

井口・江本

スカラー

ローレンツ変換は1次変換であるので、

$$x'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} x^j \quad L'_j = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}$$

と、表される。

x系の座標系に定義された物理量 $\phi(x^1, x^2, x^3, x^4)$ があつた時、 (x^1, x^2, x^3, x^4) と、書くのが面倒なので、 $\phi(x)$ と記すことにする。ローレンツ変換により、x系がx'系へ移ったとき、 $\phi'(x') = \phi(x)$ ならば、この物理量をスカラーと呼ぶ。

スカラーとは向きを持たない物理量である。

犬東

7. 運動方程式を共変形式に書き直す

ニュートンの運動方程式が特殊相対性原理（慣性座標系間の座標変換はローレンツ変換に対して不変）を満たすように、共変形式に書き直す。

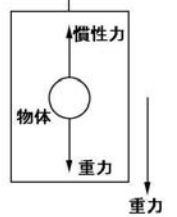
※共変形式とは物理量が一目でスカラーなのか、ベクトルなのかテンソルなのかのわかる形式のこと

⇒座標系の取り方に依らない定式化

犬東

8. 等価原理

自由落下するエレベーター



・局所的に重力を消し去り慣性系にすることができる

・あらゆる物質の重力質量と慣性質量が等しい

$$\frac{d^2 z'}{dt'^2} = \frac{d^2 z}{dt^2} + g = -g + g = 0$$

ベクトル

反変ベクトル

$$U^i(x') = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} U^j(x)$$

このように変換されるベクトルを、反変ベクトルという。

・反変ベクトルの添字は右肩に書くこと約束する。

・この変換行列はローレンツ変換 L^i_j そのものである。

共変ベクトル

$$V_j(x') = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} V_i(x)$$

このように変換されるベクトルを、共変ベクトルという。

・共変ベクトルの添字は右下に書くこと約束する。

・スカラー勾配ベクトルは、共変ベクトルである。

$L^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}$ は、 L^j_i の逆行列である。また、逆変換なので、 L^i_j の表式の速度を v を $-v$ に置き換えたものである。

時間・空間座標を x^μ と置くとき、それを時間微分すると、速度、

$$v^\mu(x) = \frac{dx^\mu}{dt}$$

が得られる。しかしこれでは、時間 t を特別扱いしてしまう。そこで、固有時間 τ を用いて、4元速度を定義する。

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau}$$

(固有時間はローレンツ変換に対して不変なスカラー量だから)

慣性質量と重力質量

$$m_I \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -m_G \cdot g$$

慣性質量

重力質量

「加速のされにくさ」

「重力の大きさとして計算される質量」

重力質量と慣性質量は比例関係にあり、ここでは便宜的にこの比例定数を1と定義するのが普通である。

$$m_G = m_I$$

縮約

「ベクトルの大きさ」の概念を拡張したもので、「和」を取ることが添え字を減らすことに対応する。

$$B^k_{pr} = \sum_{i=0}^3 A^{ik}_{pr}$$

は縮約の一例でテンソル A^{ik}_{pr} の共変成分(下添え字)の2番の q を i に置き換え縮約したもの。

・反変ベクトルと共変ベクトルよりスカラー量を作った時、この積をスカラー積という。

$$C(x) = A(x)B_j(x)$$

ベクトル長さとは $(A)^2 = A^i_j A^j_i = \eta_{ij} A^i A^j = \eta^{ij} A_i A_j$ である。

次に4元運動量

$$p^i = m u^i$$

を考えると、運動方程式は

$$\frac{dp^i}{d\tau} = f^i$$

と書け、共変な形式になる。

物理学の法則が相対性原理を満たすためには、あらゆる力を4元ベクトルで表せれば問題ない

エトベシュの実験(1886~)

重力質量と慣性質量は便宜上のため等しいものとし、比率を1と定義したが、実際どうなのかを検証した。

彼らは地球が自転しているため、遠心力も働くことを利用して実験を行った。

静止質量 $E = mc^2$

4元運動量の2乗の長さは、

$$p^i p_i = m^2 u^i u_i = -m^2 c^2 = (\text{一定})$$

p^0 成分はエネルギーの意味をもち、

$$E = cp^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \rightarrow mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots$$

$$E = mc^2$$

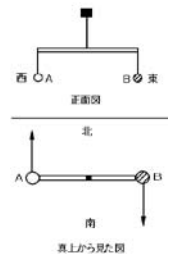
これは速度がゼロでも静止質量に光速の2乗をかけたものが、エネルギーに相当することを示している。

右図のような道具を用いて実験をした

・A、Bの重力質量は同じ
→遠心力は同じ。

・A、Bの慣性質量は異なる
→生じる力が異なる。

⇒ 回転が生じる。



Einstein は、すべての座標系で同じ形式で書ける「共変的な」物理法則を求めた。「テンソル形式」を用いることにより、運動方程式が共変的に表され、その結果、静止エネルギーの概念 $E=mc^2$ が登場した。こうして完成した特殊相対性理論だが、加速度運動をする座標系（重力の働く物理系）に対しては説明ができていなかった。

「重力の効果は、局所的に取り去ることができる」(等価原理)に気づいた Einstein は、その後 10 年余りをかけて、「重力の効果は時空のゆがみである」とする一般相対性理論に到達することになる。

エトベシュの実験結果

これらの考えでエトベシュらは重力の異方向性を避けるために、障害物のない冬の凍った湖の中心で実験を行った。その結果、重力質量と慣性質量の比は物質によって異なることがわかった。

結果

$$\frac{\Delta(m_G/m_I)}{m_G/m_I} \leq 10^{-8}$$

となり

$$m_G = m_I \quad \text{が言える。}$$