

卒業研究概要

提出年月日 2020年 1月 31日

卒業研究課題

重力モデルの違いによる最速降下線の比較

学生番号 B16096

氏名 山口 莉生

概要 (1000字程度)

指導教員 真貝 寿明

印

1696年、数学者ヨハン・ベルヌーイにより「最速降下曲線問題」という数学問題が提起された。最速降下曲線とは、「任意の2点間を結ぶすべての曲線のうち、質点が初速度ゼロで重力によって滑るとき、もっとも短時間で到達する曲線」のことである。そして、摩擦・空気抵抗・初速度などの重力以外の外部力がないという仮定の下での最速降下曲線の解は、変分法によってサイクロイド曲線であることがわかる。

しかし、現実の重力は万有引力で記述されているため、一定の大きさではない。またブラックホール近傍のような重力が非常に強い状況下においても応用することができるように本研究では、異なる重力モデル下での最速降下曲線を求めた。変分法により、最速降下線の形状 $y(x)$ は

$$\frac{2y''}{1+(y')^2} + \frac{1}{c-v} (y'V' - (1+(y')^2)f) = 0$$

を満たす微分方程式を解けばよい。ここで $V(y(x))$ はポテンシャルエネルギー、 $f = \frac{\delta V}{\delta y}$ 、 $V' = \frac{dV}{dx}$ である。一定重力($V_1 = mgy(x)$)のとき $y(x)$ はサイクロイドとなる。

本研究では $V_2 = -G\frac{M}{y}$ 、 $C = -G\frac{M}{H}$ の万有引力、 $V_3 = -G\frac{M}{y-a}$ 、 $C = -G\frac{M}{H}$ の擬ニュートンポテンシャルの場合を比較した。ここでは G は万有引力定数、 M は天体の質量、 a はシュワルツシルト半径、 H は初期の高さである。

擬ニュートンポテンシャルとは、ブラックホール周辺の相対論的現象を模倣する式である。

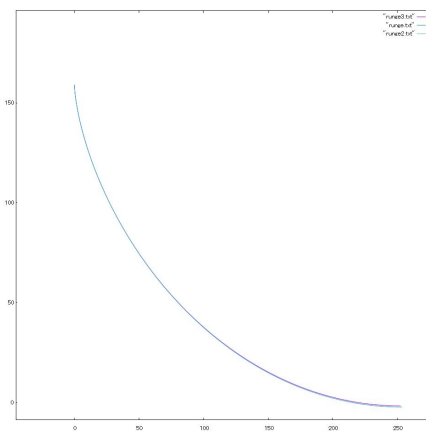


図1 地球表面から159m地点からの最速降下曲線

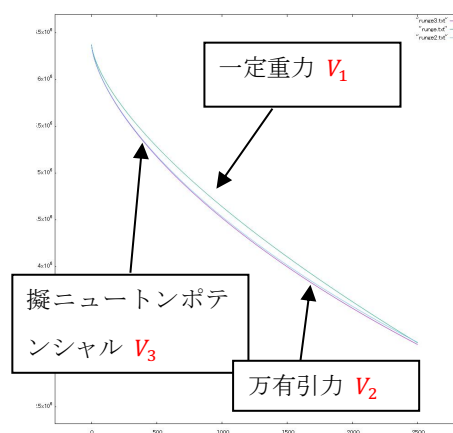


図2 地球表面から地球半径の半分掘り下げた時の比較

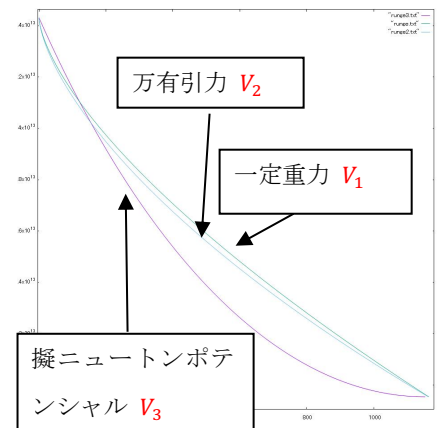


図3 ブラックホールの中心から $1.5a$ の高さから a の位置までの

図1は地球表面から159mの高さからの最速降下線の形状の比較である。3つのモデルの差は小さくいずれもサイクロイド曲線となっている。図2は地球表面から地球半径の半分の場合まで掘り下げた場合の比較である。 V_2 と V_3 の形状はサイクロイドよりも下に凸だが、ほとんど一致していた。図3はブラックホールの中心から $\frac{3a}{2}$ の高さから a の位置までの曲線の形状の比較である。 V_3 が現実に近いと考えられる。以上より、重力の降下が強いほど、最速降下線は下に凸になることがわかった。

落下時間についてもそれぞれ比較した。図2では一定重力の最速降下線が落下時間が小さい曲線であり、 V_2 と V_3 との曲線とで約6秒の違いがみられた。図3の場合では V_3 の曲線の落下時間が一番小さく、一番大きい一定重力とで約11秒の違いがみられた。