 289	115 Mc モスコビウム moscovium 288	116 Lv リバモリウム livermorium 292	117 Ts テネシン tennessine 293	118 Og オガネソン oganeson 294							

原子番号 → 29 +2,1 ← 通常できるイオンの価数  
 元素記号 → Cu ← 元素記号が灰色のものは人工合成された元素  
 元素名(日本語) → 銅  
 元素名(英語) → copper  
 ← 原子量

↑ 非金属元素  
 ↓ 金属元素

■ 常温で気体    ■ 単体は半導体  
 ■ 常温で液体    ■ 単体は強磁性体    ■ 放射性同位体のみからなる元素

→ 非金属元素  
 ↓ 金属元素

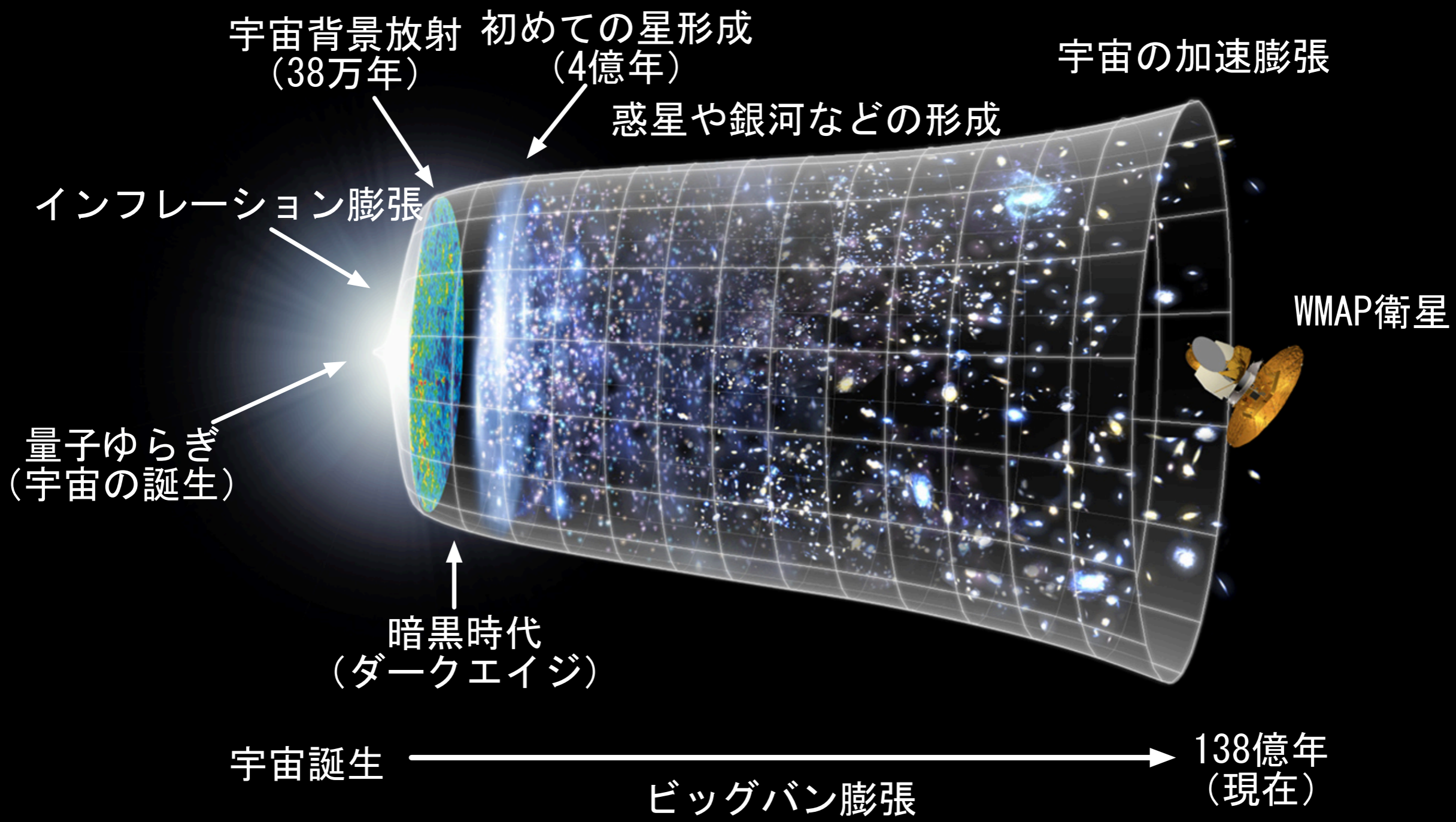
↑ 非金属元素  
 ↓ 金属元素

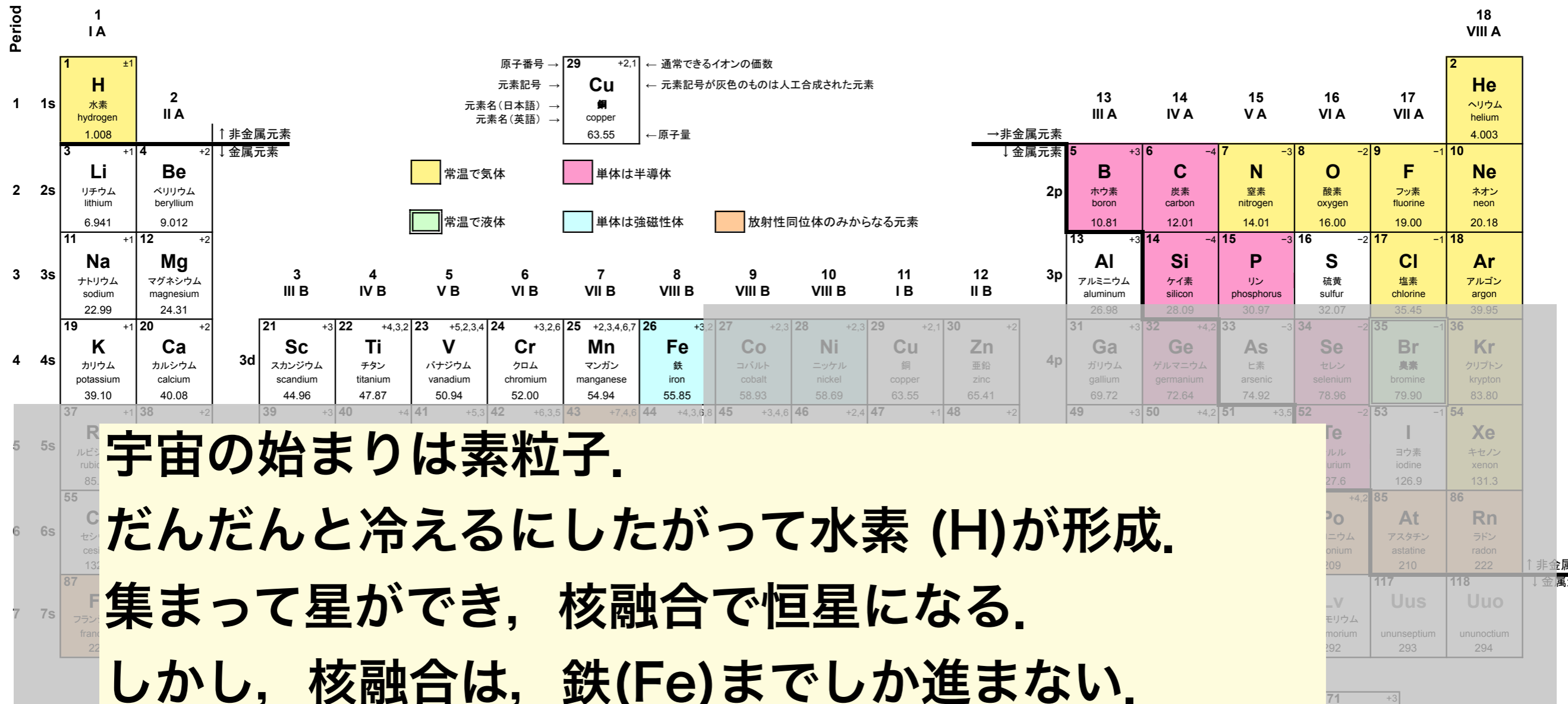
ランタノイド  
lanthanides  
(レアアース金属)  
(rare earth metals)

アクチノイド  
actinides

† 4f	57 La ランタン lanthanum 138.9	58 Ce セリウム cerium 140.1	59 Pr プラセオジウム praseodymium 140.9	60 Nd ネオジウム neodymium 144.2	61 Pm プロメチウム promethium 145	62 Sm サマリウム samarium 150.4	63 Eu ユロビウム europium 152.0	64 Gd ガドリニウム gadolinium 157.3	65 Tb テルビウム terbium 158.9	66 Dy ジスプロシウム dysprosium 162.5	67 Ho ホルミウム holmium 164.9	68 Er エルビウム erbium 167.3	69 Tm ツリウム thulium 168.9	70 Yb イットルビウム ytterbium 173.0	71 Lu ルテチウム lutetium 175.0
‡ 5f	89 Ac アクチニウム actinium 227	90 Th トリウム thorium 232.0	91 Pa プロトアクチニウム protactinium 231.0	92 U ウラン uranium 238.0	93 Np ネプツニウム neptunium 237	94 Pu プルトニウム plutonium 239	95 Am アメリシウム americium 243	96 Cm キュリウム curium 247	97 Bk バークリウム berkelium 247	98 Cf カリホルニウム californium 251	99 Es アインスタイニウム einsteinium 252	100 Fm フェルミウム fermium 257	101 Md メンデレビウム mendelevium 258	102 No ノーベリウム nobelium 259	103 Lr ローレンシウム lawrencium 262







現在、周期表に Fe より重い元素があるのは何故か？

**超新星爆発で作られた！**

**連星中性子星合体で作られた！**

# 星の輪廻

## 星の輪廻

星(恒星)の一生を決めるのは、どれだけの質量があるか、そしてどのように燃えていくかの2つの要素だ。巨大な星は、核燃料の消費もはやく、数万年くらいの寿命しかないが、小さな星は現在の宇宙年齢の数倍も燃焼し続ける可能性がある。

褐色矮星\*はよく「星のなりそこない」と呼ばれる。水素の核融合反応に点火するほどの質量を持ってなかった星の残骸だからだ。これらの星は、まわりの空間に熱を放出して、ゆっくりと死んでゆき、やがて消えてゆく。巨大なガス惑星と同じなので、「できすぎた惑星」と考えてもよいかもしれない。[\*訳注：矮星(dwarf)は、小さな星という意味。]

赤色矮星は小さいけれども水素の核融合を起こすことのできる星だ。低い温度で燃えるために、宇宙が今の何倍の年齢になったとしても薄暗く輝き続けることができる。宇宙にある多くの星は -- 全体のおよそ75パーセントの星は -- 赤色矮星である。

太陽型恒星(あるいは黄色矮星)は、水素とヘリウムの両方の核融合反応に点火できる十分な質量を持つ星だ。これらの星がヘリウムを失ったあとは赤色巨星になり、周囲のガス層を照らして惑星ガス雲とし、そしてやがて白色矮星となる。100億年以上の時間をかけて(もし宇宙がそれだけ長く続くならば、だが)、これらの星はゆっくりと冷却して、黒色矮星になってゆく。

超巨星や極超巨星は、星の仲間たちからみても病的に肥満している星である。太陽の10倍から数百倍の大きさの質量のものは、燃料の消費も大きく、数十万年程度の寿命である。

宇宙におけるすべての重元素の合成主の星たちは、その星のコアでひとたび鉄が合成されると、超新星として爆発する。

痩せている星は中性子星やパルサーとなって生き延びるが、肥満している星は、自分の巨大な体重で押しつぶされてブラックホールに変貌する。

図にした星の大きさは正しいものではない。例えば、太陽の20倍の質量をもつ超巨星は、太陽の75倍の大きさになる。

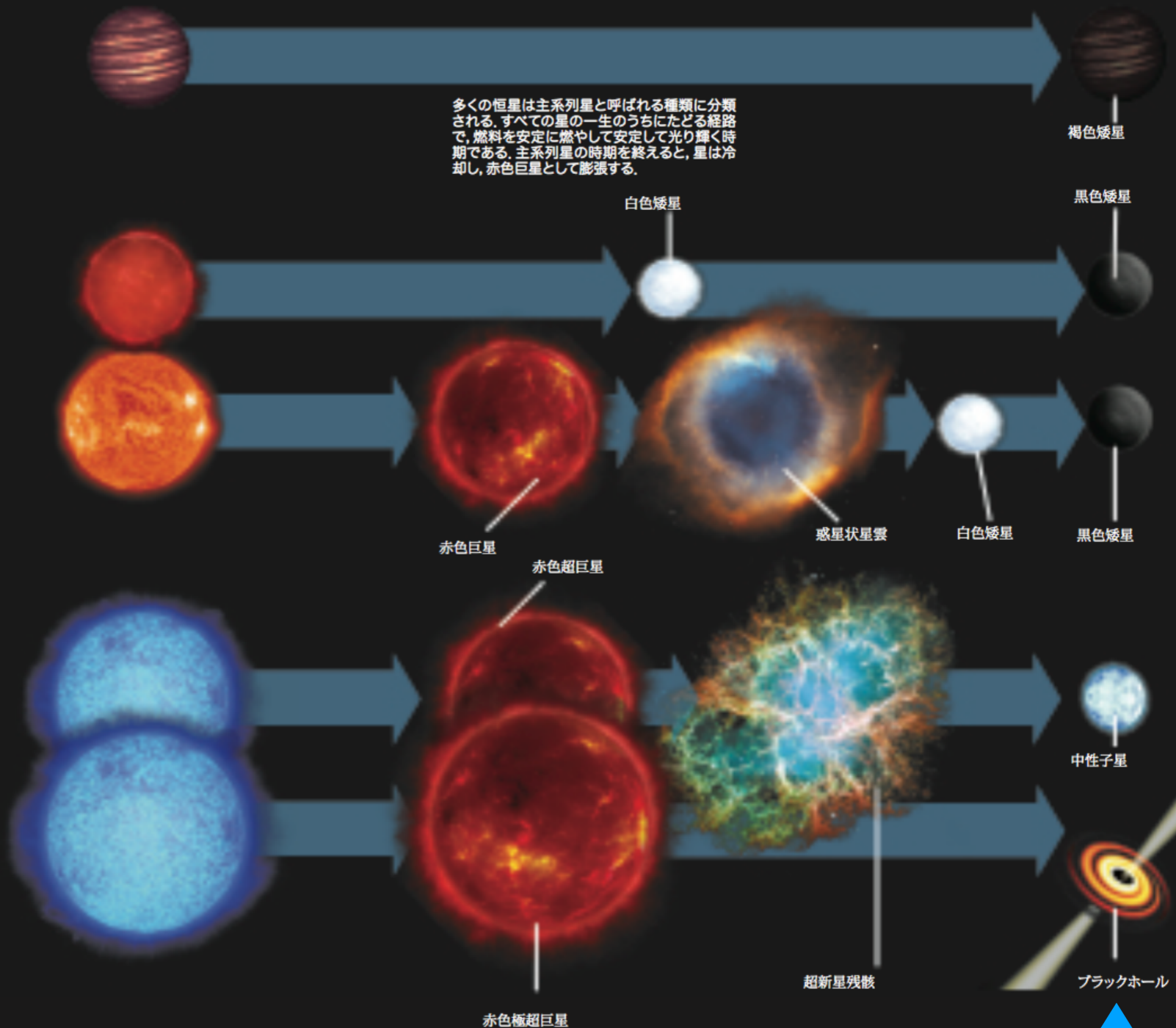
褐色矮星  
質量：太陽の0.08倍  
表面温度：1000°C  
寿命(主系列)：不明

赤色矮星  
質量：太陽の0.2倍  
表面温度：3000°C  
寿命：10兆年

太陽型恒星  
質量：太陽の1倍  
表面温度：5000°C  
寿命：100億年

超巨星  
質量：太陽の20倍  
表面温度：12000°C  
寿命：500万年

極超巨星  
質量：太陽の100倍  
表面温度：40000°C  
寿命：100万年



太陽質量の30倍以上の星が燃え尽きると、ブラックホールになる。