

相対性理論 アインシュタインはどこまで正しいのか

真貝寿明 (大阪工業大学)

<http://www.oit.ac.jp/is/shinkai/>

本講義では、相対性理論とその検証にまつわる技術を紹介する。

理学的な視点としては、Einstein の導いた 2 つの相対性理論 (特殊相対性理論と一般相対性理論) の概略、およびそれらが導くブラックホールや重力波の問題を概観する。

工学的な視点としては、Michelson 干渉計のしくみ、重力波干渉計のしくみ、GPS 測地システムのしくみ、原子時計・光格子時計のしくみ等に触れ、相対性理論の検証を軸にして技術的な面を概観する。

目次

1	序論	3
1.1	近代物理学から現代物理学へ 相対性理論の位置づけ	3
1.2	Newton の運動法則	4
1.3	Galilei の相対性原理	4
2	特殊相対性理論	5
2.1	特殊相対性理論・・・光速に近いときの力学	5
2.1.1	Michelson-Morley の実験	5
2.1.2	長さの収縮仮説	7
2.1.3	特殊相対性理論	8
2.1.4	速度の合成	9
2.1.5	Lorentz 不変な量, 固有時間	10
2.1.6	4 元速度, 4 元加速度	11
2.1.7	相対論的運動方程式	12
2.2	特殊相対性理論の応用: 未来へ行くタイムトラベル	13
2.2.1	光時計を使った思考実験	13
2.2.2	寿命が伸びる素粒子	13
2.2.3	時間の遅れとパラドックス	14
2.2.4	高速ロケットにおける時間の遅れ	16
2.3	特殊相対性理論の応用: $E = mc^2$	18
2.3.1	原子核反応と太陽の寿命	18
2.3.2	原子核反応	19
2.3.3	星の一生	20
3	一般相対性理論	23
3.1	Einstein 方程式・・・重力場の方程式	23
3.2	一般相対性理論の応用: 重力赤方偏移	26
3.2.1	強い重力場にいる観測者の時間の遅れ	26
3.2.2	GPS 測地システムのしくみ	26
3.2.3	光格子時計を用いた重力赤方偏移の検証実験	28
3.2.4	地球の重力	30

3.3	一般相対性理論の応用：ブラックホール	33
3.3.1	ブラックホール解の発見	33
3.3.2	ブラックホールの形成	33
3.3.3	ブラックホールの発見	34
3.3.4	ブラックホールの直接撮像の成功	37
3.3.5	時空特異点の問題	39
3.4	一般相対性理論の応用：重力波	41
3.4.1	初期の重力波検出実験	41
3.4.2	連星パルサー：重力波の間接的証明	41
3.4.3	レーザー干渉計による重力波検出	42
3.4.4	重力波レーザー干渉計の技術	44
3.4.5	KAGRA 干渉計	45
3.4.6	重力波の直接観測	46

1 序論

1.1 近代物理学から現代物理学へ 相対性理論の位置づけ

現代物理学とは、1905年以降に誕生した相対性理論と量子論を軸にした物理学を指す。1905年と明確に区切られるのは、この年に、Einstein がその後の物理学を書き換えることになる重要な3本の論文を出版したことに由来する。

アインシュタイン
Albert Einstein
(1879-1955) [1922年
ノーベル物理学賞受賞]

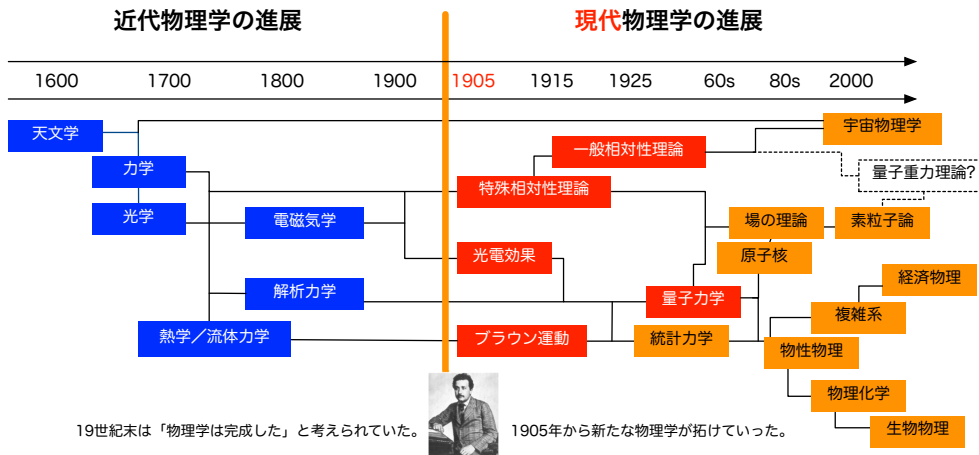


図 1: 1905 年以前の物理学と、1905 年以降の物理学。

相対性理論は Einstein が独自に構築した時間と空間の理論体系である。1905年に発表された相対性原理（後に**特殊相対性理論**と名称変更）は、時間の進み方が観測者の運動状態によって変わることを予言する。1915年に発表された**一般相対性理論**は、重力の根源が時間と空間のゆがみであることを結論した。現在、我々は宇宙がビッグバンと言われる高温・高圧の火の玉状態から生まれ、膨張しつつづけていることを知っているが、それは相対性理論の予言する宇宙でもある。

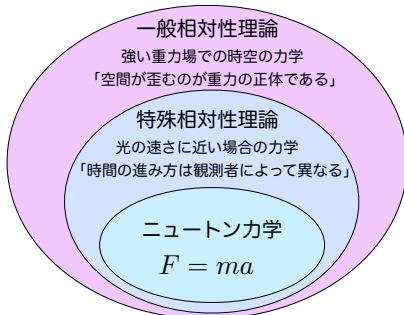


図 2: 相対性理論はニュートン力学を含み、光速の世界へ、強い重力の世界へと物理の法則をマクロの方向へ拡張した。

1.2 Newton の運動法則

Newton 力学は、3つの運動法則をもとに出来上がっている。

- 第1法則 外力が作用していないとき、物体は等速直線運動を行う。（慣性の法則）
第2法則 外力が作用すると、物体には質量に反比例した加速度が生じる。（運動の法則）
第3法則 作用に対して、大きさが等しく向きが反対の反作用が生じる。（作用・反作用の法則）

課題 1.1. 【慣性の法則】

Newton の運動の第2法則は、加える力を \mathbf{F} 、質量 m の物体に生じる加速度を \mathbf{a} とすると、運動方程式

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

と表わされる。ここで、 $\mathbf{F} = 0$ であれば、 $\mathbf{a} = 0$ となるので、「力がはたらかなければ、等速直線運動を行う」ことが示される。にもかかわらず、第2法則と独立に、第1法則が設定されている理由は何か。

ある座標系からみたとき、慣性の法則が成り立つならば、その座標系を慣性系（慣性座標系）と呼ぶ。Newton の第1法則は、これから物理を議論するにあたって、慣性系の存在を宣言したことに相当する。

1.3 Galilei の相対性原理

1つの慣性系 S に対して、一定の速度で動いている他の座標系を S' とすると、 S' も慣性系である。したがって、慣性系は無数に存在する。

法則 1.1 (Galilei の相対性原理)

はたらく力 \mathbf{F} が速度に関係しないならば、どの慣性系でも Newton の運動方程式は同じ形で表される。

課題 1.2. 【Galilei の相対性原理】

直交座標 S が (t, x, y, z) で表され、直交座標 S' が (t', x', y', z') で表されているとする。時刻 $t = t' = 0$ のとき、どちらの座標も一致していたが、 S' 系は x 軸の正の方向に一定の速さ v で動く。このとき、

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \quad (1.1)$$

が成り立つ。このとき、どちらの座標系でも同じく Newton の運動方程式が成り立つこと、すなわち

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F} \quad \text{および} \quad m \frac{d^2 \mathbf{x}'}{dt'^2} = \mathbf{F} \quad (1.2)$$

が成り立つことを示せ。

2 特殊相対性理論

2.1 特殊相対性理論・・・光速に近いときの力学

2.1.1 Michelson-Morley の実験

19 世紀中頃、電気と磁気的作用が Maxwell 方程式としてまとめられ、予言された通りに電磁波が発見された。しかし、物理学者は基本的な 2 つの疑問に悩まされる。1 つめの疑問は、電磁波を伝える物質は何か、という素朴な疑問だった。真空中でも電磁波が伝わる理由がわからないのだ。宇宙空間を伝わる電磁波は何を媒質としているのかが問題だった。もう 1 つの疑問は、Maxwell 方程式から導かれる電磁波の速度（光速）が定数となることだ。この「光速」は誰から見た速さなのか、という疑問である。物体の速度の測定は、観測する人の速度によって変わってくる。だから、誰から見た速度なのかを決めないと意味をもたないことになってしまう。

法則 2.1 (Maxwell 方程式)

Maxwell がまとめた電磁気学の方程式は次の 4 本の式から成り立つ。E は電場ベクトル、B は磁場ベクトル、ρ は電荷密度、j は電流ベクトル、c は光速とする。また、∇ は微分演算子とする。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (2.4)$$

電磁気学の基礎方程式
(Maxwell 方程式, 1864 年)

具体的には、各ベクトルは

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}, \quad \nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

などと書け、 \cdot と \times はベクトルの内積と外積を表す。したがって、以下のようなになる

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

物理学者は電磁波を伝える物質の存在を期待してエーテル (ether)[†] と命名し、エーテルを見つけ出そうとする実験が始まった。

[†] 古代ギリシア語の「天空を満たす物質」を表す言葉に由来する。

■マイケルソン干渉計のしくみ

Michelson は、干渉計と呼ばれる巧妙な装置を考えだした。干渉とは、2 つの波が重なり合うときに、強めあったり弱めあったりする現象である。波の振幅の激しい部分どうしが同じ高低で（山と山で）重なれば強めあうし、逆の高低で（山と谷で）重なれば振幅はゼロに近くなる。光の場合は、明るさに強弱が生じて「干渉縞」となる。Michelson の干渉計は、1 つの光を 2 筋に分け、互いに直角に 11 m ほど往復させてから再び合成して干渉縞を観測する装置（図 3）だった。地球が太陽の周りを公転するスピードは秒速 30 km 位である。2 つに分けた光は、地球の公転速度の分だけ、エーテル中を移動する速度が違ってくるはずだ。したがって、干渉縞を詳しく見ることでエーテルの存在がわかる、という原理だった。

マイケルソン
Albert A. Michelson
(1852-1931) [1907 年
ノーベル物理学賞]

【確認】
赤道上での地球の自転速度はいくらか。地球の公転速度はいくらか。

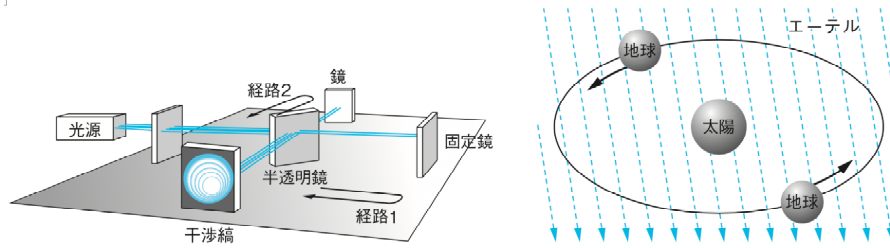


図 3: [左] Michelson 干渉計の概略. 光を 2 つに分け, 別の経路を通して再び合成する. 合成した光の強弱が変化すれば, 2 つの経路の距離差あるいは 2 つの経路の速度差が検出されたことになる. [右] エーテル検出の原理. 地球の公転軌道がエーテルの流れの中にあれば, 干渉計に年周期の干渉縞変化が見られるはずである.

課題 2.1. 【干渉計のしくみ・Michelson と Morley の実験根拠】

図 4 は, 干渉計と呼ばれる装置である. 光源 A から発せられたレーザー光は, ビームスプリッター B にて x 方向と y 方向に分離される. それぞれの光は, B から距離 L_1 の位置にある鏡 M_x , 距離 L_2 にある M_y でそれぞれ反射し, 元の B に戻って再び合成されて検出器 D に到達する. B- M_x と B- M_y の距離が等しいとき, 検出器 D の光は同じ となるので強めあう.

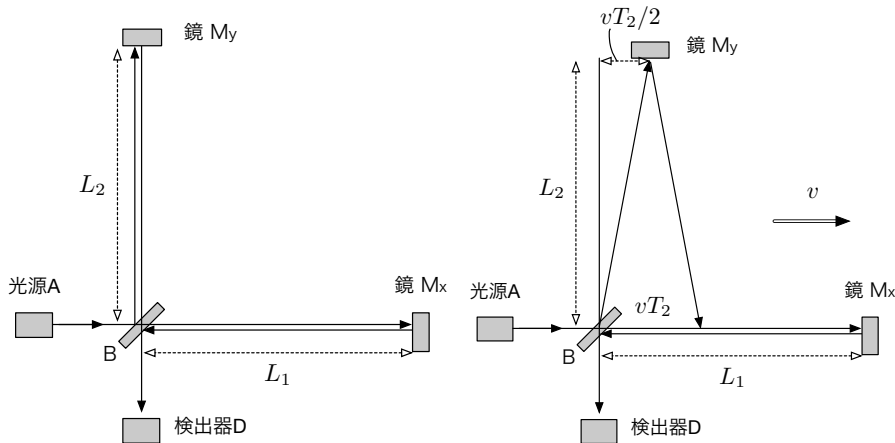


図 4: [左] 干渉計の構造. [右] 速度 v で全体が B- M_x 方向に移動しているとき.

この干渉計が, 速度 v で B- M_x 方向に移動しているとしよう. このとき, 光が B- M_x 間を往復するのに要する時間 T_1 は,

$$T_1 = \frac{L_1}{c-v} + \frac{L_1}{c+v} = \frac{2L_1/c}{1-\beta^2} \quad (\text{ただし, } \beta \equiv \frac{v}{c} \text{ とした})$$

また, B- M_y 間を往復する光は, 実質的には, 図 4 [右] にあるように, B- M'_y - M_y を通ることになるから要する時間 T_2 は

$$T_2 = \frac{2\sqrt{(L_2)^2 + (vT_2/2)^2}}{c}$$

となり, これを解くと,

$$T_2 = \text{ }$$

となる.

M_x と M_y で反射する光の光路差は Δ は,

$$\Delta = c(T_1 - T_2) = 2 \left(\frac{L_1}{1-\beta^2} - \frac{L_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right).$$

地球の自転や公転によって、装置が時計回りに 90 度回転したとすると、このときの光路差 Δ' は、

$$\Delta' = c(T'_1 - T'_2) = 2 \left(\frac{L_1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{L_2}{1-\beta^2} \right).$$

したがって、この間に光路差には、 $\delta = \Delta' - \Delta = \boxed{\text{ウ}}$ の違いが生じる。つまり装置が回転することによって、干渉縞の移動が生じるはずである。

残念ながら干渉縞の変化は観測されなかった。Michelson と Morley は 6 年の実験の後、「エーテルの検出に失敗した」とする結果を発表する。

2.1.2 長さの収縮仮説

エーテル理論は窮地に立たされ、FitzGerald や Lorentz は、実験結果を説明するために Newton 力学の修正を試みた。そして「大きな速度で動くすべての物体は、エーテルに対して長さを縮める」という長さの収縮仮説 (Lorentz-FitzGerald 収縮仮説) を提唱した。式で表すと、「速度 v で運動する物体の長さは、静止しているときより運動する方向に $\sqrt{1-\beta^2}$ 倍に縮む」となる。 $\beta = v/c$ である。

モーリー
Edward W. Morley
(1838-1923)

フィッツジェラルド
George F. FitzGerald
(1851-1901)

ローレンツ
Hendrik A. Lorentz
(1853-1928)

課題 2.2. 【Lorentz-FitzGerald 収縮仮説】

課題 2.1 でみた干渉計の光路差 δ が観測されなかったことを、Lorentz-FitzGerald 収縮仮説をもとに説明してみよう。

干渉計が速度 v で B-M_x 方向に移動していることから、B-M_x 間の距離は L_1 ではなく、 $\boxed{\text{ア}}$ である。したがって、 T_1 は

$$T_1 = \frac{2L_1\sqrt{1-\beta^2}/c}{1-\beta^2}$$

となり、 T_2 は変更されない。したがって、光路差 Δ は $\Delta = \boxed{\text{イ}}$ となる。

装置が 90 度回転したときには、 T'_1 はそのまま、 T'_2 は L_2 が $\boxed{\text{ウ}}$ である。したがって、光路差 Δ' は Δ と等しくなるので、干渉縞の移動は生じないことになる。

なんとも奇妙な仮説だが、この式は Maxwell による電磁気学の方程式と矛盾しないように、苦肉の策として考えだされたものだ。エーテルがあったとしても、Lorentz-FitzGerald 収縮が事実だとすれば、Michelson-Morley の実験でエーテルが検出されない理由になる。エーテルの影響で光の速さが変化したとしても、実験装置の目盛りが、その変化を打ち消すように変化するので観測に矛盾が出ない、という説明である。

2.1.3 特殊相対性理論

Lorentz-FitzGerald 収縮仮説は、当時、物理学の主流となった考え方だったが、根拠はあっても原理や理由はなく、現象を説明するための理屈とも言えた。これに対して Einstein は、Maxwell 方程式から導かれる電磁波（光）の速度がどのような座標系でも定数 c として登場することになる簡単な原理として、

- 物理法則は、異なる慣性系でも同じ形である（**相対性原理**）
- 光速はどのような座標系からみても一定である（**光速不変の原理**）

の2つの仮定を提唱した(1905年)。すなわち、光速 c が誰から見ても一定となることを原理として受け入れ、物理法則を構築する、という立場である。

この考えをもとにして、2つの慣性系 S と S' を結ぶ関係式を求めよう。これは、Galilei の相対性原理 (1.1) に変わるべき式であり、結論は、**Lorentz 変換**と呼ばれるものである。

法則 2.2 (Lorentz 変換)

ある慣性系 $S(t, x, y, z)$ から $+x$ 方向に速度 v で運動する慣性系 $S'(t', x', y', z')$ への座標変換は

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z. \end{aligned} \quad (2.7)$$

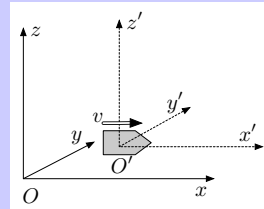


図 5: 静止している xyz 座標系と、速度 v で x 方向に移動している $x'y'z'$ 座標系。

となる。この式は、行列とベクトルの積として、次のようにも書ける。

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{-v/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

課題 2.3. 【Lorentz 変換の導出】

座標系 $S(t, x, y, z)$ と $S'(t', x', y', z')$ があり、 S' は S の $+x$ 方向に速度 v で運動している。時刻 $t = t' = 0$ のとき、両者は一致していて、この瞬間に光が原点から放たれた。光の波面は速さ c であらゆる方向に球面状に進む。したがって波面は

$$s^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0 \quad (2.9)$$

をみます。光速不変の原理によれば、同じことが S' 系でも成り立つので

$$s'^2 \equiv (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - (ct')^2 = 0 \quad (2.10)$$

となる。相対性原理によれば、 S も S' も慣性系であれば、どちらも等速直線運動は等速直線運動になる。したがって、 t', x', y', z の値は、 t, x, y, z の1次式で表されるはずである。座標系の運動が x 方向に限るとすれば、 $y' = y, z' = z$ としてよく、座標系間の対応とし

ては,

$$x' = Ax + Bt, \quad t' = Dx + Et \quad (2.11)$$

とした関係を求めればよい. ここで, A, B, D, E は v のみの関数である.

問 1 S' の座標原点 O' ($x' = 0$) は, 速さ v で x 軸の正の方向に動いている. このことから, A, B, v の間に成り立つ条件を求めよ.

問 2 (2.9) と (2.10) と $y' = y, z' = z$ から

$$x^2 - (ct)^2 = (x')^2 - (ct')^2$$

が成り立つが, この式に (2.11) を代入し, すべての x, t に対して成り立つための A, B, D, E の条件を求めよ.

問 3 以上の関係式から, A, B, D, E を求めよ. ただし, $v \rightarrow 0$ のとき, $t' \rightarrow t, x' \rightarrow x$ となることに注意して符号を決めよ. (すなわち, (2.7) を導出せよ)

なお, (2.7) を t, x, y, z について解き直すと,

$$t = \frac{t' + (v/c^2)x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z' \quad (2.12)$$

となる. これは当然ながら, (2.7) で v を $-v$ に置き換えたものになっている.

Einstein は, 自ら仮定した原理に基づいて (2.7) を導出したが, Lorentz と Poincaré も異なった観点から同じ式を前年に出していた. Einstein の導出には大きな意義があるが, 現在では (2.7) は, Poincaré が命名した **Lorentz 変換** と呼ばれている.

Einstein 流に **Lorentz 変換** を解釈するならば, 物理法則は, 時間座標を含めた 4 つの座標の変換の元で議論されるべきであり, 「時間の進み方は運動状態によって異なる (相対的である)」ことになる. そして時間の進み方が異なることを許すことは, 「同時刻」という概念が消滅することになる.

Lorentz 変換 から, Lorentz-FitzGerald 収縮を導くこともできる. しかし, それは時間の進み方の絶対性に基づいた解釈とも言える.

2.1.4 速度の合成

慣性系 S に対して, x 方向に速度 v で移動する慣性系 S' がある. S と S' で観測される速度 u_x, u'_x の関係を導こう. ここで, $u_x = \frac{dx}{dt}, u'_x = \frac{dx'}{dt'}$ である.

Newton 力学では課題 1.2 でみたように, 座標系の移動速度 v を単純に加える (減じる) ことで表現できた. しかし, Lorentz 変換のもとでは時間座標も変換されるので注意しなければならない. (2.7) より,

$$dt' = \frac{dt - (v/c^2)dx}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad dx' = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz. \quad (2.13)$$

であるから,

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - vdt}{dt - (v/c^2)dx} = \frac{u_x - v}{1 - (vu_x/c^2)}, \\ u'_y &= \frac{u_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - (vu_x/c^2)}, \quad u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - (vu_x/c^2)} \end{aligned} \quad (2.14)$$

となる. 同様に, (2.12) から次の合成則を得る.

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + (vu'_x/c^2)}, \quad u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + (vu'_x/c^2)}, \quad u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + (vu'_x/c^2)}. \quad (2.15)$$

課題 2.4. 【速度の合成】

S' 系が S 系に対して x 軸方向に速度 $v = \alpha_1 c$ ($0 \leq \alpha_1 \leq 1$) で動いている. S' 系で $u'_x = \alpha_2 c$ ($0 \leq \alpha_2 \leq 1$) の移動物体を観測した. S 系での速度 u_x はどうなるか. グラフを用いて論ぜよ.

課題 2.5. 【加速度の合成】

加速度 $a_x = \frac{du_x}{dt}$ と $a'_x = \frac{du'_x}{dt'}$ の間の変換は

$$a_x = \left(\frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + u'_x v / c^2} \right)^3 a'_x \quad (2.16)$$

となることを導け.

2.1.5 Lorentz 不変な量, 固有時間

Newton 力学の運動方程式は, Galilei 変換のもとで全く同じ形になった (共変である, という). Maxwell 方程式は, Lorentz 変換のもとで共変である. Newton の運動方程式は Lorentz 変換に対して共変ではない. 光速に近い運動を論じるときには時間座標の進み方が座標系によって顕著に異なることになるので, Newton 力学を相対論的に書き直す必要が生じる.

ここからは, (ct, x, y, z) の座標を (x^0, x^1, x^2, x^3) として表し, まとめて x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) とする記法を用いる. 空間座標だけを表すときは x^i ($i = 1, 2, 3$) とする.

質点が運動し, 4 次元座標上で, x^μ から $x^\mu + \Delta x^\mu$ へ移動したとする. この移動距離を

$$\Delta s^2 \equiv -(c\Delta t)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 \quad (2.17)$$

として定義する. こうして定義された距離 Δs は, Lorentz 変換によって対応する座標においても

$$\Delta s^2 \equiv -(c\Delta t')^2 + (\Delta x'^1)^2 + (\Delta x'^2)^2 + (\Delta x'^3)^2 \quad (2.18)$$

となって不変に保たれることが簡単に示されることから, この 4 次元的不変距離 Δs^2 をパラメータとして座標を表現していくことを考えよう.

課題 2.6. 【 Δs^2 が Lorentz 不変であること】

Δs^2 が不変量であることを示せ.

いま, 各座標系で測る時間を Δt , 各座標系で静止している観測者の測る時間を $\Delta\tau$ とする. 座標系で静止していれば, $\Delta x^i = 0$ であるから,

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta\tau^2 \quad (2.19)$$

となって, $\Delta\tau$ も Lorentz 不変な量になる. 以降は, τ を**固有時間** (proper time) と呼び, 不変な力学をつくる上での時間パラメータとする.

法則 2.3 (特殊相対性理論から導かれる時間の遅れ)

観測者が測定している時間間隔 (固有時間間隔) を τ とすると, 速度 v で運動する座標系では

v	$\sqrt{1 - (v/c)^2}$
0.1 c	0.99499
0.5 c	0.86603
0.9 c	0.43589
0.99 c	0.14107

時間間隔 t は

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - (v^2/c^2)} \Delta t \quad (2.20)$$

となる。ここで、 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ は質点の 3 次元的速度である。すなわち、時間の進み方（1 秒の長さ）は、速度 v をもつほど長く（ゆっくりと）なる。

時間の進み方の違いは、速度 v が光速 c に近づくと顕著になる。日常生活のレベルでは両者の差はわずかであり、特殊相対性理論の効果を考慮しなくても問題がない。

$$\begin{aligned} c &= 3.0 \times 10^8 \text{ m/s} \\ G &= 6.7 \times 10^{-11} \\ &\text{m}^3/\text{kg}/\text{s}^2 \\ M_E &= 6.0 \times 10^{24} \text{ kg} \\ R_E &= 6.4 \times 10^6 \text{ m} \end{aligned}$$

課題 2.7. 【運動状態による時間の進み方の遅れ】

地上で静止している人に比べて、どれだけ時間が遅れるか。

1. 時速 250 km の新幹線に 2 時間乗車したとき。
2. 時速 900 km の旅客機に 10 時間乗車したとき。
3. 時速 900 km の旅客機に 1 万時間乗務したとき。
4. 高度 400 km を周回する ISS に 1 年間乗務したとき。
5. 高度 20000 km を周回する GPS 衛星の測る 1 秒。

[確認] 必要ならば $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ を $|x| \ll 1$ としてマクローリン展開せよ。

地球を周回している国際宇宙ステーション (ISS) は、秒速 7.7 km ほどの速度だが、この速度は光速の 10 万分の 2.6 でしかないため、たとえ 1 年間 ISS に乗っていたとしても、残念ながら地球上との時間差は、わずかに 0.01 秒程度でしかない。しかし、光速の 80% で飛ぶロケットならば、ロケット内の 1 年は地球上の 1 年 8 ヶ月になる。もし光速に近い速さで飛ぶロケットが開発されたならば、ロケットに乗った人はなかなか歳をとらないことになる。

2.1.6 4 元速度, 4 元加速度

固有時間 τ を用いて、質点の位置の変化率と速度の変化率をそれぞれ

$$u^\mu \equiv \frac{d}{d\tau} x^\mu(\tau), \quad a^\mu \equiv \frac{d}{d\tau} u^\mu(\tau) = \frac{d^2}{d\tau^2} x^\mu(\tau) \quad (2.21)$$

として定義し、4 元速度 (four-velocity)、4 元加速度 (four-acceleration) と呼ぶ。これらは Lorentz 不変な量である。

法則 2.3 を用いると、

$$u^0 = \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad u^i = \frac{v^i}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta \equiv \frac{|\mathbf{v}|}{c} \quad (2.22)$$

となり、

$$-(u^0)^2 + (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 = -c^2 \quad (2.23)$$

となるので、 u^μ には (2.23) の条件が常につく。すなわち、 u^μ の独立な成分は 3 つであることに注意しよう。この関係は、(2.17) と (2.19) から直接導くことができる。

課題 2.8. 【 u^μ と a^μ は直交】

ベクトル u^μ と a^μ は「直交」することを (2.23) より示せ。ただし、ここでの「直交」とは各成分の積の和において、時間成分の前の符号を負とする

$$-u^0 a^0 + u^1 a^1 + u^2 a^2 + u^3 a^3 = 0$$

を意味する。

また、4元運動量 (four-momentum) として、

$$p^\mu \equiv mu^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (2.24)$$

を定義する。 p^μ にも拘束条件

$$-(p^0)^2 + (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 = -(mc)^2 \quad (2.25)$$

がつくので、独立な成分は3つである。

2.1.7 相対論的運動方程式

Newton の運動方程式は、3つの空間成分をもつベクトル形式の式で、

$$m \frac{dv^i}{dt} = F^i \quad \text{あるいは} \quad \frac{dp^i}{dt} = F^i \quad (2.26)$$

の形である。これを4元速度や4元運動量に置き換えた

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} = F^\mu \quad \text{あるいは} \quad \frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu \quad (2.27)$$

と拡張することで、Lorentz 不変な運動方程式が与えられる。ただし、4元力 (four-force) の F^0 成分は、 u^μ と F^μ が直交する条件から定められるものとする。

ここで、 p^0, F^0 の意味を考えてみよう。 $p^\mu = (p^0, p^i)$ の空間成分 p^i は Newton 力学での運動量である。 $F^\mu = (F^0, F^i)$ の空間成分 F^i は Newton 力学での力である (式 (2.26))。いま、

$$\frac{d}{dt}(cp^0) = cF^0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = F^1 v^1 + F^2 v^2 + F^3 v^3 \quad (2.28)$$

となり、右辺は力 F^i が単位時間に質点に与える仕事の意味をもつ。したがって、 cp^0 はエネルギーの意味を持つことになる。すなわち、

$$cp^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad \text{質点のエネルギー } E \quad (2.29)$$

$$p^i = \frac{mv^i}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad \text{質点の運動量 } \mathbf{p} \quad (2.30)$$

と解釈することができる。

(2.29) は、 $v = 0$ の場合でも質点はエネルギーを持つことを示す。エネルギー E を v/c で展開すると、

$$E = m \frac{c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m \frac{v^4}{c^2} + \dots \quad (2.31)$$

となる。第2項は運動エネルギーだが、第1項は物体が静止しているときにも持つ質量エネルギーである。第3項以下は相対論的補正項と言える。

[確認]
 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ を $|x| \ll 1$ としてマクローリン展開することによって、(2.31) を導け。

法則 2.4 (静止質量エネルギー (エネルギーと質量の等価性))

$$E = mc^2 \quad (2.32)$$

質量エネルギーの式は、質量とエネルギーが等価であることを示している。原子核を構成する陽子と中性子は、結合するときに、組み合わせごとに決まった結合エネルギーを必要とするが、分裂や結合する機会が与えられると、不必要となる結合エネルギーを式 (2.32) の量だけ熱放射の形で放出する。これが原子核融合や原子核分裂反応の由来である。

2.2 特殊相対性理論の応用：未来へ行くタイムトラベル

2.2.1 光時計を使った思考実験

法則 2.3 から、移動する速さが大きい観測者は、静止している観測者に比べて 1 秒の長さが長いことがわかった。このことを数式を使わずに理解する方法として、光時計を使った思考実験がある。

光速度一定の原理を使うと、光を使って正確な時刻が測れるはずだ。図 6 のように、光を往復させる装置をつくり、光の往復回数で時間を測る光時計を考えよう。

光時計をロケットに載せたとしよう。ロケットが飛ぶと、光時計の筒を 1 往復するために光が進まなければならない距離が増える。地球上で止まって見ている人の光時計が 1 秒刻んだときでも、ロケット内の光時計の光はまだ 1 往復できていない。しかし、ロケットの中の人にとっては、光時計が 1 秒を刻む時刻が正確のはずだ。

どちらも矛盾無く考えようとするならば、地球上の 1 秒とロケット内の 1 秒の刻み方がずれていると考えれば良い。つまり、**時間の進み方は、観測する人によって変わる**ことになる。ロケットの速度が速いほど、地球の 1 秒に比べてロケットの 1 秒は遅くなる。

Newton 力学では、時間はどこでも一定に流れてゆくと考えた。絶対時間があると人々は思っていた。しかし、Einstein は時間座標も空間座標と同じであり、どちらも変化し得るものと考えたのだ。

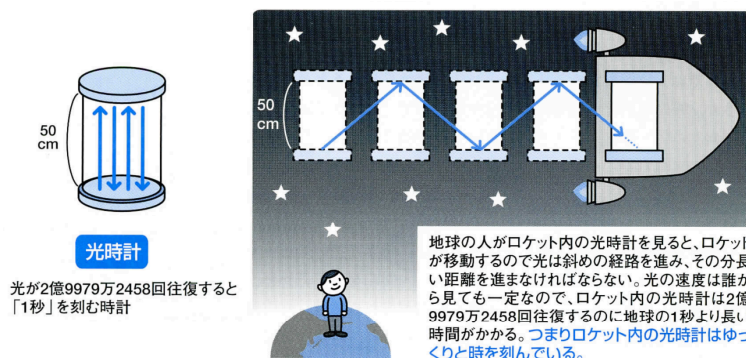


図 6: 光時計をロケットに載せて時間を測ると、地上のときより 1 秒の刻みは遅くなる。ロケット内では、光を基準に 1 秒を測るので、地上よりもロケット内の時間の進みは遅くなる。

2.2.2 寿命が伸びる素粒子

この結論が正しいことは素粒子の寿命が伸びることで確認されている。宇宙から地球へ飛び込んでくる高エネルギーの素粒子（宇宙線という）のうち、陽子が地球の大気圏でミュオンと呼ばれる素粒子に変化する反応がある。ミュオンは不安定な素粒子で、寿命が 100 万分の 2.2 秒ほどしかなく、すぐに電子・電子ニュートリノ・ミュニュートリノの 3 つに分解してしまう。ミュオンが光速度で飛んだとしても、最長で 600m 位移動すれば、分解してしまうことになる。地球の大気圏の厚さは、およそ 20 km あるから、地表でミュオンを見ることは極まれのはずだ。

ところが、地表では、宇宙から降り注ぐミュオンが多数観測されるのである。ミュオンが光速度に近い速さで移動するため、特殊相対性理論の効果でミュオン自身の感じる時計が遅くなっているのだ。観測から、ミュオンの寿命が 50 倍程度に伸びていることがわかっていて、このデータから、逆にミュオンの飛んでくる速さを計算することができている。

素粒子物理の実験では、スイス・ジュネーブ郊外にある素粒子物理学の研究所セルン (CERN†) のラージ・ハドロン・コライダー (LHC‡) をはじめとして、世界各地で加速器を利用して、高

† Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire (欧州原子核研究機構)

‡ 通称エルエイチシー、Large Hadron Collider, 地下 100m に造られた一周が 27km もある世界最大の円形加速器。

速で粒子を衝突させる実験が行われている。どの実験でも素粒子の寿命が、特殊相対性理論の予言通りに伸びていることが確認されている。

2.2.3 時間の遅れとパラドックス

以上の考察から、未来へ行くタイムトラベルは可能！と言える。光速に近いロケットが実現すれば、そのロケットで旅行して帰ってくるだけでタイムマシンになるのだ。

光速に近い速さで運動する人は、時間の進み方が遅くなる。そして、素粒子実験でそれが事実であることは確認されている。—しかし、少し考えてみると奇妙なことが起こりそうだ。ここでは2つのパラドックスを考えてみよう。

互いに「相手の時計が遅れている」というパラドックス

- a 速度は相対的なものだ。地球からロケットを見れば速度は v でも、ロケットから地球を見れば地球は速度 $-v$ で動いていることになる。
- b だから、地球の人はロケットの時計が自分より遅く進むと観測し、ロケットの人は地球の時計が自分より遅く進むと観測する。
- c だから、お互いどちらも「相手の時計が遅れている」と主張する。

さて、どこかに間違いはあるだろうか。

いずれも正しく、間違いはない。お互いどちらも「相手の時計が遅れている」と主張する。……しかし、こんな矛盾した主張は両立するのだろうか。

両立するのである。図7に理由を解説した。基準とする時計が地球上とロケット内で互いに違うのに、我々がなんとなく「同じ1秒後を比較しているはずなのに…」と設定を錯覚してしまうところが落とし穴である。相対性理論では、「同時」という概念は捨てなければならない。

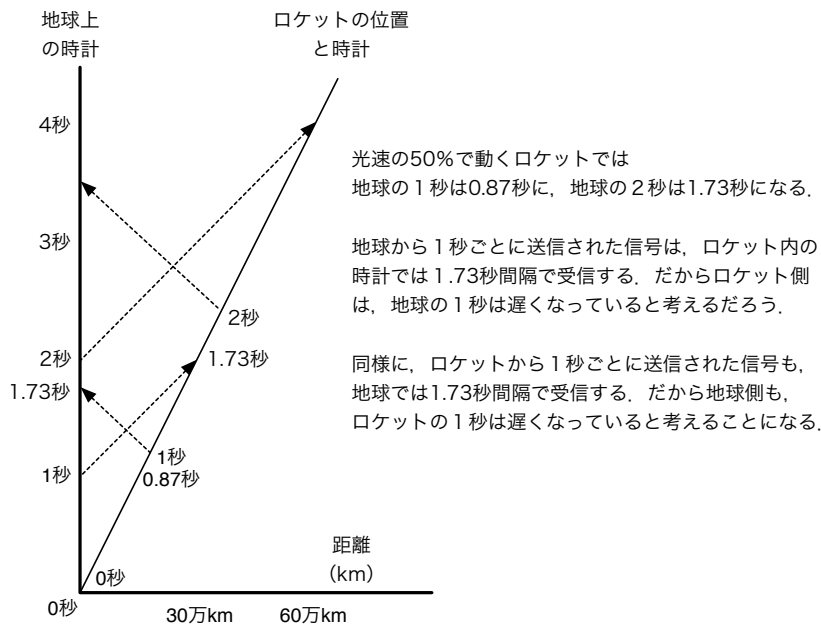


図7: 「相手の時計の方が遅れている」という主張はどちらも正しい。

どちらも相手の時計の進み方が遅いと主張することを認めると、次の「双子のパラドックス」が生じる。

双子のパラドックス

- a 双子の兄と弟がいて、兄が光速の 80% のスピードで飛ぶロケットに乗って宇宙旅行に出た。目的地の星の近くまで一直線に飛び、すぐに引き返して戻ってきた。
- b ロケットで飛行中は、どちらも相手の時計の進み方が遅いと観測していた。
- c それでは、地球時間で 30 年経って戻ってきた兄と、地球に残っていた弟が再会するとき、どちらが若いのか。

この答えはロケットに乗っていた兄である。地球で 30 年経過していても、兄にとっては 18 年しか経過していない。

兄と弟の決定的な違いは、兄が地球に戻ってくるために途中で向きを変えることだ。向きを変える瞬間は、等速運動ではなく加速度運動になる。加速度運動をしている状況があると、Lorentz 変換を単純に適用するわけにはいかなくなる。

実際に 2 人の間で経過する時間が違うことを次のように示そう。兄は 12 光年離れた距離を光速の 80% のロケットで往復してくるものとする。ロケットが折り返す時刻は、地球上の時計で 15 年後だ。しかしロケット内の時計では時間の遅れの計算式から 9 年後になる。

さて、お互いに 3 年ごとに安否を気づかう信号を送ることにしよう。図 8 に示すように、互いの距離が離れれば、光が伝わる時間もかかるので、受信するまでの時間差も生じる。兄が遠ざかるとき、兄の信号は弟には 9 年ごとに届く。弟の 3 年目の信号も兄には 9 年後に届く。（ここまではお互いの時計は遅くなっているなあ、と感じるはずだ）。ところが、兄が進路を変更すると、弟も兄もお互いの信号を毎年受信することになる。（これで兄が帰路についたことが確実にわかる。）兄が動いているために、光のドップラー効果が起こったのだ。

一回止まって逆向きに動き出すのも、円軌道を描きながら速度を落とさずに向きを変えるのも加速度運動である。

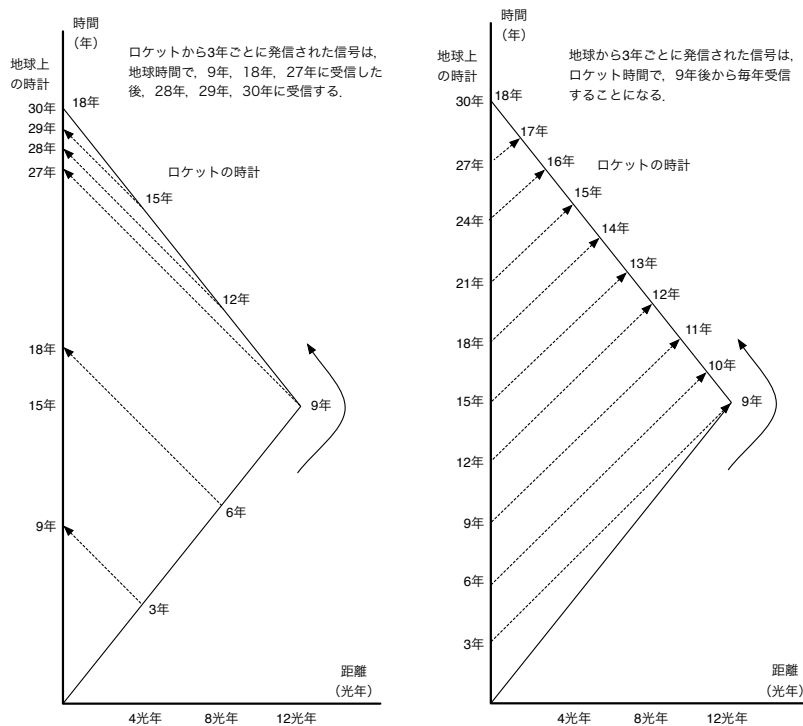


図 8: 双子のパラドックスの正しい理解

どちらも相対的に同じ間隔で信号を受信することになるが、結果として全行程の経過時間は兄の方が短い。地球では 30 年が経過しているが、戻ってきた兄にとって、地球は 12 年後の世界だ。このロケット旅行は、未来へ到達するタイムトラベルになったのである。

2.2.4 高速ロケットにおける時間の遅れ

光の進む速度はどの座標系で見ても一定である、とする原理に立脚する特殊相対性理論によれば、観測者によって時間の進み方が相対的に異なってくる。その違いは、法則 2.3 に示した関係になる。

いま、速度 v で運動する宇宙船に乗っている座標系での固有時間間隔 τ を考えると、静止系での時間間隔 t と経過時間の対応を考えると、法則 2.3 より、

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - (v/c)^2} \Delta t \quad (2.33)$$

の微小時間を足し合わせてゆけばよく、

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - (v/c)^2} dt \quad (2.34)$$

などとなる。

いま、宇宙船が地球から一定加速度 a' で加速していくとする。この加速度 a' は宇宙船で測定したものだとすると、地球で見る加速度 a は、式 (2.16) より

$$a = (1 - (v/c)^2)^{3/2} a' \quad (2.35)$$

となる。この加速運動中の、宇宙船内での経過時間 T'_1 のとき、地球から見た宇宙船の速度を v_1 とすると、

$$T'_1 = \int_0^{T'_1} d\tau = \int_0^{T_1} \sqrt{1 - (v/c)^2} dt = \frac{1}{a'} \int_0^{v_1} \frac{1}{1 - (v/c)^2} dv = \frac{c}{2a'} \log \frac{1 + v_1/c}{1 - v_1/c} \quad (2.36)$$

の関係が得られる。また、このとき地球の経過時間 T_1 は

$$T_1 = \int_0^{T_1} dt = \int_0^{v_1} \frac{dv}{a'(1 - v^2/c^2)^{2/3}} = \frac{v_1}{a' \sqrt{1 - v_1^2/c^2}} \quad (2.37)$$

となる。

課題 2.9. 【浦島問題】

浦島に住む太郎は、助けた亀に誘われて竜宮城に行き、そこで楽しく過ごして帰ってきた。太郎の時間では往復も含めて 25 年の旅だったのだが、帰ってきてみると、住んでいた村には誰も知り合いがおらず、自分が旅立ってから約 75 年が経過した未来の村にいることを知った。

思い出してみると、自分の村から竜宮城までは宇宙船に乗っていた。相対性理論の効果で自分の感じる時間の進み方が、村の時間よりもずっとゆっくりだったため、約 50 年分の差が生じたと思われる。

(1) 宇宙船の加速・減速を考えず、一定速度 v_0 の乗り物だとする。地球での経過時間に対して、宇宙船内の時間の進み方が $1/3 (= 25/75)$ のとき、宇宙船の速度 v_0 は光速の何倍の大きさか。

実際の宇宙船は徐々に加速し、徐々に減速する。人間が快適に過ごせるように、宇宙船は地表の重力加速度と同じ $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ のまま一定で加速できるとする。

宇宙船は $T'_1 = 3$ 年間の間、この加速度 g を保って加速し、最高速度に到達したのち等速運動で $T'_2 = 1$ 年間航行し、 $T'_3 = 3$ 年間加速度 $-g$ で減速して、合計 7 年かけて竜宮城に着いたとする。ここでの年数・加速度は宇宙船内で測定した値である。加速運動している期間は、式 (2.36) より、静止系で測る最高速度 V_{\max} と

$$T'_1 = \frac{c}{2g} \log_e \frac{1 + V_{\max}/c}{1 - V_{\max}/c} \quad (2.38)$$

の関係が成り立つので、 V_{\max} が求められる。また、式 (2.37) よりこの期間に相当する地球での経過日数が求められる。

- (2) 宇宙船の最高速度 V_{\max} は光速 c の何倍か。 $c = 299792458 \text{ m/s}$ として計算せよ。
 $e^{6.19} = 485.6$ である。
 - (3) 宇宙船が最高速度 V_{\max} に到達したとき、地球では何日経過しているか。
 - (4) 宇宙船が最高速度 V_{\max} で航行している間、地球では何日経過しているか。
 - (5) 宇宙船が竜宮城に 7 年かけて到達したとき、地球では何日経過しているか。
 - (6) 浦島太郎が竜宮城に 11 年滞在し、再び 7 年かけて地球に戻ってきたとき、地球では何年経過しているか。
-

2.3 特殊相対性理論の応用： $E = mc^2$

$E = mc^2$ の式は、原子力発電も、核融合も、星が輝くエネルギー源も説明する最も有名な物理の公式である。

2.3.1 原子核反応と太陽の寿命

■太陽の寿命

太陽系の起源は約 50 億年前と考えられている。物理学がそろい始めた 19 世紀末、太陽のエネルギー源は何か、という大問題が解けずにいた。(当時、太陽の年齢は 3 億年以上ということしかわかっていなかったが) 単純に化学反応で説明するには寿命が長すぎているのだ。Kelvin と Helmholtz は「太陽は大きな重力で収縮しているため、周囲に熱を放出する」という説を考えたが、それでも太陽年齢は 2000 万年以上にはならなかった。

決定的な理論となったのは、Einstein が 1905 年に提出した相対性理論による、 $E = mc^2$ という式である。この式から、1920 年、天文学者 Eddington は、太陽内部での水素からヘリウムへの核融合の可能性を指摘している。太陽が水素でみだされていることが 1925 年にわかり、1930 年代に物理学者 Chandrasekhar と Bethe によって核融合の理論が進むと、太陽のエネルギー源が核融合反応であることがようやく明らかになる。

ケルヴィン卿
William Thomson
(1824-1907)
ヘルムホルツ
H.L.F. von Helmholtz
(1821-94)
エディントン
Arthur S. Eddington
(1882-1944)
チャンドラセカール
Subrahmanyan Chandrasekhar (1910-95)
[1983 年ノーベル物理学賞]
ベーテ
Hans A. Bethe (1906-2005) [1967 年ノーベル物理学賞]

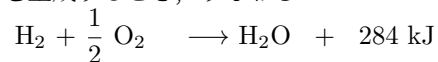
課題 2.10. 【太陽の寿命】

太陽のエネルギー源が核融合反応であることで太陽の寿命が計算できることを確かめよう。

- (1) 地球は太陽から $R = 1.5 \times 10^8$ km 離れている。地球の位置で太陽から受けるエネルギーは、単位面積あたり単位時間あたり約 1.37×10^3 J/s/m² である (太陽定数という)。太陽が 1 秒間に放射するエネルギーはいくらか。

まず、普通の化学反応で太陽の放射エネルギーを説明してみよう。

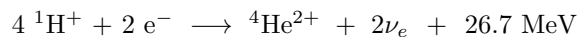
- (2) 水素が酸素と化合し水を生成するとき、すなわち



の反応では、水素 1 mol (2g) あたり、 2.8×10^5 J の熱エネルギーが発生する。太陽が水素燃焼によって放射しているとすれば、1 秒間あたり、どれだけの水素を消費するか。

- (3) 太陽の質量 M_\odot は、 $M_\odot = 2.0 \times 10^{33}$ [g] で、そのうち、70% が水素である。太陽が水素燃焼によって放射しているとすれば、太陽は何年間輝いているか。

この計算をすると、あきらかに太陽の寿命は短い。そこで、太陽のエネルギー源が水素がヘリウムになる核融合反応であるとしよう。太陽の中心では、p-p チェインと呼ばれる連鎖的な核融合反応がおきている。p は陽子 (proton) のことで、何段階かある反応をまとめると、



となる。すなわち、水素 1 g あたり、 6.4×10^{11} J のエネルギーを生み出すことができる。

- (4) 太陽の寿命はどれだけと考えられるか。
-

2.3.2 原子核反応

原子核反応は、日常の生活範囲で見られるような化学反応（分子どうしが組み替えを起こす反応）と違い、元素が他の元素に変化する高エネルギー反応である。

反応の前後で、全質量が m だけ減るならば、それに相当する mc^2 のエネルギーが運動あるいは熱エネルギーに転化されることになる。化学反応では、反応の前後の質量差は無視できるほど小さい（全質量の 10^{-8} %程度）が、原子核反応ではその効果が顕著に現れる（全質量の $0.1 \sim 1$ %程度）。

原子核反応には、重い原子核が軽い原子核に分裂する反応（核分裂）と、軽い原子核どうしが衝突して一つの重い原子核になる反応（核融合）の2種類がある。

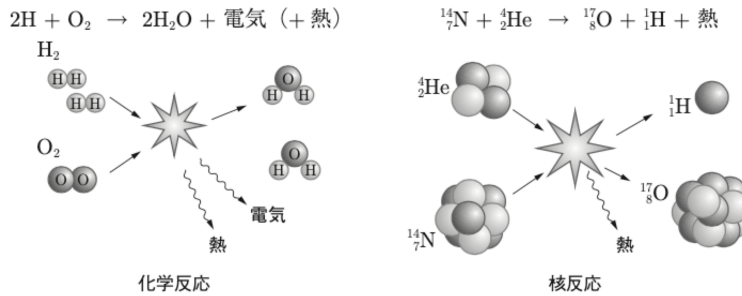
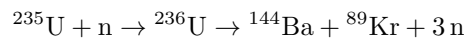


図 9: 化学反応は実験室レベル。核反応は、原子爆弾や水素爆弾、原子力発電や太陽の中心。エネルギーレベルがまったく異なる。

■核分裂

ウランが核分裂する可能性を初めて指摘したのは、ドイツ人の Hahn と Strassmann で、1938 年のことだった。そしてはじめて応用されたのは、残念ながら原子爆弾であった。代表的な核分裂の反応式に、原子爆弾の内部で生じる、ウラン 235 がバリウムとクリプトンに分裂する

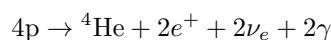


がある。n は中性子 1_0n である。式の両辺で質量数は保存していても、それぞれの原子核を作る結合エネルギーの総和の差が、質量公式 (2.32) にしたがって放出されることになる。

反応式からは、中性子を介して連鎖反応が起きることがわかる。原子爆弾は、ウラン 235 を 100% 近くまで濃縮し、連鎖反応により一挙に爆発を引き起こす。現代の原子力発電では、上記の反応を利用して、発生する熱エネルギーで蒸気を作り、タービンを回して発電する。人工的に核反応を制御するために、ウラン 235 を 3% から 5%（残りはウラン 238）に濃縮したものをを用いている。

■核融合

核融合は、太陽など恒星が輝くエネルギー源である。星は、星間ガスが収縮してできた水素分子の分子雲が種となって誕生すると考えられている。分子雲が重力の作用によってさらに高密度に収縮し、温度上昇により核融合反応に点火する。星の内部で起こされる水素の燃焼過程には主経路がいくつかあるが、結果的に



という形にまとめられる。 e^+ , ν_e , γ は、それぞれ陽電子、電子ニュートリノ、光子である。陽子 p は、反応の途中でも生成されるので、これも連鎖反応になる。核融合反応は、水素爆弾の原理でもある。平和利用として、核融合炉による発電も研究されているが、反応が開始するのに必要なエネルギー（しきい値）が高く制御技術も難しいため、実用化されるまでにはまだ遠い。

核分裂 (nuclear fission)

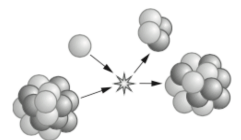


図 10

広島に投下された原子爆弾で核分裂を起こしたのは、爆弾に詰められていたウラン 235 (10~35 kg) のうち、わずか 1 kg 弱だったそうだ。

核融合 (nuclear fusion)

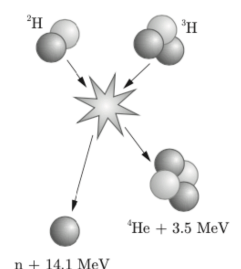


図 11

■核分裂と核融合はどこまで進むか

ところで、分裂・融合のどちらでも原子核反応が進行する理由は、鉄⁵⁶Feが、もっとも安定な原子核だからだ(図12)。よく、「結合エネルギーのもっとも大きい原子核は鉄⁵⁶Feである」という記述を見かけるが誤りである。ニッケル⁶²Niが最大である。原子核の安定度は結合エネルギーではなく、一核子あたりの質量で決まる。鉄⁵⁶Feは、「一核子あたりの質量がもっとも小さい」ので安定なのである。

ガスが収縮することで始まる星の燃焼は鉄⁵⁶Feやニッケル⁶²Niの合成までは確実に進む。逆に言うと、核融合が進んで星の中心に鉄ができれば、それ以上は星は燃えることができずに、冷えていくことになる。

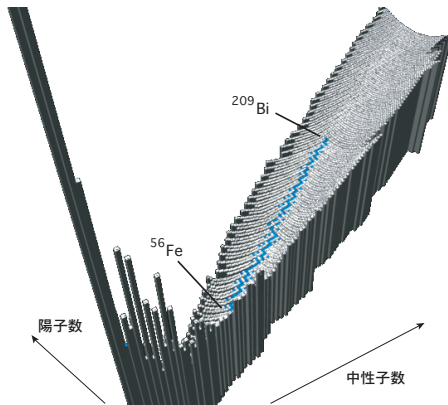


図12: 同位体を含め、存在すると考えられる原子核について、中性子数と陽子数の平面に、一核子あたりの質量偏差を高さにして表現した図。安定な核はこの図の「谷」に相当する部分にあり「ハイゼンベルグの谷」と呼ばれる。鉄⁵⁶Feは、谷底に位置する。(『人類の住む宇宙 [第2版]』(シリーズ現代の天文学 第1巻, 岡村定矩他編, 日本評論社, 2017年)より。)

2.3.3 星の一生

星は、宇宙空間に散らばった塵やガスが集まって燃え始める。ビッグバンの火の海からできあがった宇宙の物質は、約75%の水素と、25%のヘリウム、そしてごく微量の重水素・ヘリウム3とリチウムとからできていた。

宇宙が膨張によって温度を下げ、膨張速度も緩やかになると、これらの物質は重力によってだんだん収縮を始める。宇宙で一番はじめに誕生した星はどのようなものだったのかには諸説あるが、これらの物質が重力で収縮していったことは確実である。

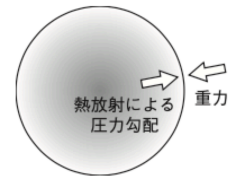


図13: 星の大きさは、内側から押し出そうとする圧力と、外側から押し込めようとする重力が釣り合うところで決まる。

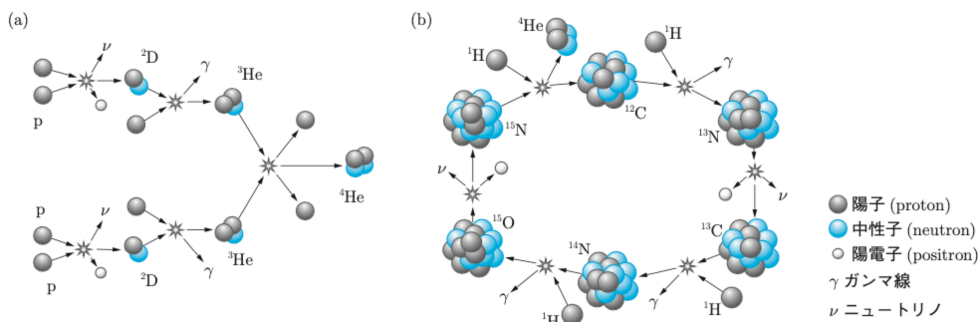


図14: (a) 星の内部では核融合反応により、次第に原子番号の大きな元素が合成されていく。(b) 質量の小さな星の内部で発生するppチェーンと呼ばれる反応。(c) 質量の大きな星(太陽の1.5倍以上)の内部で発生するCNOサイクル。温度が1000万度以上だとCNOサイクルが支配的になる。

■星の燃焼は核融合反応

物質が多く集まると、中心部分は圧縮されて加熱する。そして、温度が1500万度を超えると、水素の核融合反応が始まり、星は燃えて、水素からヘリウムを合成し始めることになる。

核融合反応は、星全体の巨大な質量が及ぼす重力により、中心部分を押し込む圧力によって引

き起こされる。星の質量が大きいほど、この重力による中心圧力は大きくなり、水素はこの重力に打ち勝って燃え広がろうとするために、余計に激しく燃焼することになる。星（恒星）の一生を決めるのは、どれだけの質量があるか、そしてどのように燃えていくかの2つの要素だ。巨大な星は、核燃料の消費もはやく、数万年くらいの寿命しかないが、小さな星は現在の宇宙年齢の数倍も燃焼し続ける可能性がある。

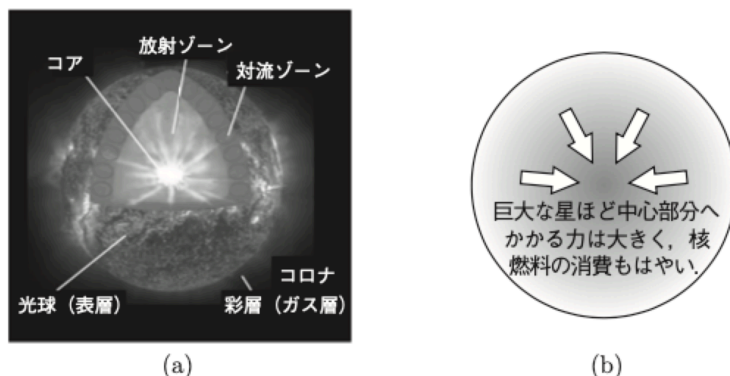


図 15: (a) 星の内部では核融合反応により、次第に原子番号の大きな元素が合成されていく。(b) 星の寿命は大きさで決まる。

水素を失った星は、コア内での核反応が一旦終了する。星の中心から外側に向けて熱放射による圧力がなくなるので、放射圧と重力のバランスがくずれ、それ以外に保とうとする力がはたらないために、それまで内側に落ち込みたくても落ち込めなかった質量が重力によってコアに向けて一気に落下してコア崩壊を引き起こす。コアが崩壊すると、コアでは再び圧力が大きくなり、もう一度加熱される。そして、1 億度に到達すると、ヘリウムから炭素や酸素が合成される核融合反応が始まる。

ラッセル
Henry N. Russell
(1877-1957)
ヘルツシュプリング
Ejnar Hertzsprung
(1873-1967)

太陽は、宇宙の中では典型的で平均的な星である。Hertzsprung と Russell が独立に発見した星の分類表（Hertzsprung・Russell 図、図 16）は、恒星の進化の様子を示した図でもある。大部分の星が主系列星と呼ばれるところに位置するが、太陽はその中でも典型的な位置にある。

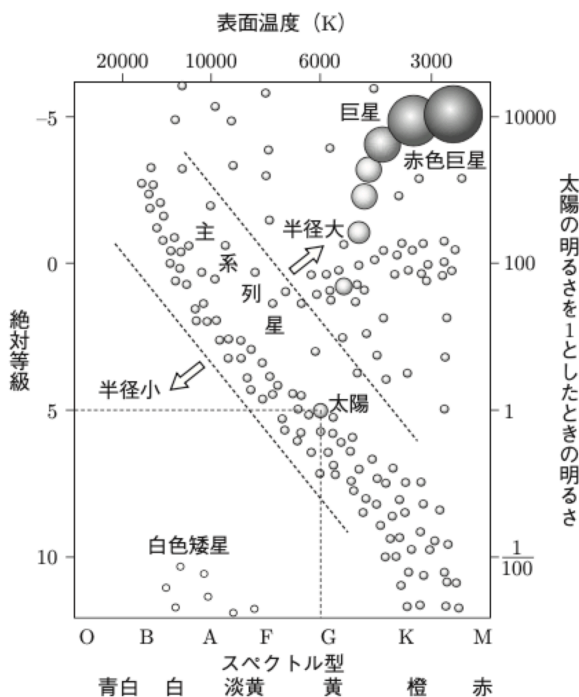


図 16: ヘルツシュプリング・ラッセル図 (HR 図) 横軸は星の色 (表面温度)、縦軸は星の明るさ (絶対等級) で星の分布を示した図。左上から右下にかけて多くの星が列をなしており、これらを主系列星という。太陽は主系列星の中心にあり、典型的な星であることがわかる。高密度だが暗い白色矮星は、主系列星の下側に分布している。

■星の最期

このようにして、星は核融合反応を繰り返し、次第に重元素を合成していく。しかし、鉄まで合成されると、この反応は進まなくなる。鉄は元素の中でもっとも安定だからだ。そうになると、星は燃えるものを失って冷え始めることになる。

もともと星の大きさを決めているのは、内側へ押し込もうとする重力と、外側へ押し出す熱放射のつり合いだった。星が核融合反応を進めて、自らの質量をエネルギーに変えていくと、星はどんどん軽くなるために、重力は弱くなる。そのため、押し出す力が大きくなって星は巨大化していく[†]。中心部に鉄を合成して、これ以上燃えるものを失った星は、こんどは外側へ押し出す力を失う。そうになると、支えを失った広がったガスは中心へ向かって一気に収縮を始めることになる。

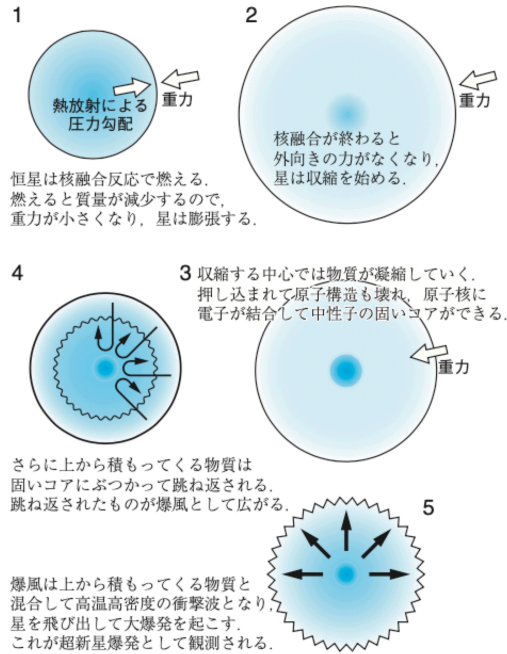
ここで、星の運命が次のように分かれる。

- 星の質量が太陽程度であれば、星はゆっくりと冷却し、電子どうしの反発力（電子の縮退圧）で支える高密度な星、**白色矮星**になる。およそ地球の大きさに太陽質量の 1/4 程度が凝縮する星である。
- 星の質量が太陽の 1.4 倍以上あると、電子では支えられない。星は重力崩壊を起こし、急激につぶれてゆき、中心部の鉄の原子は押しつぶされて電子と陽子が合体して電気的に中性になる。中性子だけの塊になり、**中性子星**になる。半径 10km ほどに太陽程度の質量が詰め込まれた非常に高密度な星である。
- もっとたくさんの物質が中心部の中性子コアに重力崩壊してきたらどうなるだろうか。ものすごい速度で落下してきた物質は突然硬い中性子のコアにぶつかるとはねかえされることになる。これが**超新星爆発**だ。超新星爆発の後には、中心部には中性子星が残されるか、あるいは中性子も潰されて**ブラックホール**と呼ばれる光さえも脱出できない強い重力の塊になると考えられている。ブラックホールになり得るのは、星の質量が太陽の 25 倍以上のときだと計算されている。

■鉄より重い元素の由来

多量の物質が高密度の小さな領域に集まって一度に大きなエネルギーが解放されることになり、この瞬間に鉄以上の原子が形成されることになる。元素の由来を簡単にまとめておこう。

ガスが収縮することで始まる星の燃焼は鉄 ^{56}Fe やニッケル ^{62}Ni の合成までは確実に進む。その後、ビスマス ^{209}Bi までは中性子捕獲反応・S-プロセス (slow process) により、重い星の中心核で合成可能であると考えられている。星は燃料を使い果たした後は、星は重力崩壊を起こし急激につぶれてゆく。星の質量によって、最期の姿が、白色矮星か中性子星かブラックホールになる（星の最期の状態を決めるには、次章で述べる一般相対論も必要になる）。地球上に ^{209}Bi 以上の原子番号を持つ元素は、超新星爆発あるいは中性子星合体の時の R-プロセス (rapid process) で作られたと考えられている。



3 一般相対性理論

3.1 Einstein 方程式・・・重力場の方程式

特殊相対性理論の議論は、加速する運動状態を含んでいなかった。10年をかけて Einstein が導いた一般相対性理論は、重力加速する運動の起源は（万有引力の根源は）時空が質量の存在によってトランポリンのようにゆがむことだ、という理論である。地球や太陽などの天体のまわりの時空は、天体がないときに比べてわずかにゆがむ。このアイデアを、Einstein は、Riemann 幾何学を空間と時間の 4 次元時空に適用した。時空が曲がる具合を示すのは、座標系上での微小距離間隔を示す計量 (metric) $g_{\mu\nu}$ である。以降では、座標ベクトルを $x^\mu = (ct, x^1, x^2, x^3)$ と表そう。添字 μ は 0, 1, 2, 3 を順に動いて、それぞれの成分を表すものとする。

平らな空間 (Minkowski 空間) では、2 つの時空点の距離 $(ds)^2$ は、2 点間の座標の差 $c dt, dx, dy, dz$ を用いて

$$(ds)^2 = -(cdt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad (3.1)$$

とする。計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を使って

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

と表すことにする。

空間が曲がっている場合、計量テンソルを関数として一般化して $g_{\mu\nu}(x)$ とする。時空の 2 点間の距離は、

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu, \quad (3.3)$$

としよう。計量 $g_{\mu\nu}(x)$ は添字の入換えに対して対称 $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ であり、4 次元時空なら 10 成分存在する。

Einstein は、計量 $g_{\mu\nu}$ が、質量分布によって決まると考え、弱い重力場の極限で Newton 力学に一致するように、重力場の方程式を導いた。

法則 3.1 (重力場の方程式 (Einstein 方程式, 1915 年))

重力の正体は、時空の歪みである。その関係は、次の式で表される。

$$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R}_{\text{時空の歪み}} = \frac{8\pi G}{c^4} \underbrace{T_{\mu\nu}}_{\text{物質の分布}} \quad (3.4)$$

左辺は Riemann 幾何学に基づいて時空がどのように曲がっているのかを表している。右辺は物体がどのように分布しているのかを表す量である。

詳しい説明は省略するが、曲率を計算する手段は、Christoffel 記号 $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \sum_{\beta=0}^3 \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} \right) \quad (3.5)$$

を定義し、Riemann 曲率テンソル $R^\mu_{\nu\alpha\beta}$

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma_{\nu\beta}^\mu}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_{\nu\alpha}^\mu}{\partial x^\beta} + \sum_{\sigma=0}^3 \Gamma_{\sigma\alpha}^\mu \Gamma_{\nu\beta}^\sigma - \sum_{\sigma=0}^3 \Gamma_{\sigma\beta}^\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma \quad (3.6)$$

ミンコフスキー
Hermann Minkowski
(1864-1909)

を計算することで与えられる。Riemann 曲率テンソル (3.6) 式の添え字の一部を縮約した次の量も用意しておこう。

$$\text{Ricci テンソル} \quad R_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=0}^3 R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} \quad (3.7)$$

$$\text{Ricci スカラー} \quad R = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (3.8)$$

添字が上についた $g^{\mu\nu}$ は, $\sum_{\mu=0}^3 g^{\mu\nu} g_{\mu\sigma} = \eta^{\nu}_{\sigma}$ を満たすテンソルである。

Einstein 方程式 (3.4) を解くということは, 答えとして, 時空がどのように曲がっているかを表す計量 $g_{\mu\nu}$ を求めること (曲がった時空を求めること) である。例えば,

- 全空間に何も物質がなければ ($T_{\mu\nu} = 0$ ならば), 解は次式のような平坦な時空 (ミンコフスキー時空) になる。

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.9)$$

$$\text{あるいは} \quad = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (3.10)$$

2 行目の式は, 空間座標 (x, y, z) を球座標 (r, θ, φ) で表現したものである。

- 全空間で 1 ヶ所にだけ静止した質量 M があると, 解は次式のような Schwarzschild 解になる。

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{a}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (3.11)$$

ここで,

$$a = \frac{2GM}{c^2} \quad (3.12)$$

は, Schwarzschild 半径 (または重力半径) と呼ばれるもので, この解は (球対称・静的な) ブラックホールを示している。 $r = a$ の半径の球面はブラックホールの境界で, この内側からは, 光の速度をもってしても脱出することができない。この計量から, 重力の強いところでは, 時間の進み方が遅くなることがわかる。(浦島効果の解説にある式 (3.19) 参照)

- 時空全体が一様で等方的であると考え, さらに, 時空が 1 種類の流体物質でみたされるとすれば, 解は Friedman・Lemaitre・Robertson・Walker 解 (FLRW 解) になる。

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right\} \quad (3.13)$$

この解は, 膨張する時空 (宇宙) を示している。

課題 3.1. 【Schwarzschild 解の導出】

(3.11) を Einstein 方程式から導出しよう。球対称時空の計量 $g_{\mu\nu}$ として

$$ds^2 = -e^{p(r)} c^2 dt^2 + e^{q(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (3.14)$$

の形を仮定する。以下では

$$x^0 = ct, \quad x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \varphi \quad (3.15)$$

とする。 $g_{\mu\nu}$ の成分で 0 でないものは以下のものである。(添え字の上付き・下付きに注意せよ。)

シュヴァルツシルト
Karl Schwarzschild
(1873-1916)

Schwarzschild 半径
(Schwarzschild radius)

フリードマン
Alexander A. Friedman (1888-1925)
ルメートル
Georges Lemaitre (1894-1966)
ロバートソン
Howard P. Robertson (1903-1961)
ウォーカー
Arthur G. Walker (1909-2001)

$$g_{00} = -e^{p(r)}, \quad g_{11} = e^{q(r)}, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \theta,$$

$$g^{00} = -e^{-p(r)}, \quad g^{11} = e^{-q(r)}, \quad g^{22} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}$$

物質分布は、原点以外は真空とする (Einstein 方程式の右辺 $T_{\mu\nu} = 0$ とする). $p(r), q(r)$ は Einstein 方程式を解いて決める. 但し, $r \rightarrow \infty$ で式 (3.10) の平坦な時空の計量に一致させるため, この極限で $p(r), q(r)$ は 0 になるとする.

(1) Christoffel 記号 $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ のなかで 0 でないものを求めよ.

(2) $T_{\mu\nu} = 0$ なので, (3.4) は, $R_{\mu\nu} = 0$ を解くことと等価になる. 独立な方程式を 3 本導け.

得られた式から $\frac{dp}{dr} = -\frac{dq}{dr}$ が得られ, 積分して $p = -q$ となる ($r \rightarrow \infty$ で p, q は 0 だから積分定数は 0).

(3) p, q を求め, g_{00}, g_{11} を求めよ.

(1) 次の成分がゼロではない.

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} \frac{dp}{dr}, \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} e^{p-q} \frac{dp}{dr}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \frac{dq}{dr}, \quad \Gamma_{22}^1 = -re^{-q},$$

$$\Gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \theta e^{-q}, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta,$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

(2) 独立な方程式は次の 3 個となる.

$$R_{00} = e^{p-q} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d^2 p}{dr^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{dp}{dr} - \frac{dq}{dr} \right) \frac{dp}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dp}{dr} \right\} = 0 \quad (3.16)$$

$$R_{11} = -\frac{1}{2} \frac{d^2 p}{dr^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{dp}{dr} - \frac{dq}{dr} \right) \frac{dp}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dq}{dr} = 0 \quad (3.17)$$

$$R_{22} = 1 - e^{-q} \left\{ 1 + \frac{r}{2} \left(\frac{dp}{dr} - \frac{dq}{dr} \right) \right\} = 0 \quad (3.18)$$

($R_{33} = \sin^2 \theta R_{22}$, これ以外の $R_{\mu\nu}$ は 0.)

(3) 式 (3.18) に代入して

$$1 - e^p \left(1 + r \frac{dp}{dr} \right) = 1 - \frac{d}{dr} (re^p) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr} (re^p) = 1$$

積分定数を $-a$ とすれば,

$$re^p = r - a \quad \Rightarrow \quad e^p = 1 - \frac{a}{r}, \quad e^q = e^{-p} = \left(1 - \frac{a}{r} \right)^{-1}$$

3.2 一般相対性理論の応用：重力赤方偏移

3.2.1 強い重力場にいる観測者の時間の遅れ

大きな質量があると時間と空間がゆがむ、と結論する一般相対性理論によれば、強い重力のはたらく空間では時間の進み方 $\Delta T'$ は、平坦な空間（重力がはたらかない空間）での時間の進み方 ΔT にくらべて遅くなる。重力が強いほど時間の進み方が遅くなるという現象。重力場中での光の波長が伸びることから**重力赤方偏移**と呼ばれる。

単純に、大きな質量 M があるとき、その質量から距離 r の位置での時間の進み方は、Schwarzschild 計量 (3.11) の式で、時間部分の比較を平坦な時空の計量 (3.10) と比較することによって、

$$\left(1 - \frac{a}{r}\right) (\Delta T)^2 = (\Delta T')^2 \quad (3.19)$$

の関係がある。ここで、 a は Schwarzschild 半径 (3.12) である。

重力赤方偏移の検証は、異なる慣性系間での実験を比較することを意味しており、「重力場中の実験と等加速度運動する系での実験は区別できない」とするアインシュタインの等価原理を検証することに相当する。この等価原理が破れていると、一般相対性理論の出発点が危ぶまれることになる。

OnePoint

ブラックホールの近くにいるロケット内の時間の進み方は地球より遅い。つまり、このロケットは未来に行くタイムマシンになる。

課題 3.2. 【浦島問題 2】

浦島太郎は、自分の旅立った日と帰還した日を調べると、10 日ほどさらに余計に未来に来ていることに気がついた。竜宮城にいた 11 年の間に、地球との時間差 10 日が生じた理由として、竜宮城が大きな質量の星にあったためではないかと考えた。地球の重力はとても弱く平坦な空間とみなして良いとすれば、式 (3.19) に応じた時間差が竜宮城で生じたことになる。

(1) 式 (3.19) にて、竜宮城のある星と地球との時間の進み方を比較することにより、比 a/r の値を求めよ。

ここで求めた比 a/r は、相対性理論が有効となるスケールを表すが、ここでは非常に小さい。そのために、地球上の重力と同じような環境が竜宮城での得られていたと考えられる。以後、星の中心からの距離 r を星の半径の位置 R としよう

(2) 竜宮城のある星の質量 M と半径 R の比 M/R を求めよ。

(3) 竜宮城の重力加速度が地球と同じ g だったとすると、竜宮城のあった星の質量と半径はいくらか。

太陽質量 $M = 1.98 \times 10^{30}$ kg に対しては、 $a = 2.95$ km である。
 \Rightarrow §3.3

3.2.2 GPS 測地システムのしくみ

一般相対性理論の正しさを示す例を 3 つ挙げたが、どれも天体の話題で日常生活とは関係のないレベルである。相対性理論は、実生活には役に立たない理論だとアインシュタインも考えていた。しかし、現代の私たちは、相対性理論の世話になっているものがある。カーナビや携帯電話に装備されている GPS 測位システムだ。

GPS はグローバル・ポジショニング・システム (Global Positioning System) の頭文字で、アメリカが (当初は軍用に) 開発した「現在位置が正確にわかるシステム」である。GPS 衛星は、正確な時刻を刻む原子時計を備え、地上から 20000 km の上空を秒速 4 km (1 周 11 時間 58 分) で周回している。地球上のいつでもどこにいても、上空に 4 機以上が飛んでいるように同じ衛星が 30 機配置されている。

GPS 受信機は、上空の GPS 衛星からの信号を受信して三角測量によって現在地を計算する

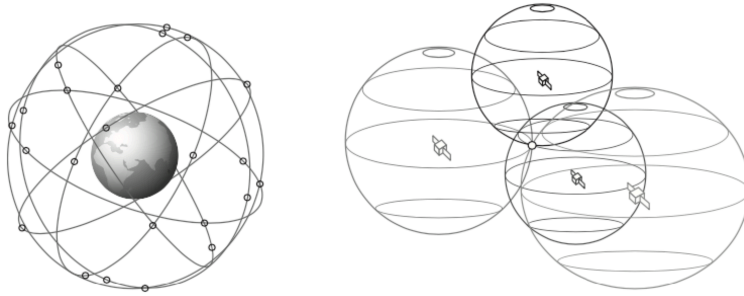


図 18: GPS システム. 2 台の GPS 衛星からの電波を使うと重なり合う部分は一つの円周上, 3 台からの電波では 3 点に絞られ, 4 台の衛星からの情報を使うと 1 点に絞られる.

しくみだ. 人工衛星には原子時計が積まれていて, 時間の情報が常に地球に向けて発信されている. 地上の受信機で 3 機の電波を受信できれば, 3 点測量の技術から受信機のいる位置が判明する. 4 機からの電波を受信できれば, より正確になる. ところが, 特殊相対性理論によれば, 運動する観測者の時計の進み方は静止している観測者よりも遅くなり, 一般相対性理論によれば, 重力の強いところでは時間の進み方は遅くなる. ここでは, GPS 衛星からの電波にどれだけの影響が出るのかを考えてみよう.

課題 3.3. 【GPS の時間補正】

まず, 特殊相対性理論の効果が, どれだけ影響するのかを考えよう. 法則 2.3 にあるように, 速度 v で運動する観測者の時計の進み方 $\Delta\tau$ は, 静止している人の時間の進み方 Δt に対して

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \Delta t \quad (3.20)$$

となる. 万有引力定数 G と地球の質量 M の積を $GM = 3.986 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$, 光速 c は $c = 299792458 \text{ m/s}$ である.

- (1) 地球上にいる人は自転している. 赤道上にいる人の自転速度 v_0 はいくらか. 地球の半径 R は $R = 6380 \text{ km}$ と自転周期 T は $T = 24 \text{ hr}$ とする.
- (2) GPS 衛星は, 高度 $R_1 = 20184 \text{ km}$ で地球を周回している. 速度 v_1 はいくらか.
- (3) 静止している座標系での 1 秒は, 地表で Δt_0 , GPS 衛星で Δt_1 とする, Δt_0 , Δt_1 と静止している座標系での 1 秒との差はどれだけか.
- (4) (3) で求めた差が, 1 日分蓄積されるとどれだけの差になるか.

次に一般相対性理論の効果が, どれだけ影響するのかを考えよう. 地球の重力による時間の進み方 $\Delta T'$ は, 浦島効果での説明式 (3.19) にあるように, 平坦な時空での時間の進み方 ΔT に対して

$$\Delta T' = \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}} \Delta T \quad (3.21)$$

で与えられる. ここで, r は天体中心からの距離である.

- (5) 静止している座標系での 1 秒は, 地表で ΔT_0 , GPS 衛星で ΔT_1 とする. ΔT_0 , ΔT_1 と静止している座標系での 1 秒との差はどれだけか.
- (6) (5) で求めた差が, 1 日分蓄積されるとどれだけの差になるか.

特殊相対性理論の効果と一般相対性理論の効果을合わせて考える.

- (7) これらの補正を行わないと, 1 日で GPS 測距はどれだけずれるか.

以上より、相対性理論の効果を含めて考えないと、GPS 測距は 1 日で 11.5 km もずれてしまい、全く使い物にならないことがわかる。

一般相対性理論は、巨大な質量の天体が及ぼす時間と空間のゆがみを議論する学問であるため、発見したアインシュタインさえも、日常生活に影響を与えることはない、と考えていた。しかし、100 年後の我々は、GPS のような精密な装置を利用することになり、時空のゆがみを考慮しないといけない世の中になっているのだ。アインシュタインもさぞ驚いていることだろう。

3.2.3 光格子時計を用いた重力赤方偏移の検証実験

現在、「秒」の単位は、セシウム原子を用いたマイクロ波時計を用いて定められている。精度は 10^{-16} である。光格子時計 (Optical Lattice Clock) は、レーザーで作られた格子中に多数の原子を閉じ込め、原子時計の 1000 倍の精度を目指す時計である。2001 年に香取秀俊によって提案された [4, 5]。提案から 10 年あまりで、セシウム原子時計の精度を 2 桁上回る 18 桁精度が実現され、現在も改良が続けられている。高精度化、小型化 (可搬化)、長時間駆動化などである。

一般相対性理論によると、18 桁の精度があれば、地球表面では、1 cm の高度差がもたらす重力ポテンシャルによる時間の遅れを検出できることになる。このことを利用して、光格子時計で時間を測定することによって標高を計測する「相対論的測地」が東京スカイツリーを用いて実験された [6]。本節では、その紹介をする。

香取秀俊 (1964-) 光格子時計と命名した本人である。2022 年の基礎物理学ブレイクスルー賞を受賞した。

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}/\text{s}^2,$$

$$M_E = 6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$$

$$R_E = 6.378 \times 10^6 \text{ m}$$

$$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$$

課題 3.4. 【地球表面重力での時間の遅れ】

一般相対性理論によれば、重力ポテンシャル $U(r) = GM/r$ における時間の進み方は、重力のないところの時間刻み幅 dt に対して、 $(1 - \frac{U}{c^2})dt$ となる。地球表面での 1 cm の高度差がもたらす時間の進み方の違いはどれだけか。

■光格子時計の原理

光格子時計は次のようなしくみである。「魔法波長」と呼ばれる特別な波長のレーザー光を干渉させて作った微小空間 (光格子, 図 19) に、レーザー冷却された原子を 1 つずつ捕獲し、原子同士の相互作用が起きないように構造をつくる。そして、これらの原子にレーザー光を当て、光

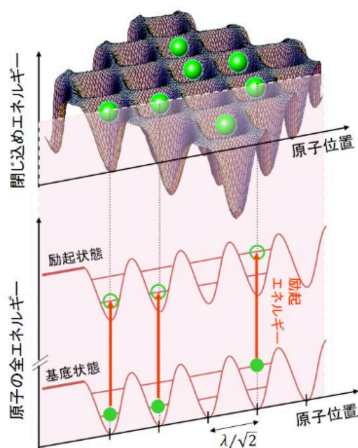


図 19: 光格子時計の模式図。原子 (緑色) がレーザー光の干渉で作られた微小空間 (光格子 (茶色)) の中に捕獲されている。光格子は魔法波長と名づけられた特別なレーザー波長で構成されている。原子の基底・励起状態は、光格子レーザーによって同じ大きさのエネルギーシフトを受けるため、光電場中にあるにもかかわらず、原子の振りの振動数が変化しない。

を吸収する「原子の振り子」の振動数を精密に測定する。この光の振動を数えて、1秒の長さを決める。光格子全体には多数の原子を捕獲できるので、それらの「原子の振り子」の振動数を一度に測定して平均をとることで、短時間で時間を決めることができる。

■スカイツリー実験の概要

この実験は、光格子時計の小型化と可搬化の開発過程の1つの通過点として行われた。装置は図20のものである。長時間安定に動作できるように装置の自動化を図り、かつインターネット経由で遠隔操作が可能なシステムを構築した。2台の可搬型光格子時計を東京スカイツリーの地上階と展望階に設置し、約450メートルの高低差を利用して時計の振り子の周波数を比較することで、重力赤方偏移を計測した。一方、2台の時計の標高差を従来の測量法によっても測定した。時計の重力赤方偏移と、標高差と重力測定によって得られる重力ポテンシャル差を比較することで、一般相対性理論の出発点となる等価原理の検証を行った。

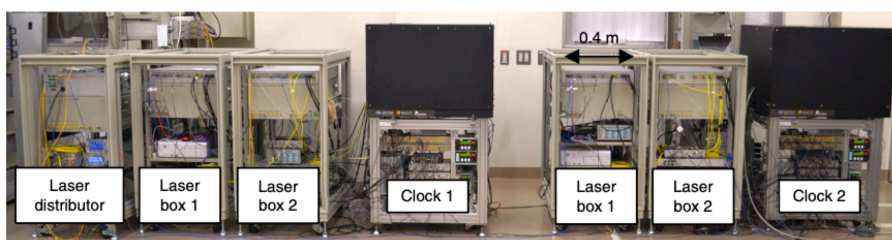


図20: 開発された2台の可搬型光格子時計。レーザー冷却されたSr原子を光格子中に捕獲し、低温に冷却した恒温槽の中で時計遷移を高精度に分光する。時計分光用真空槽、レーザーボックス2台、レーザー分配器からなる。時計分光用真空槽は、磁気遮蔽用のミュンヘンシールド箱内に構築されており、設置場所での環境磁場ノイズを除去できるようになっている。それぞれの時計は、レーザー分配器で分岐された光ファイバーで繋がれており、時計分光、狭線幅冷却、光格子用のレーザー周波数を共有できるようになっている。レーザーボックスの上部には光学系、下部はレーザー電源、制御系のシステムが搭載されている。

図21に実験の概要を示す。それぞれの時計で、スペクトルのピークに常に共鳴するようにレーザー周波数を制御し、共鳴周波数の差を数日にわたって平均化することで、高精度に時計の周波数差 $\Delta\nu$ を計測した。およそ1週間の平均化によって、展望階の時計が地上階の時計よりも相対周波数が $\Delta\nu/\nu = (49337.8 \pm 4.3) \times 10^{-18}$ だけ高い（時間が早く進んでいる）ことが計測された（図21〔右(b)〕）。その後、2台の時計を理化学研究所に持ち帰って、高さをそろえて測定した結果、相対周波数差は $(-0.3 \pm 4.7) \times 10^{-18}$ つまり、計測に使った時計は18桁の精度で一致していることが検証された〔図21〔右(c)〕〕。一方、2台の時計の標高差 Δh を、GNSSとレーザー測距の2つの方法で測定するとともに、重力加速度計を使った重力加速度 g を測定した。この結果から、2台の時計の重力赤方偏移は $g\Delta h/c^2 = (49337.1 \pm 1.4) \times 10^{-18}$ と予想される。これを、前述の時計比較で得られた周波数シフト $\Delta\nu/\nu$ と比較することで、重力赤方偏移を $(1.4 \pm 9.1) \times 10^{-5}$ の精度で検証した。

この成果は、およそ1万キロメートルの高低差を利用するロケット/人工衛星を使った相対論検証実験に迫る精度である。従来より、1万倍高精度な原子時計を使うことで、宇宙実験に比べて1万倍以上少ない高低差で、同等の実験が可能になった。

このような高精度な可搬型光格子時計を使えば、火山活動による地殻の上下変動の監視やプレート運動など、数時間から数年という時間スケールで起こる地殻変動（標高変化）を精密に監視することができるようになる。また、GNSSと補完的に利用できる超高精度な標高差計測・測位システムの確立や、高感度重力計と相補的に用いて地下資源探査、地下空洞、マグマ溜まりの検出など、光格子時計は将来の社会基盤となる可能性を秘めている。

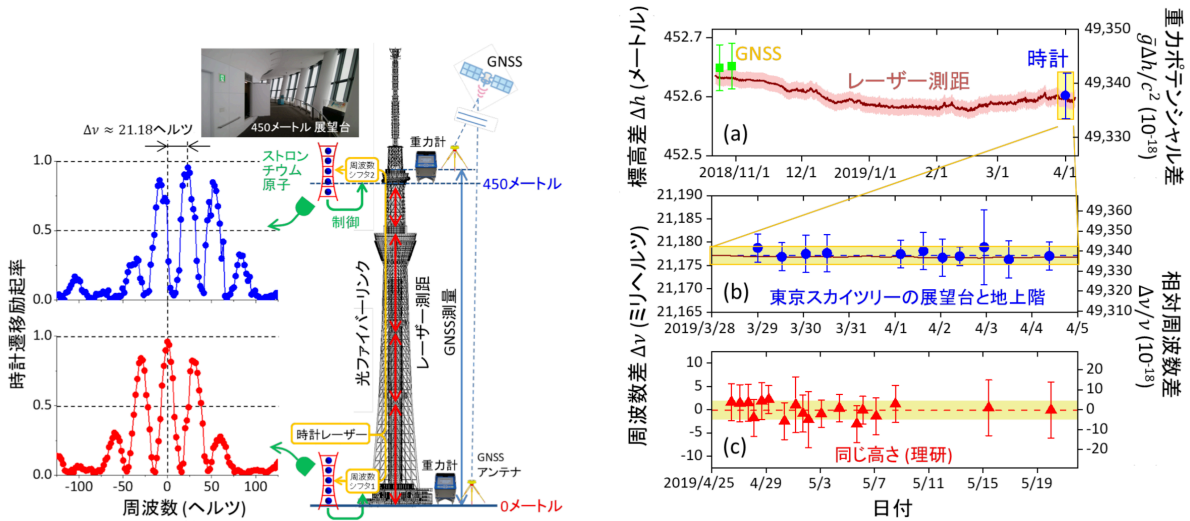


図 21: 東京スカイツリーでの相対論検証実験 ([6])。〔左〕地上階と展望階に設置した 2 台の可搬型光格子時計を光ファイバリンクで繋ぎ、時計遷移の周波数比較を行う。一方、2 台の時計の標高差を従来の測量手法 (GNSS 測量およびレーザー測距) によって計測する。時計遷移をラムゼー分光して得られたスペクトルでは、標高差 450 m に相当する約 21Hz の周波数シフトが観測された。〔右〕2 台の時計の標高差および周波数差の測定結果 (a) 時計比較, GNSS 測量, レーザー測距によって得られた重力ポテンシャル差。各々のデータが誤差内で整合していることが示された。(b) 地上階と展望階に設置した 2 台の光格子時計の重力赤方偏移。(c) 同じ高さに設置した 2 台の時計の周波数差。2 台の時計が 18 桁精度で一致していることが示された。

3.2.4 地球の重力

Newton 重力の問題として、地球の重力の大きさや向きを確認しておこう。

地球上の重力は、地球中心方向を向く万有引力と、地球の自転による遠心力との合力としよう。この他にも、太陽や他の惑星からの万有引力、太陽を公転することによる遠心力など、さまざまな力の総和を私たちは重力としているが、ここではそれらは無視することにする。

課題 3.5. 【地球の重力 1】

地球上の重力は、地球中心方向を向く万有引力と、地球の自転による遠心力との合力である。地球は完全な球であるとして、半径を R 、質量を M 、万有引力定数を G 、自転の角速度を ω とする。

北緯 θ の地表のある点を A とする。点 A は、地球の自転軸から距離 ア だけ離れているので、この半径で円運動をしている。この面を点 A が動く「自転面」と呼ぶことにしよう。点 A において、質量 m の物体にはたらく遠心力の大きさは イ であり、その向きは自転面上で自転軸から外向きである。

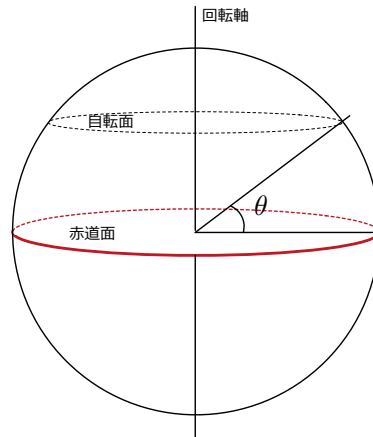


図 22

一方で地球が物体におよぼす万有引力は、地球の形状が球で密度分布が球対称のときは全質量が中心の一点に集中していると考えて良い。したがって、この物体にはたらく万有引力の大きさは ウ であり、その向きは地球の中心方向内向きである。

- (1) 自転軸上の北極点で体重計で m [kg] と表示された人がいる。(体重計の表示は重力の大きさを示しているので m [kgf] と示しているのが正しい)。この人が赤道面で体重計に載るとどう表示されるか。
- (2) 地球の半径として極半径 $R_p = 6356.752$ km を用い、地球質量を 5.972×10^{24} kg、万

有引力定数を $6.67428 \times 10^{-11} [\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2]$, 1日を 87600s とする. 北極点で 100kg と表示された人は, 赤道面ではどう表示されるか.

- (3) 地球の半径として赤道半径 $R_E = 6378.137 \text{ km}$ を用い, 他の数値は (2) と同じとする. 北極点で 100kg と表示された人は, 赤道面ではどう表示されるか.

極半径と赤道半径を比べると, 後者の方が大きい. 地球は少し平べったい楕円体の形 (赤道面が少し膨らんでいる) の天体である. これは自転による遠心力が地球形状を変形させているからと考えられている. 実際に, 地球の形状が扁平であることは, ふりこの周期の違いによってはじめて測定され, ニュートン力学の正しさを示す実証の1つとされている.

課題 3.6. 【地球の重力 2】

地球の形状は, 完全な球であるとする.

- (4) 赤道面で周期が 1s のふりこ時計を製作する. ひもの支点からおもりの重心までの長さはいくらか.
 (5) このふりこ時計を北極点で計測すると, 周期は何秒か.

重力を, 万有引力と遠心力の合力として考えると, 我々が「鉛直方向下向き」に考える方向は地球の中心を向いていない. 同様に「緯度」の表現も, 楕円体を考えるときにはどこの角度を用いているのかに注意を要する. 以下では, 図 23 に示すように, 地心緯度 θ と地理緯度 θ_g を区別しよう. 地理緯度は地球表面上の点から鉛直方向に伸ばした直線と赤道面のなす角度である.

課題 3.7. 【地球の重力 3】

地球を楕円体と考えよう. つまり, 極半径 R_P と赤道半径 R_E をそれぞれ短半径・長半径とする楕円

$$\frac{x^2}{R_E^2} + \frac{z^2}{R_P^2} = 1$$

を z 軸のまわりに回転してできる立体であるとする.

- (6) 地心緯度が θ であるような地表面上の点 A での, 地球自転の回転半径 R_θ はどう表されるか.
 (7) また, この位置での地球中心からの距離 R_O を求めよ.

地心北緯 θ の地表面 A における重力の大きさを求めよう. 地球の中心を O とし, 地球は楕円体であり, 地心北緯 θ での自転半径を R_θ , 地球中心からの距離を R_O とする.

- (8) 万有引力と遠心力の合力の大きさと地理緯度 θ_g (図 23) を求めよ.

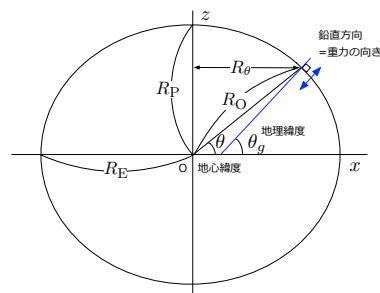


図 23

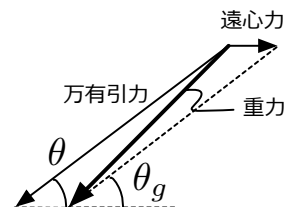


図 24

東京スカイツリーの位置は地心北緯は 35.7 度である.

- (9) R_θ , R_O , 重力加速度の大きさ g を求めよ. また, θ_g と θ のちがいはいくらか.
 (10) 建築物は鉛直方向に造られているとする. 東京スカイツリーの展望台 (鉛直方向で地

表から 450 m) の、地表面からの距離を求めよ.

地球が扁平であることを考えると、実際の万有引力の大きさには補正項が必要となる．遠心力の補正も含めると、重力加速度の大きさは、 θ を用いたときと、 θ_g を用いたときで、それぞれ

$$\begin{aligned} g &= g_e \left[1 + \left(2f - \frac{9}{2}J_2 + m \right) \sin^2 \theta \right] \\ &= g_e \left[1 + \left(\frac{5}{2}m - f - \frac{17}{14}mf \right) \sin^2 \theta_g + \left(\frac{1}{8}f^2 - \frac{5}{8}mf \right) \sin^2 2\theta_g \right] \end{aligned}$$

となる．ここで、 g_e は赤道上での重力加速度の大きさを、 $g_e = \frac{GM}{R_E^2} \left(1 + \frac{3}{2}J_2 - m \right)$ 、 f は扁平率で $f = (R_E - R_P)/R_E$ 、 J_2 は楕円体を考えることによる万有引力の補正項で人工衛星の軌道解析から $J_2 = 1.082626 \times 10^{-3}$ 、 m は自転による補正項で、 $m = \omega^2 R_E^3 / GM$ である．数値を代入すると、

$$\begin{aligned} g &= 9.78108 \left[1 + 0.00518285 \sin^2 \theta \right] \text{ m/s}^2 \\ &= 9.78108 \left[1 + 0.00500588 \sin^2 \theta_g - 0.0000056 \sin^2 2\theta_g \right] \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

となる．スカイツリーの位置での地心北緯を代入すると、 $g = 9.79834 \text{ m/s}^2$ になる．

一方で、実際に東京スカイツリーの高さ 0 m 地点で計測される重力加速度の大きさは、 9.7979441 m/s^2 である．この違いは、「重力異常」とよばれ、地球内部の密度の不均一性に由来する．

3.3 一般相対性理論の応用：ブラックホール

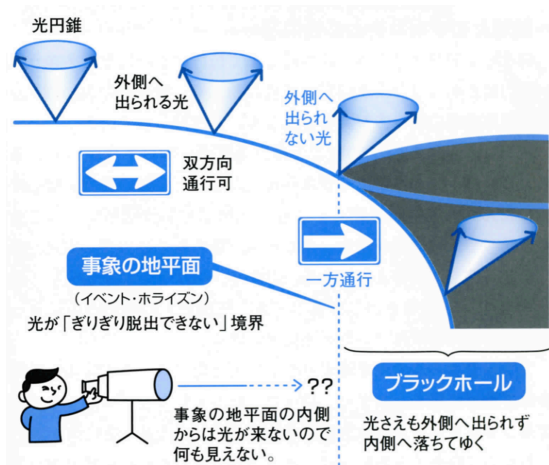
3.3.1 ブラックホール解の発見

面白いことに、Einstein 自身は一般相対性理論を導いたところで満足してしまい、重力場の方程式 (Einstein 方程式) をきちんと解いたのは他の人の功績である。Einstein 方程式を初めて解いたのは、Schwarzschild だった。Schwarzschild は、平坦ではない時空の解を求めようとして、もっとも簡単な計算になるような仮定を置いた。すなわち、時空を球対称・静的 (計量は時間に依存しない)・真空として、時空の中心の一点にだけ質量 M の物体があったとしたときの解を求めた。

得られた解には奇妙な点があった。ゼロ割りで無限大が生じてしまう場所があったのである。その1つは、**Schwarzschild 半径**と呼ばれる $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ のところ、 $r = 0$ のところである。ゼロ割りの割算は無限大となってしまう。物理的に無限大はあってはならない点である。

これは、今日では、**ブラックホール**と命名された時空である。 $r = r_g$ の面は、**事象の地平面**と呼ばれるブラックホールの境界面である。この面より内側では、光速であってもブラックホールから逃れることはできない。 $r = 0$ の点は**時空特異点**と呼ばれる。一般相対性理論が適用できなくなってしまう点である。

ブラックホール
(blackhole)
事象の地平面
(event horizon)



光が到達できるかどうかは、光円錐の振る舞いを考えると分かりやすい。ブラックホールの近くでは外側に放たれた光も内側へ戻ってくることになるので、光円錐が内側を向いている。

図 25: 光が無限遠方へ脱出できない領域をブラックホールと呼ぶ。その境界面を事象の地平面とよぶ。

Schwarzschild 半径 (3.12) の値を計算すると表 1 のようになる。

表 1: Schwarzschild 半径 (対応するブラックホールの大きさ)。質量 M の物体がどの位の半径 R_{Sch} に押し込まれたらブラックホールになるか、という目安。Sgr A* は天の川銀河中心の超巨大ブラックホール。

天体	M	R_{Sch}
地球	$6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$	8.9 mm
太陽	$M_{\odot} = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$	2.95 km
Sgr A*	$4.2 \times 10^6 M_{\odot}$	$1.24 \times 10^7 \text{ km}$

つまり、一般相対性理論は、その解として、一般相対性理論が適用できない特異点を含んでしまうのだ。理論自身が破綻することを予言しているとは、非常に奇妙なことである。

3.3.2 ブラックホールの形成

ブラックホールのような無限に大きな重力を持つ天体は、数式の上からは予言されていたが、天文学者たちが星の進化のシナリオとして認めるまでには長い年月を要した。

■ブラックホールの存在が認められるまで

燃え尽きた恒星は冷え始め、外側に押し出す力 (熱放射) もなくなるため、つぶれてゆく。こ

OnePoint
ブラックホールの事象の地平面で何か特別なことが生じるわけではない。ロケットで知らない間に内側に入ってしまうこともあり得る。

星の一生 \Rightarrow §2.3.3
核融合反応 \Rightarrow §2.3.2

のプロセスを**重力崩壊**という。原子核の電子軌道には排他律があり、いくら詰め込もうとしても限界があるために反発力が生じることになる。このような力を**電子の縮退圧**と呼ぶ。暗く輝く小さな星である**白色矮星**は、電子の縮退圧で支えられた星である。

1930年代、若き Chandrasekhar が、相対性理論と量子論を駆使して白色矮星の星の質量には、太陽質量の 1.4 倍という上限があることを発見した。この結果を受け入れると、この上限値を超える星が重力崩壊をした場合、際限なく潰れていくことになる。

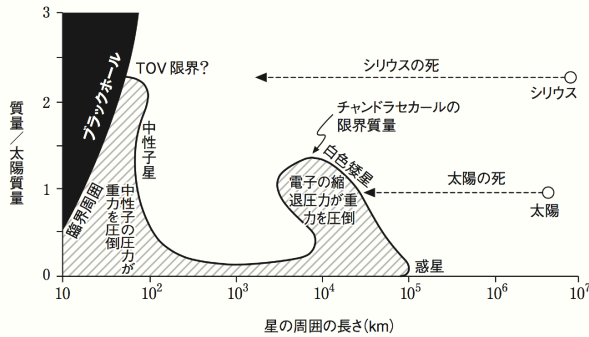


図 26: 横軸に星の半径, 縦軸に星の質量を太陽の質量の何倍かで表した図。燃え尽きた星は、重力によって縮みはじめる。図では右から左へと移動してゆくことになる。電子の縮退圧で支える星を白色矮星といい、中性子の縮退圧で支える星を中性子星という。それぞれの星として支えられる質量には上限値がある。支えられないほど大きな星は、そのまま重力崩壊を続けることになる。

白色矮星を乗り越して重力崩壊する星は、その後、電子が原子核の陽子と合体して中性子になり、中性子の固まりだけの星になる。中性子星の質量にも太陽質量の 2 倍程度という上限値 (TOV 限界†, 核物質の状態方程式が不明なので正確な上限値は不明である) が存在する。つまり、中性子星でも支えきれないほどの大きな星は、その後、無限に小さく重力崩壊していくことが考えられる。ブラックホールとなり得るのだ。

外向きの力がなくなるので、星は潰れはじめる。これを重力崩壊という。燃え尽きた星はまず、自身の重力を電子の反発力 (縮退圧) で支えられるところまで潰れる。ここで支えることができれば白色矮星になる。星の質量が太陽の 8 倍以上あると、星はさらに重力崩壊を起こし、急激につぶれてゆく。中心には中性子の塊ができ、星の崩壊が一瞬止められることがあれば、衝撃波が発生し、外から落下する物質をはね返す大爆発 (超新星爆発) が起きる。そして、中心部には中性子星か、中性子の縮退圧で支えられなければブラックホールが残されることになる。典型的な星の一生は約 100 億年である。

Schwarzschild のブラックホール解は、「球対称・静的」で「真空」という仮定のもとで得られた解だった。その後「球対称・静的」だが「プラスかマイナスの電荷をもつ」仮定のもとで、Reissner と Nordstroem によって解が発見されている (それぞれ、1916 年と 1918 年に別々に発見した)。それから 50 年近く経って、1963 年に Kerr が回転しているブラックホール解を発見した。静止しているブラックホールよりも、回転しているブラックホールの方が現実的に存在していると考えられることから、Kerr 解はその後のブラックホール研究を大きく前進させることになった。

3.3.3 ブラックホールの発見

■はくちょう座 X-1

ブラックホール自身は光を出さないので観測できない。しかし、周囲のガスや星を強い重力で引き寄せることから、間接的に発見することができる。1964 年には、はくちょう座に、強力な X 線を放つ謎の天体 X-1 が発見された。放出されるエネルギーから見積もると、この天体の中心にはブラックホールがあると考えられている。現在では、このようなブラックホールの候補天体は 30 個ほどある。

■いて座 A*

Genzel と Ghez は、それぞれ独立に、私たちのいる銀河 (天の川銀河) の中心に、超大質量

当時天文学の大御所であった Eddington がその結論を嫌って執拗に Chandrasekhar の研究活動を邪魔したというエピソードも知られている。

†TOV は、Tolman-Oppenheimer-Volkoff の 3 人の物理学者の頭文字。

ライスナー
Hans J. Reissner
(1874-1967)
ノルドシュトルム
Gunnar Nordstroem
(1881-1923)
カー
Roy P. Kerr (1932-)

ゲンツェル, Reinhard
Genzel (1952-)
ゲズ, Andrea M. Ghez
(1965-)



図 27: はくちょう座にある X-1 と呼ばれる強い電波源天体は、ブラックホールであると考えられている。右は想像図。ブラックホールは隣の星を吸い込みつつあるが、流れ込む物質は降着円盤を形成し強い X 線を放射する。[NASA のページが提供する画像]

なブラックホールがあることを突き止めた天文観測で、2020 年のノーベル物理学賞を受賞した [7]。銀河の中心は我々から見て天の川の中央にあり、いて座（さそり座の東）の方向にある。銀河の中心部分の手前には、多くの星があって、分解能の高い精密な観測が要求される。しかもガスが濃いために波長の長い近赤外線の領域にある光でようやく観測することができる。

Genzel 率いるドイツのグループはチリにある南天天文台 (ESO) を用いて、そして Ghez 率いるアメリカのグループはハワイにあるケック望遠鏡を用いて、1992 年以来すでに 30 年近く、天の川銀河の中心を継続的に観測してきた。分解能を高めるためには地球の大気による光の揺らぎが問題になる。そこで、2つのグループは当初は露光時間を 1/10 秒ほどの短時間にして何枚も撮影する手法を用いた。Genzel のグループは 4 年かけて、銀河中心付近では、多くの星が激しく動いていることを明らかにする (1996 年)。しかし、短時間露光では、暗い星までは映らない。そこで、Ghez のグループは、**補償光学** (adaptive optics) として提案されていた技術を導入した。これは、地上からレーザー光を望遠鏡の視野に放ち、人工的な星をつくって、その大気の揺らぎを計測する。そして、大気のゆらぎを打ち消すように望遠鏡から得られるデータを修正する技術である (図 29)。この技術によって長時間露光が可能になり、銀河中心の星々を構成する成分や 3 次元的な移動速度がわかるようになった。



図 28: 2020 年ノーベル物理学賞の受賞者。左から Penrose, Genzel, Ghez の似顔絵。ノーベル財団が受賞者発表に用いたもの。

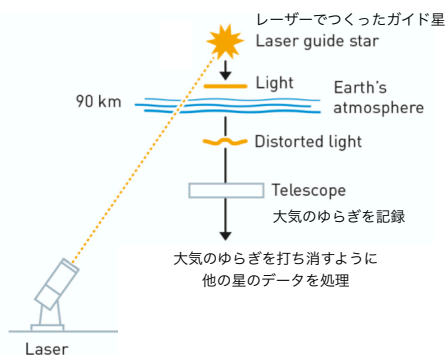


図 29: 補償光学の原理 (ノーベル財団による贈賞理由説明資料を加工した)。

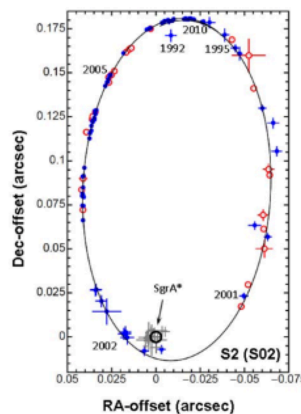


図 30: S2(S02) と名付けられた星は 16 年の周期で楕円運動をしている。焦点に相当する部分が天の川銀河の中心で、その質量が太陽質量の 400 万倍であることが見積もられた。(ノーベル財団による贈賞理由説明資料から。Genzel らの 2000 年の論文を加工したもの)

このようにして得られた星の追跡画像は実に説得力があるものだった。例えば Genzel らが S2

と名付けた (Ghez らは S02 と名付けた) 星は, 16 年の周期で楕円運動をしていたのである (図 30 参照). この事実は, 焦点にあたる場所に巨大な重力源が存在していることを示している, この場所こそが, 電波天文学者らによって命名されていた天の川銀河の中心 (いて座 A スター, Sgr A*) だということがわかる. Genzel らも補償光学の技術を用いて観測し, 2 グループは一致する観測結果を出した.

天の川銀河の中心の位置は, その他の周囲の星の運動からも推測され, 矛盾なく定まるようになった. 質量は太陽質量の 400 万倍と見積もられる. しかも, 光っている天体がなく, 星の運動も予想された速度で移動することから, 点に近い重力源であると考えられる. これらから結論されるのは, 銀河中心には, 超大質量ブラックホールが存在している, ということだ. こうして, 見えないブラックホールの存在がわかるのである.

■分解能

天体観測に登場する用語を少し見ておこう. 大きな望遠鏡ほどより多くの光を集めることができる. これを「口径 (集光部の直径) が大きいほど感度が高い」などという. また, 観測には**分解能**という概念もある. どれだけ細かいものを見分けることができるのか (角分解能), どれだけ短時間のものを見分けることができるのか (時間分解能), どれだけ細かくエネルギーを判定できるのか (エネルギー分解能) などのように使われる. ここでは角分解能に注目しよう.

凸レンズを通過した平行光線は焦点に集まるが, 実際はレンズを通過した多数の光線の重ね合わせになるので, それらの干渉の結果, 焦点面上では大きさをもった像になる. その輝度分布は点像分布関数 (point-spread function; PSF) と呼ばれ, 光源の像は Airy パターンと呼ばれる. 円形レンズの場合, 図 31(b) の δ で与えられる解像限界は, 光の波長を λ , レンズの開口数 (numerical aperture) を A として, $\delta \sim 0.61 \frac{\lambda}{A}$ として与えられる (Rayleigh の解像限界). 望遠鏡の場合は角度で分解能を表すと便利で,

$$\text{分解能 (rad)} = 1.22 \times \frac{\text{波長 } \lambda [\text{m}]}{\text{レンズ口径 } D [\text{m}]} \quad (3.22)$$

$$\text{分解能 (秒角)} = 0.25 \times \frac{\text{波長 } \lambda [\mu \text{ m}]}{\text{レンズ口径 } D [\text{m}]} \quad (3.23)$$

などとなる.

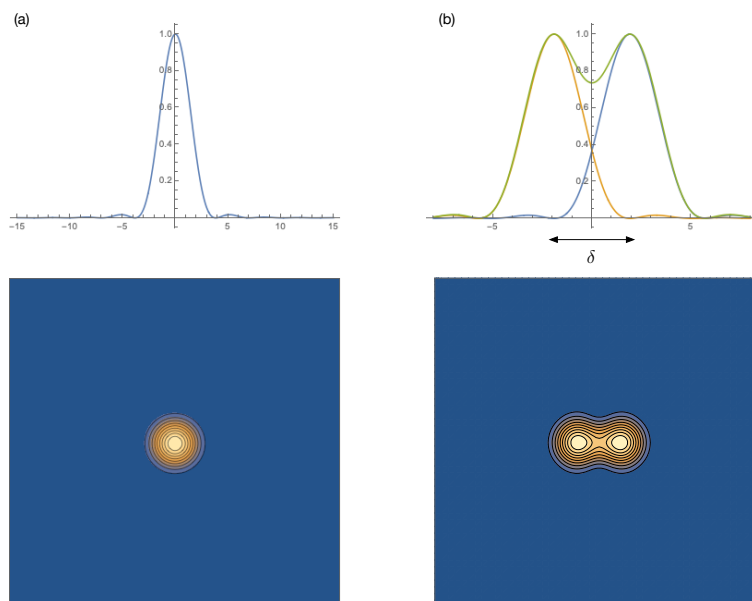


図 31: (a) 焦点付近での輝度分布の例. 円形レンズを想定して, $(2J_1(x)/x)^2$ をプロットした. (b) 近接する輝度分布で 2 つの像が分解できるかどうかは δ の値で決まる.

1 分角は 1 度の $1/60$,
1 秒角は 1 度の $1/3600$
である. 1μ 秒角はその
 10^{-6} 倍である.



図 32: Landolt 環

課題 3.8. 【視力と分解能】

人間の視力は、ランドルト環の空いている部分が見えるかどうかで判定される。5 [m] 離れたところにある直径 7.5 [mm]、切れ目の間隔が 1.5 [mm] のランドルト環が見えれば視力 $V = 1.0$ となる。これは $\theta = 1$ [分角] の角分解能に相当する。視力 V は

$$V = \frac{1}{\theta [\text{分角}]}$$

で換算される。

- (1) 視力 2.0 の人の角分解能はいくらか。
- (2) 人間の目の瞳孔は、直径約 4 [mm] である。可視光 (中央値 550 [nm]) に対する人間の目の分解能はいくらか。このときの視力はいくらか。

天体観測の場合、大気のゆらぎが角分解能を乱す。そのため、星像の乱れ (位相変化) を波面センサーで計測して、その結果に応じて鏡を変形させることで波面を元に戻し、対象となる天体像を回折限界 (diffraction limit) まで復元させる技術が開発された (波面補償光学)。しかし、恒星のような点光源では有効であるものの、銀河のように広がった天体では波面測定が難しい。そのため、レーザー光線で人工的なガイド星をつくり、波面測定を行う技術が開発された。

すばる望遠鏡は、主鏡の口径 8.2 [m] で、集光能力は人間の目の 100 万倍以上。188 素子補償光学系と 90km 上空にレーザー人工星をつくるシステム (ナトリウム D2 線、波長 589 [nm]) により、最大分解能 0.06 秒角を実現している [8]。

3.3.4 ブラックホールの直接撮像の成功

2019 年 4 月、ブラックホールを直接写真に撮ることに成功した、という記者発表が世界各地に同時刻で行われた。イベントホライズン・テレスコープ (EHT) と銘打たれた電波望遠鏡を用いた国際プロジェクトである。日本は、国立天文台 (水沢) のグループが中心となって、プロジェクトをリードした。このプロジェクトが発表したのは、M87 というおとめ座銀河団にある楕円銀河 (約 5500 万光年) の中心にある、超巨大ブラックホールの写真である (図 33 [左])。厳密にはブラックホールは発光しないので、その周囲の天体から発せられた光がつくるブラックホールの影 (ブラックホールシャドウ) である。

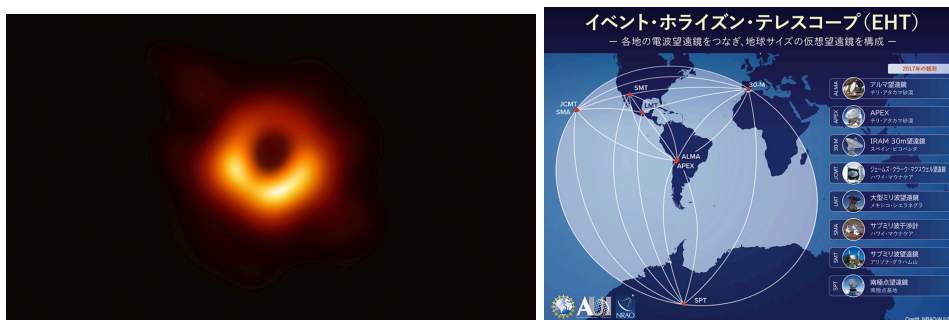


図 33: [左] イベントホライズン・テレスコープ (EHT) のプロジェクトが 2019 年 4 月に発表した、M87 銀河中心ブラックホールの写真。[右] EHT で使われた電波天文台。

電波望遠鏡は口径が大きいほど微弱な電波を集めることができる。日本のグループは、以前から、石垣島・鹿児島・小笠原・水沢の各電波望遠鏡を用いた同時観測を行って、あたかも 1 つの大きな電波望遠鏡での撮像のように解析する超長基線電波干渉計 (Very Long Baseline Interferometry: VLBI) の技術を磨いてきた。EHT は、地球上にある 8 台の電波望遠鏡 (図 33

〔右〕を1週間かけて、M87の中心ブラックホールに向けた。地球サイズの電波望遠鏡となり、20マイクロ秒角の解像度を持つ。これは人間の視力でいうと、300万に相当する。そして、解析に2年を要してブラックホール・シャドウの写真を初めて実現した。

光がある距離以上にブラックホールに近づくと、光はブラックホールの重力に直接とらえられたり、ブラックホールを周回しながらやがてブラックホールに吸い込まれてしまう。そしてその距離よりも遠い位置を通過する光は、進行方向が曲げられるため、本来は地球に届かない光も地球に届くことになる。EHTプロジェクトは、ブラックホールシャドウがドーナツのよう見えた理由として、図34にあるような光の軌跡のシミュレーション図も発表した。撮影された写真から、M87の中心にあるブラックホールの質量が、太陽の65億倍であることがわかった。

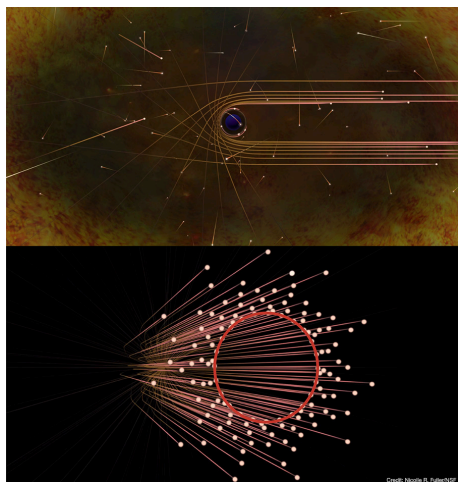


図34: EHTが同時に発表したブラックホールの周囲の光の軌跡の模式図。

課題 3.9. 【レンズの分解能】

天の川銀河の中心は「Sgr A* (いて座Aスター)」と呼ばれ、太陽の400万倍の質量をもつブラックホールである。万有引力定数 $G = 6.672 \times 10^{-11} \text{ [m}^3/\text{kg/s}^2]$ 、太陽質量 $M_{\odot} = 1.989 \times 10^{30} \text{ [kg]}$ 、光速 $c = 2.998 \times 10^8 \text{ [m/s]}$ とする。ブラックホールの半径は Schwarzschild 半径 $R_g = \frac{2GM}{c^2}$ で与えられるが、太陽質量ならば、 $R_g = \boxed{\text{ア}}$ [km] であるから、SgrA*の Schwarzschild 半径はその400万倍である。

太陽から Sgr A* までの距離は25640光年である。1光年は光が1年間に進む距離で、 $9.46 \times 10^{12} \text{ km}$ である。

- (1) Sgr A*の直径を我々が観測するならば、見込み角 α は、何 μ 秒角の大きさか。
- (2) 望遠鏡の分解能(解像度) θ は、レンズの口径(直径) D と、観測する電磁波の波長 λ を用いて $\theta \sim \frac{\lambda}{D}$ で与えられる。いま、 $D = 8000 \text{ [km]}$ の望遠鏡があり、 $\lambda = 1 \text{ [mm]}$ の電波(すなわち、 $\boxed{\text{イ}}$ [GHz])で観測するとき、分解能はいくらか。

ブラックホールの近傍で、光が周回運動できる半径は $3R_g$ より遠方である。つまり、それより内側ではあらゆる物質はブラックホールに吸い込まれていく。そのため、撮像された写真の中央部のブラックホールの「影」の部分は、半径 $3R_g$ ほどの大きさと考えられる。

3.3.5 時空特異点の問題

Schwarzschild ブラックホールの解にも、Kerr ブラックホールの解にも、無限大となる時空特異点が存在している。物理的な現象を扱う微分方程式の解に、物理的でない無限大の発散点が生じるのは不思議である。無限大となれば元の理論がそもそも適用できなくなってしまうからだ。当時多くの研究者は、相対性理論の解に特異点が存在するのは、解を導く時に課した時空の対称性が原因だと考えていた。ところが、Hawking と Penrose は「重力崩壊の状況では時空特異点の発生が避けられない」ことを時空の対称性を課さずに証明する。1965年に発表した**特異点定理**である。

Penrose は、重力崩壊する星から外側に広がっていきこうとする光の進む方向を考えた。重力がある程度強くなると、光は無遠くまで到達できずに、ある距離までしか進めなくなるだろう。そしてその内側にある光は再び星に落下せざるをえない。Penrose の用いた「光の捕捉面 (trapped surface)」というアイデアは、その最大到達する境界が「事象の地平面 (イベント・ホライズン, event horizon)」と呼ばれるようになり、ブラックホール領域を表す境界面として理解されるようになった (図 35)。このようにして、Penrose は、時空特異点はごく自然な帰結として導かれることを示した。そして、数年後には Hawking と共に、膨張宇宙を考えるならば、宇宙初期にも特異点が存在することを定理として証明した。

時空特異点
(space-time singularity)
特異点定理
(singularity theorem)

ホーキング
Stephen W. Hawking
(1942–2018)

ペンローズ
Sir Roger Penrose
(1931–)

特異点定理 (1965 年)

一般相対性理論の方程式の解には、真空や普通の物質を考える限り、必ず特異点が存在する

強い重力源があれば光を曲げるほど時空がゆがむ。凸レンズを通る平行な光が焦点の 1 点に集められるように、強い重力が存在すれば、時空には必ず無限大を含む点が存在する、という定理である。

物理的には特異点の出現はたいへん困る。しかし、Hawking と Penrose の特異点定理は一般的な数学的証明で、それが避けられないことを示している。

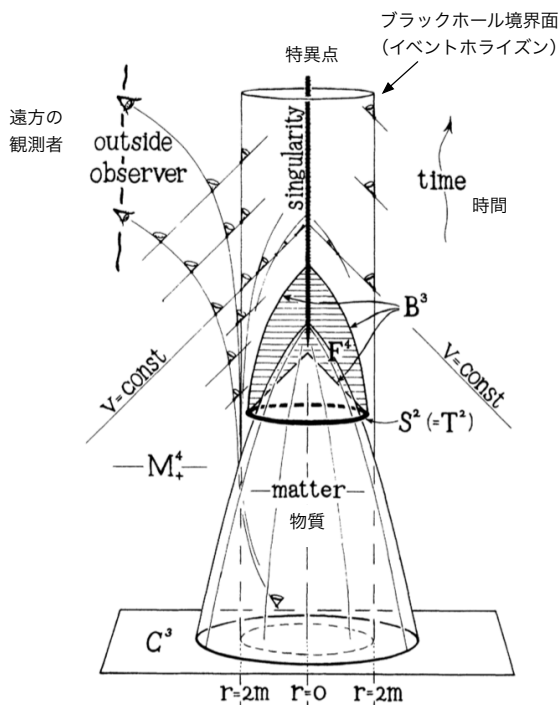


図 35: Penrose が描いたブラックホール形成の図。横の広がり空間 (2次元で表している)、縦方向上向きに時間の進みを表す。物質が重力崩壊してつぶれ、光 (円錐で描かれているのが光の広がり方を示す) が遠方へ到達しない領域が出現する。中心では特異点が発生するが、それはブラックホール境界面の内側にあるので、遠方の物理を乱さない。(R. Penrose, Phys. Rev. Lett. 14 (1965) 57 の図を加工。)

■宇宙検閲官仮説と裸の特異点

Penrose は、現実的な解決方法として、

宇宙検閲官仮説 (1969 年)

重力崩壊のできる時空特異点はブラックホールの内側に必ず隠されるだろう。だからブラックホールの外側の観測者には、特異点の悪さは影響しないから大丈夫だ

という仮説を唱えた。宇宙のどこかに特異点があっても、ブラックホールの内側に閉じこめられる、という予想である。逆に、ブラックホールに閉じ込められずに出現する特異点のことを、Penrose は**裸の特異点***1と呼んだ。そのような裸の露出は、宇宙検閲官(?) が禁止するのだ、という粋なネーミングである。

これはあくまでも仮説であり、証明されたものではない。*2。面白い考えだが、日本的に言えば「臭いものにフタ」という発想だろうか。検閲官仮説は、特異点の取り扱いに対する難しさを解決するものではない。また、宇宙の初期特異点に対する解決法も不明のまま残されている。

その後、いろいろな研究から、おおよそ Penrose の予想は正しいことがわかってきたが、特殊な状況では、裸の特異点が出現する、という計算例が報告された。例えばとても細長い形に分布した粒子が重力崩壊すると、ブラックホールができず、裸の特異点が形成する、という数値シミュレーション報告である。また、ブラックホールができるかできないかの境界を調べていくと、いくらでも小さいブラックホールが作られる可能性が判明し、これは同時に、裸の特異点が生じる可能性も意味していた。

時空特異点の取り扱いは、研究者にとって悩みの種である。とりあえず自然界は、特異点をブラックホール地平面の内側にかくまってくれているとはいえ、このままでは究極の強い重力場の研究が進まない。将来的には、一般相対性理論と量子論を融合した究極の大統一理論が特異点問題を解決してくれる、と信じてはいるが、究極理論の候補には素粒子論(場の理論)に立脚した**超弦理論**(超ひも理論, super-string theory)と、一般相対性理論を拡張した**ループ量子重力論**(loop quantum gravity)の2つがあり、どちらも実験検証ができない理論のため、数学的な整合性などの研究が行われている段階である。

宇宙検閲官仮説
(cosmic censorship conjecture)

裸の特異点
(naked singularity)

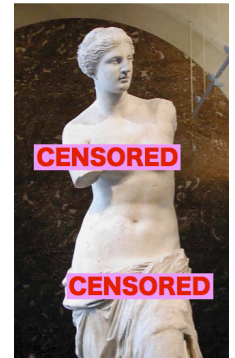


図 36: 「子供は見てはいけません」の意味で censored という言葉が使われる。

*1 英語で裸は、nude と naked の 2 つがあるが、nude は自ら見せる裸、naked は思わず見られてしまう裸というニュアンスがあるようだ。

*2 厳密には、Penrose は次のような表現を用いた。

弱い宇宙検閲官仮説 (Penrose, 1969) 「漸近的に平坦な時空で、物理的に適当な初期条件から出発し、物理的に適当な物質および輻射の重力崩壊によって発生するすべての特異点は、ブラックホールの中に隠され、遠方の観測者はそれを見ることができない。」これは簡単に言うと「裸の特異点は、見えてはならない」となる。

強い宇宙検閲官仮説 (Penrose, 1979) 「物理的にもっともらしいすべての時空には、初期特異点以外に観測可能な特異点は存在しない。また、特異点は、遠方の観測者のみならず、ブラックホールに落ちた観測者からも見えてはならない。」これも簡単に言うと「裸の特異点は、存在しない」となる。

3.4 一般相対性理論の応用：重力波

ニュートンの万有引力の考え方では、どんなに遠くに離れている物体の間でも、力は一瞬で伝わることになるが、これは情報伝達の上限度が光速であるとする特殊相対性理論と矛盾する。重力場の方程式を解析した Einstein は、電磁波と同じように重力も波として伝わることを発見した。時空の歪みも、湖の表面のさざ波のように、周囲へ（この場合は立体的な球面状に）波として伝わってゆくのである。大きな重力源が振動すれば、時空は伸びたり縮んだりしながら波のように伝わるというのだ。これが**重力波**である。伝播する速度は光速である。

残念ながら、重力波は非常に弱い。原理的には質量のある物体が加速度運動すれば発生するのだが、太陽程度の天体が光速に匹敵するほどの速さで回転運動しないと、重力波は観測可能にはならない。しかも、波の振幅は波源からの距離に比例して減少するので、天体スケールのもものを観測するのは非常に困難になる。ターゲットとされる天体現象は、超新星爆発やブラックホールの合体、中性子星の合体などだが、それらの発生頻度も不確かだ。

3.4.1 初期の重力波検出実験

60年代の終わりには、重力波を実際に観測しようと試みる物理学者も登場した。アメリカの Weber である。Weber は、メーザーと呼ばれる原子共振を用いた光の発振原理（レーザー光線登場の原型となった原理）を考案した物理学者でもある。彼は、1.5 トンものアルミニウムの円筒を吊るし、重力波が通過するときその形が歪むことを観測しようと試みた。今では「共振型」と呼ばれる原理である。そして68年に「2台の装置で重力波を同時観測した」と報告し、世界に衝撃を与えたが、残念ながら追従した他のどのグループも追試できず、今では幻の発見とされている。しかし、Weber の誤報は、より正確に重力波を検出しようとする機運を生んだ。

3.4.2 連星パルサー：重力波の間接的証明

■パルサー

中性子星は燃え尽きた星が到達する1つの姿である。原子は、原子核のまわりに電子が飛び回っている構造であり、両者は電氣的にプラスとマイナスで引力が働いている。ところが、星が燃え尽きると、星は重力で押し潰されて原子核と電子も合体してしまう。電氣的に中性になり、中性子だけの塊のとても重たい星になる。典型的な中性子星は、半径約10キロメートルで、太陽の1.4倍の質量になる。中性子星はその小ささゆえ超高速で回転する。そして磁場によってパルス信号を定期的に（ミリ秒周期で）放出すれば、**パルサー**と呼ばれる天体になる。



図 38: 連星パルサーを拾っている電波のデータ。

■連星パルサーの発見

1974年、Hulse と Taylor は、電波望遠鏡でパルスの周期が約8時間で周期的に変わる奇妙なパルサーを発見した。観測を続けると、中性子星2つが連星となっていて、その片方からのパルスであることが分かった。連星中性子星の発見である。

太陽程度の質量をもつ2つの中性子星が9時間弱で周回するこの連星は、一般相対性理論をテストする良い実験場となった。大きな質量の星が高速で運動しているので、連星からは重力波が発生する。重力波は連星からエネルギーを持ち去るので、連星はエネルギーを失って近づいていく。そのため、公転周期はだんだん短くなるはずである。発見後30年以上経つが、連星の公転周期の減少は、一般相対性理論の予測と完全に一致している（図40〔右〕）。こうして、重力波が

重力波
(gravitational wave)

OnePoint

重力波の波源として期待されているもののうち、波形予測の研究が進んでいるのは、ブラックホールや中性子星連星の合体現象である。

ウェーバー, Joseph Weber (1919-2000)

パルサー (pulsar)

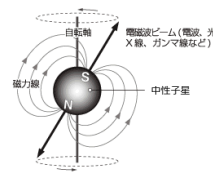


図 37: パルサーの正体は高速に回転している中性子星。磁極方向から放出される電波が、灯台のサーチライトのように周期的に観測される。

ハルス, Russell A. Hulse (1950-)
テイラー, Joseph H. Taylor, Jr. (1941-) 1993年ノーベル物理学賞共同受賞

存在していることが、(間接的にだが)初めて報告されることになった。Hulse と Taylor は、「重力研究の新しい可能性を開いた新型連星パルサーの発見」の功績により、1993年にノーベル物理学賞を受賞した。

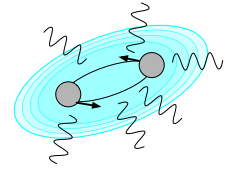


図 39: 連星パルサーは周囲に重力波を放出し、次第にエネルギーを失って、最後は合体する。

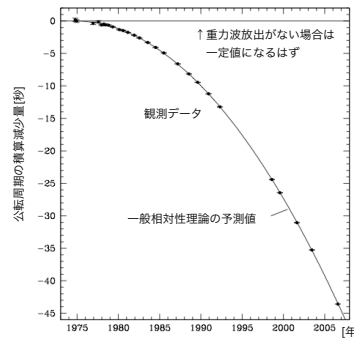
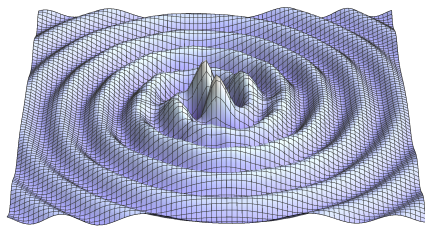


図 40: [左] 連星から放出される重力波のイメージ図。中央の2つの大きな山のところに星があり、2つの星が次第に近づいて合体するまでに、時空に歪みを引き起こす。歪みは波として周囲に伝播する。[右] 重力波を放出することによって、連星パルサーの公転周期が減少していくことが予想されるが、30年以上にわたって、その予想曲線にピッタリと観測データが一致する。[Weisberg et al (2010), arXiv:1011.0718 より]

3.4.3 レーザー干渉計による重力波検出

80年代に入ると、レーザー干渉計を用いて広い周波数帯域での重力波検出を目指す計画が提案される。干渉計については§2.1.1で説明したが、光のもつ波の性質を利用して、微小な距離測定をする装置である。1つの光を2筋に分け、L字型の2本の経路(「腕(アーム)」と呼ぶ)で光を往復させ、再び合成する装置をつくり、干渉縞を見ることで、2本の腕の距離の差を見るしくみである。重力波の場合は、微弱な変化を相対的に検出するために、腕の長さは数kmで設計される。実際にはレーザー光線は、腕を100往復ほどして干渉測定器に入射するので、数100kmの腕をもつ干渉計である。技術的な補足は、§3.4.4にて行う。

微弱な重力波を検出するためには、レーザー信号に含まれるノイズとの戦いが強いられる。巨大な干渉計では強力なレーザー光が必要になるが、強力な光は量子揺らぎを発生させ、微小な測定を阻害する。実験物理学者たちは、相反する技術的要請を乗り越えて、2000年代には干渉計を稼働させた。理論物理学者たちは、連星の合体現象で生じる重力波の波形予測の計算を、さまざまな難題を乗り越えて準備した。

■2000年代の重力波観測

アメリカは、LIGO(ライゴ^{*3})と呼ばれる一辺が4kmの腕をもつレーザー干渉計を、ワシントン州のハンフォード(砂漠の中)と、ルイジアナ州のリビングストン(ジャングルの中)の2箇所に設置(図41)し、2005年から観測を開始した。イギリスとドイツは600mの腕をもつ干渉計GEOをドイツ・ハノーバーに設置し、2005年に稼働。フランスとイタリアは3kmの腕をもつレーザー干渉計VIRGO(ヴィルゴ)をイタリア・ピサに設置し、2007年に観測を開始する。日本は、これらに先立って2002年から3年間、東京・三鷹の国立天文台に300mの腕をもった干渉計TAMAを運用した実観測を行った。

しかし、(予想されていたことだが)2000年代の干渉計の能力では、どのプロジェクトも重力波を捉えることができなかった。もっとも感度の高かったアメリカのLIGOは、20 Mpc(7000

重力波は、ほかの物質と相互作用が弱いために、地球があってもすり抜けて通り過ぎてゆく。宇宙から来る現象であっても、空を見上げる必要はない。



図 41: アメリカ・ルイジアナ州のLIGO干渉計。

1 pc=3.26 光年

^{*3} Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory, レーザー干渉計重力波天文台 <https://ligo.caltech.edu/>

万光年先)の中性子星連星を捉える能力をもっていたが、2年以上の実観測で、一回も確かな重力波イベントを発見することができなかった。

■2015年からの重力波観測

各国は、レーザー干渉計を数年間停止し、感度を改善して、第2世代干渉計として再び観測を始めた。感度が10倍良くなると、10倍遠いところの天体からの重力波を捉えることができる。体積比で1000倍にあたるので、重力波を捉える確率も1000倍高くなる。

日本は、岐阜県・神岡の山中に、一辺が3kmの腕をもつレーザー干渉計KAGRA(かぐら)*4を新たに建設した。山中にトンネルを掘って造られた干渉計は、地面振動を抑えることができ、装置全体を20Kの低温に冷却することで熱雑音も抑え、第2世代LIGOと同程度の感度を得る計画である。2016年3月には、1ヶ月の試験運転を行った。2019年10月にはLIGO-Virgoとの共同観測協定を調印し、2020年4月に実観測を行った。

重力波観測は、LIGO-Virgo-KAGRAの共同観測として実施されている。これまで行われた観測期間を表2に示す。現在は各干渉計の改良中で、次期観測(O4)は2022年12月下旬から1年間の予定である。

表2: これまでの重力波観測期間

観測期	Advanced LIGO		Advanced Virgo		KAGRA	
	年月日	年月日	年月日	年月日	年月日	年月日
O1	2015 9 12	2016 1 19	-		-	
O2	2016 11 30	2017 8 25	2017 8 1	2017 8 25	-	
O3a	2019 4 1	2019 9 30	同左		-	
O3b	2019 11 1	2020 3 27	同左		-	
O3GK	-		-		2020 4 7	2020 4 21

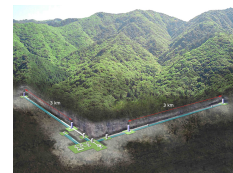


図42: 岐阜県・神岡の山中に建設されたKAGRAの説明図。
[東京大学宇宙線研究所提供]

■重力波波形の予測

重力波の振幅はとても小さいために、ノイズにまみれた信号データから、重力波の波形が隠れていないかの宝探しをすることになる。そのために、あらかじめ、重力波波形の正確な計算をすることが課題となった。中性子星連星やブラックホール連星の合体前後で、どのような重力波が発生するのかを、コンピュータシミュレーションを用いて解けるようになったのは、2005年のことである。予想される波形を図43に示す。

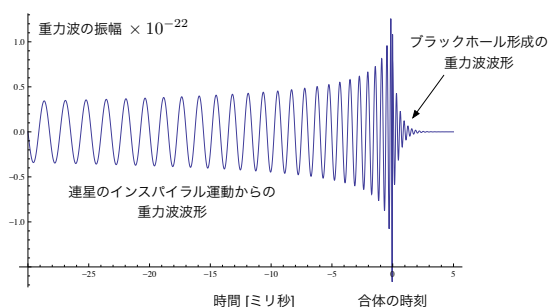


図43: 中性子星連星の合体の前後で放出される重力波の波形(予想)。次第に振幅を大きくしながら、1kHzに近い周波数にまで上がる。合体後にブラックホールが形成されるならば、重力波はブラックホールに飲み込まれてしまい、急速に減衰する。この減衰部分が観測されれば、ブラックホールを直接観測したことになる。

OnePoint

連星合体の最後の段階をインスパイラル(inspiral)、合体(merger)を経て、最後にブラックホールができて波が収まっていく段階をリングダウン(ringdown)という。

*4 <http://gwcenter.icrr.u-tokyo.ac.jp>

KAGRAは、神岡の「か」と「gravitational wave」をかけた名称。ニュートリノ観測でノーベル物理学賞を2度日本に導いた(2002年度小柴昌俊氏、2015年度梶田隆章氏)スーパーカミオカンデ(小柴氏の時代はカミオカンデ)に隣接する場所である。

3.4.4 重力波レーザー干渉計の技術

マイケルソンとモーリーの干渉計 (§2.1.1) は、一つの腕の長さが 11 m のものだった。現代では、アインシュタインの相対性理論が予言した重力波の検出に、腕の長さが 3 km (日本の KAGRA, ヨーロッパの Virgo), 4 km (アメリカの LIGO) のレーザー干渉計が用いられている。基本的なしくみは同じである。

課題 3.10. 【重力波干渉計のしくみ】

図 44 は、干渉計と呼ばれる装置である。光源 A から発せられたレーザー光は、ビームスプリッター B にて x 方向と y 方向に分離される。それぞれの光は、B から距離 L_1 の位置にある鏡 M_x 、距離 L_2 にある M_y でそれぞれ反射し、元の B に戻って再び合成されて検出器 D に到達する。

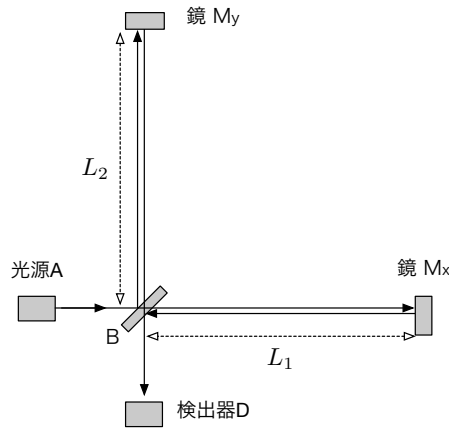


図 44: 干渉計の構造.

ブラックホールなどの巨大な質量をもつ天体が運動することによって、重力波が発生し、宇宙空間を伝わることが知られている。重力波が通過することによって、鏡 M_x までの距離が $L(1+h)$ [m] になり、同時に鏡 M_y までの距離が $L(1-h)$ [m] になったとする。検出器 D では、光の到達時間に差が生じ、干渉によって光の強度が変化する。

装置全体は真空中に設置されているとする。光速を c とすると、鏡 M_x で反射する光は、往復する時間が ア だけ余計にかかることになるので、検出器での波 S_x として

$$S_x = A \sin \left\{ 2\pi\nu \left(t - \text{ア} \right) \right\}$$

となるでしょう。ここで、 A は光の振幅、 ν はレーザー光の振動数である。鏡 M_y で反射する光も同様にして S_y とすると、検出器 D での光は、重ね合わせの原理から、 $S_x + S_y$ となる。三角関数の和の公式

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

を用いると、

$$S_x + S_y = 2A \sin \left\{ 2\pi\nu \left(t - \frac{2L}{c} \right) \right\} \cos \left(\text{イ} \right)$$

となる。時間を含まない部分は振幅とみなせるので、 h の大きさによって検出器 D の明るさが変化することがわかる。初めに検出器 D で最大の輝度だった合成波が、打ち消しあって暗くなる条件は、整数 n を用いて $\text{イ} = \text{ウ} \times \pi$ のときである。

問 重力波はとても弱く、振幅 h の値は、とても小さい。 $L = 3 \times 10^3$ m の干渉計をつくり、波長 $\lambda = c/\nu = 1.0 \times 10^{-6}$ m のレーザー光線を用いるとき、検出器 D で、最大輝度から初めて暗くなるほどの変化をおよぼす h の大きさはいくらか。

重力波は質量の大きな天体が加速運動することで発生するが、地球上ではいくら頑張っても物体を動かしても観測することができないほど微小な波である。宇宙空間にあるブラックホールの合体や超新星爆発などで発生する重力波を観測することになるが、距離が遠いと振幅は減少するため、この場合も微弱である。重力波の振幅は、元の長さがどれだけ伸縮したかという割合で表される。本問で導入した h は、実際に用いられている量で無次元量である。典型的には、 $h \sim 10^{-22}$ である。太陽・地球間の距離 1.5×10^{11} m をもってしても、原子核一つ分 $\sim 10^{-10}$ m にすぎない。

干渉計は微小な距離変化を測定できる装置であるが、課題 3.10 で求めた h の大きさの測定精度では、実際の重力波の検出はできない。そこで、実際の重力波検出器では、初めに検出器 D で 2 つの光が互いに打ち消すように調整し、わずかなずれが生じて明るくなることを感知することにした。ビームスプリッター B と鏡の間で光を何往復もさせて実効的な L を大きくしたり、さまざまな工夫がされている。

3.4.5 KAGRA 干渉計

KAGRA (かぐら) は、岐阜県神岡にある重力波検出のためのレーザー干渉計である。一辺が 3 km の腕をもつ装置で、地面振動を抑えるために地下に建設され、熱振動を抑えるために 20 K の極低温で運転される「天文台」だ。10 年の年月をかけて、トンネルの掘削・装置のインストール・試運転等を進め、2019 年 10 月に完成記念式典を行なった。同日、重力波観測をリードしている米国の LIGO、欧州の Virgo の研究グループと共同観測協定に調印し、LVK の 3 者による共同研究をスタートさせた。

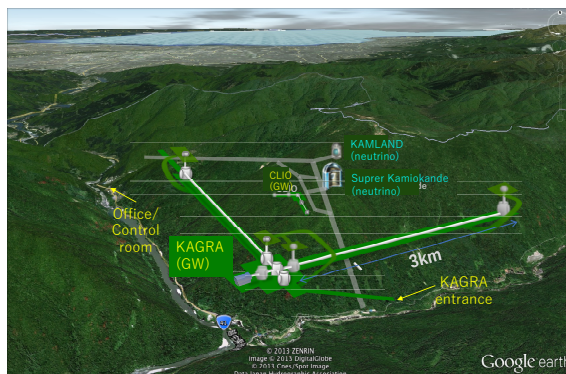


図 45: KAGRA の概要図。[宮川治氏作成]

■KAGRA 以前の日本の重力波検出プロジェクト

日本での重力波直接検出の試みは、1970 年代から始まった。90 年代には宇宙線研究所が 100 m 長の delay-line Michelson 干渉計 (TENKO-100) を、国立天文台が 20 m 長の Fabry-Perot 型 Michelson 干渉計をそれぞれ構築し、技術的検討を行った。前者は光を 102 回往復させ、800Hz から 2.5 kHz の周波数帯で $1.1 \times 10^{-19}/\sqrt{\text{Hz}}$ の感度を出している。1995 年には、300 m 長の Fabry-Perot 型 Michelson 干渉計 TAMA が国立天文台に建設され、98 年には $5 \times 10^{-21}/\sqrt{\text{Hz}}$ の感度を達成した。TAMA は、2001 年には 1000 時間以上の運転を行い、2002 年には米国 LIGO の S2 観測と 2 ヶ月間共同で行うなどの実績を残し、最終的な感度は、1 kHz 付近で $1.3 \times 10^{-21}/\sqrt{\text{Hz}}$ を記録してる。レーザー光増幅や地面振動減衰装置などの将来技術開発も行われた。

TAMA のある国立天文台は、東京都内にあり、地面振動や生活雑音のために、100 Hz 以下では感度が望めなかった。そこで岐阜県神岡の鉱山跡地の山中に建設することが計画された。予備

的なプロジェクトとして、20 m のプロトタイプ干渉計が国立天文台から神岡に移設され、LISM^{*5} と命名されて 2000-2002 年に TAMA と同時観測を行っている。

2002 年には、100 m 長の辺をもち、サファイア鏡を 20 K の温度に冷却することができる干渉計が神岡に建設され、CLIO^{*6} と命名された。2005 年から 2010 年まで運用され、東京より 2 桁以上も地面振動雑音が小さいことが示された。

■KAGRA プロジェクト

このように、日本の技術は世界をリードするものだったが、km-スケールでの大型低温重力波干渉計 LCGT^{*7} 建設は巨費ゆえ（そして重力波検出が世界に一例もなかったため）なかなか予算が認められなかった。梶田隆章氏が宇宙線研究所所長に 2008 年に着任し、自らが重力波研究を牽引することで、現在へつながる潮流ができる。LCGT 計画は、2010 年に初期建設費 140 億円が承認され、東日本大震災で遅れが発生したが、2012 年にトンネルの掘削に着工した。LCGT の名前は一般公募によって KAGRA と決まった。「神岡 (Kamioka) 重力波 (GRAvitational wave) 天文台」が由来だが、日本人なら「神楽」をも連想する命名である。

図 45 は、KAGRA の概要図である。岐阜県北端に位置し、ニュートリノ検出器 Super-Kamiokande と KamLAND と同じ山の中に建設され、研究所も同じ神岡町茂住に設置された。一辺が 3 km のレーザー干渉計で、米欧の干渉計に比べ、技術的に次の 2 点で進んでいるのが特長である。一つは低周波数側での地面振動を抑えるために地下に建設されたこと。KAGRA は少なくとも地表からは 200 m 地下にある。鏡の制震装置は、最大で 14 m の高さのものになり、トンネルを高層に掘って吊り下げる構造をとっている。もう一つは熱雑音を抑えるために鏡を 20 K の温度にまで冷却すること。そのために、サファイアの鏡 (23 kg) が使われ、ファンのない冷却装置（伝導による冷却）が開発された。3 km のパイプの中は真空であり、LIGO の 2 台の干渉計に次いで世界第 3 位の大きさの真空装置となっている。さらに、レーザー光を光源側で増幅したり (power recycling)、検出器側で増幅する (signal recycling) リサイクリング鏡も取り付けられている。これらの技術がすべて結集すれば、第 2 世代 LIGO/Virgo の装置の感度に匹敵する $2 \times 10^{-24} / \sqrt{\text{Hz}}$ を 100 Hz 付近の周波数帯で得られると計画されている。それゆえ、KAGRA は、しばしば 2.5 世代重力波干渉計とも称されている。

3.4.6 重力波の直接観測

■GW150914

2016 年 2 月、アメリカの LIGO グループは、ブラックホールが衝突・合体して発生した重力波を捉えることに成功した、と発表した。発表された重力波の観測は、2015 年 9 月 14 日に 2 つの LIGO の干渉計が 6.9 ミリ秒差で同じ重力波波形を検出した、というものだ。GW150914 と名付けられた。図 46 は、その波形である。時間差から重力波の到来方向が南半球側とわかった。

図 46 で示された重力波は、35Hz から 250Hz まで周波数が上昇し、そのあと急速に波が減衰している。図 43 で予測された波形とほとんど同じだ。周波数の上昇は、2 つの連星が合体する直前に接近しつつある状況を示していて、波形から、太陽質量の 36 倍と 29 倍の質量をもつ 2 つのブラックホールの合体であることがわかった。さらに、急速に波が減衰していることから、最終的に大きなブラックホールになったことも確認される。減衰のしかたとコンピュータシミュレーションの結果から、合体後には太陽質量の 62 倍の質量のブラックホールになったことがわかった。これまで私たちはブラックホールを望遠鏡で「観た」ことがなかったが、重力波の波形データの中から初めてブラックホールの存在が「見えた」のである。

初めの全質量と最後の質量を比べると、太陽質量の 3 倍の質量が失われている。質量とエネルギーの等価性 ($E = mc^2$) を考えると、これだけの質量が重力波のエネルギーとして宇宙に放出

GW は gravitational wave (重力波) の頭文字。

OnePoint

重力波の初観測となった GW150914 は、ブラックホール連星の初検出でもあった。しかもその質量は、これまでに知られていない大きさのものだった。

^{*5} Laser Interferometer Small Observatory in a Mine

^{*6} Cryogenic Laser Interferometer Observatory

^{*7} Large-scale Cryogenic Gravitational wave Telescope

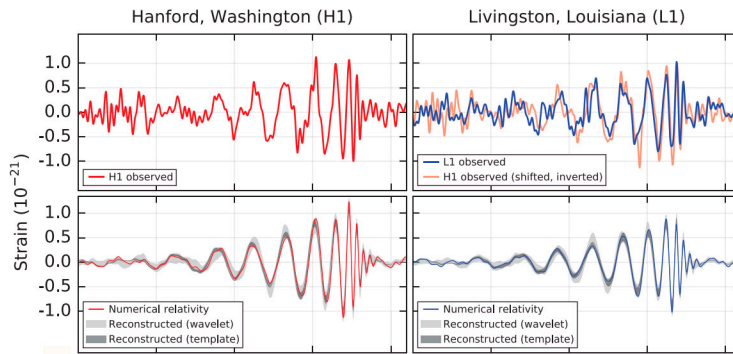


図 46: GW150914 の重力波波形. [上] LIGO の2つの干渉計のデータ. [上右] 0.69 ミリ秒ずらすと2つの干渉計からの波形が重なることを示している. [下] 観測されたデータに合うようにブラックホール合体のシミュレーションして得られた波形を示したもの. [LIGO グループの発表資料より]

されたことになる. 地球で観測された重力波の大きさを考えると, このブラックホール連星合体は, 13 億光年先から来たことがわかった.

■GW170817

LIGO グループは, その後 2017 年末までに合計 6 つの重力波検出を報告したが, GW170817 も大きなニュースになった. GW170817 は, ブラックホール連星ではなく, 初めての中性子星連星の合体だった. 合体直後にすぐにブラックホールができないために, 衝突後の高温の核物質の爆発現象が生じ, それが衝突後数週間にわたって光り続けた.

重力波の検出直後 6 分程で LIGO グループは中性子星合体であることに気付き, 4 時間後には重力波波源天体の天球上の位置を絞り込み, 全世界の天文台に観測情報を提供した. 世界中の 70 を超える天文台と人工衛星による望遠鏡がその方向に望遠鏡を向け, ガンマ線, X線, 可視光線, 赤外線, 電波などさまざまな波長での観測が同時に行われたのである. 1 つの天体現象を異なる望遠鏡で多角的に追跡する, いわゆるマルチ・メッセンジャー天文学として期待されていた総合的な天体観測体制がスタートした.

その結果, 合体の 2 秒後にはガンマ線で観測されていたこと, 波源天体は 40Mpc 先の銀河 NGC4993 であることなどがわかり, 日ごとに減光していく様子と中性子星連星合体のシミュレーションの結果と比較することで, 合体直後に原子核の R-プロセス反応が予想通り起きていたこともわかった. 「中性子星連星の合体で金がつくられたことがわかった」と広くニュースで報道されたが, これは望遠鏡で金が見えたわけではなく, 減光の様子とシミュレーションモデルが合致した結果である. 合体直後のガンマ線の観測から合体後の爆発のモデルが検証されたり, 波源の距離が特定されたことと重力波と光の到達時刻の差から一般相対性理論の検証や宇宙膨張モデルの検証も行われた.

2017 年のノーベル物理学賞は, 重力波検出に成功した LIGO グループの牽引者 3 名が受賞した. 検出の翌年に受賞対象となるのは, 異例のスピードであった.

■重力波観測の現状

2021 年 11 月, LIGO-Virgo-KAGRA は, O3b の観測期間終了までに, 90 回の重力波イベントを観測した, と発表した. そのうち連星ブラックホールの合体が 83 例, 連星中性子星の合体が 2 例, ブラックホールと中性子星の連星合体が 3 例, ブラックホールと正体不明の連星合体が 2 例である. 最後の「正体不明」とは, 従来の理論で考えられている中性子星の質量上限 ($2.5M_{\odot}$) よりも重く, 従来の理論で考えられているブラックホールの質量下限 ($5M_{\odot}$) よりも軽い天体が相手と考えられるイベントである.

GW170817 は, Virgo グループを含めて 3 台の干渉計での同時観測となった.



図 47: 2017 年ノーベル物理学賞の受賞者. 左から, Weiss, Barish, Thorne の似顔絵. ノーベル財団が受賞者発表に用いたもの.

ワイス
Rainer Weiss (1932–)
バリッシュ
Barry C. Barish
(1936–)
ソーン
Kip S. Thorne (1940–)

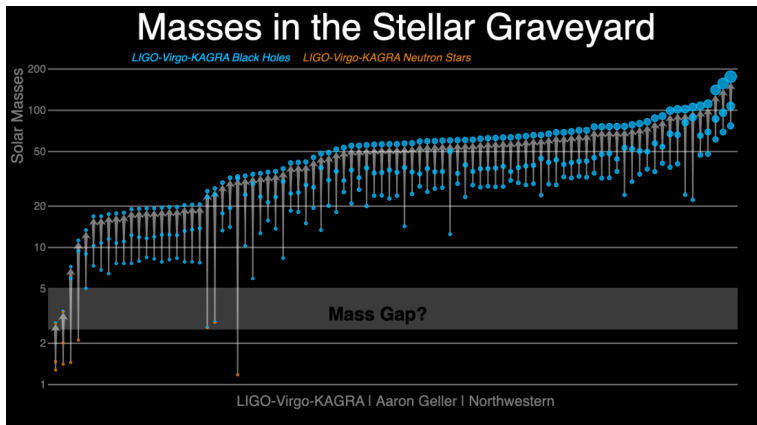


図 48: これまでに観測された連星合体を縦軸に質量（太陽質量の単位）にして小さい順に並べたもの。

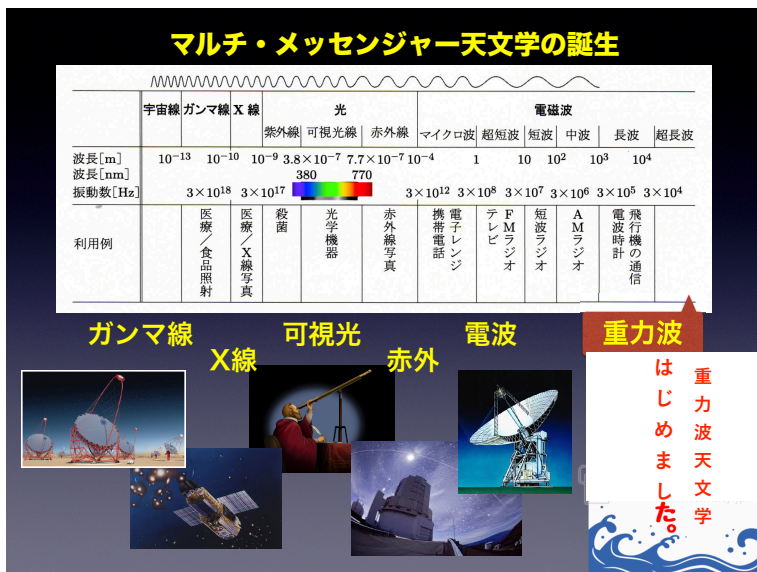


図 49: 重力波観測が可能になったことで、これまでの天文観測に新たな「眼」が加わったことになる。

■重力波観測の今後

今後、重力波がより多く観測されるようになれば、波源となった天体の様子（質量・回転・軌道などのパラメータの特定）だけではなく、中性子星内部の高密度物質の状態がどのようになっているのか、一般相対性理論はどこまで正しいのか、といったこれまで不可能だった物理的な問題へアプローチしていくことが可能になる。

また、宇宙空間で重力波を観測しようとする計画も進められている。欧州宇宙機関 (ESA) は、2030 年頃に、250 万 km の基線長をもつレーザ干渉計を 3 機の人工衛星で構成する LISA 計画*8 を推進している。腕の長い干渉計では、地上より周波数の低い重力波を捉えることができるため、地上での重力波検出の予報ができるほか、質量の大きなブラックホール合体からの重力波も検知できるようになる。銀河中心にある超巨大ブラックホールの起源ははまだ不明であるが、重力波観測の統計をとることによって、超巨大ブラックホールがどのように形成されていったのかも解明できることになる。また、重力波は、宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) が生じる以前の情報を伝えてくれるはずで、初期の宇宙の様子を解明する手がかりを与えてくれることが期待されている。

*8 LISA (Laser Interferometer Space Antenna, リサ) 計画は、2017 年に予算承認された (<http://sci.esa.int/lisa/>)。

日本も規模を小さくした宇宙空間での低周波数重力波検出 DECIGO (DECi-hertz Interferometer Gravitational wave Observatory, デサイゴ) 計画を提案している。

参考文献

- [1] 真貝寿明, 「図解雑学 タイムマシンと時空の科学」(ナツメ社, 2011)
- [2] 真貝寿明, 「ブラックホール・膨張宇宙・重力波 一般相対性理論の100年と展開」(光文社新書, 2015)
- [3] 真貝寿明, 「現代物理学が描く宇宙論」(共立出版, 2018)
- [4] Hidetoshi Katori, *Spectroscopy of strontium atoms in the Lamb-Dicke confinement*, Proceedings of the 6th Symposium on Frequency Standards and Metrology 323-330 (2002). (World Scientific) https://doi.org/10.1142/9789812777713_0036 有料で入手困難
- [5] Masao Takamoto, Feng-Lei Hong, Ryoichi Higashi & Hidetoshi Katori, *An optical lattice clock*, Nature **435** p. 321-324 (2005). <https://www.nature.com/articles/nature03541>
- [6] M. Takamoto, I. Ushijima, N. Ohmae, T. Yahagi, K. Kokado, H. Shinkai and H. Katori, *Test of general relativity by a pair of transportable optical lattice clocks*, Nature Photonics 14, p 411-415 (2020).
- [7] 2020年ノーベル物理学賞受賞者の解説, 真貝, 論座
<https://webronza.asahi.com/science/articles/2020101000005.html>
- [8] すばる望遠鏡の技術的解説 <https://subarutelescope.org/jp/about/instrument/>
- [9] Event Horizon Telescope のページ <https://www.miz.nao.ac.jp/eht-j/top>
- [10] 重力波研究に関するリンク <http://www.oit.ac.jp/is/shinkai/linkGW.html>