

# 卒業論文

## 準光速ロケットでのブラックホール旅行における 時間の遅れ

大阪工業大学

情報科学部 情報システム学科

B02-050 木村 龍一

2008年2月14日

# 目次

<b>1</b>	<b>序論</b>	<b>3</b>
1.1	背景	3
1.2	本論文の構成	3
<b>2</b>	<b>運動する物体の時間の遅れ (特殊相対性理論)</b>	<b>4</b>
2.1	ニュートン力学における時間の概念	4
2.2	慣性系・ガリレイ変換・相対性原理	4
2.3	光速不変の原理	5
2.4	ローレンツ変換	5
2.5	時計のパラドックス	9
2.6	双子のパラドックス	10
2.7	時間の遅れ	11
<b>3</b>	<b>強い重力場における時間の遅れ (一般相対性理論)</b>	<b>12</b>
3.1	アインシュタイン方程式	12
3.2	シュヴァルツシルトの解	12
3.3	シュヴァルツシルト半径	14
3.4	ブラックホール近傍での時間の遅れ	14
<b>4</b>	<b>準光速ロケットによる宇宙旅行の仮想モデル ~未来旅行~</b>	<b>16</b>
4.1	ロケットの加速・減速部分の仮定	16
4.2	境界値問題の計算方法	18
<b>5</b>	<b>結果・考察</b>	<b>19</b>
5.1	モデルA	19
5.2	モデルB	20
5.3	モデルC	23

# 1 序論

## 1.1 背景

普段私達の周りを流れている時間。時間の進み方や時刻は誰にとっても一様で、不変なものであると考えられてきた。またそれは、言うまでもなく私達は日常生活の中で実際そう感じている。しかし、アインシュタインの相対性理論の登場で、その絶対的だと思われてきた時間の概念がくつがえされた。

今から100年ほど前の1905年、アインシュタインは「特殊相対性理論」を発表した。「特殊」とは重力がない特殊な状況下のみで成り立つ理論という意味であり、その10余年後には特殊相対性理論をすべての状況下で通用する「一般相対性理論」に発展させ、現代物理学の新世界を切り開いた。

相対性理論とは、時間や長さ、速さなどが、計測する人の立場によってかわってしまうことを明らかにした理論である。相対性理論によれば、光の速さに近い速度で移動するロケットで宇宙を旅した人は地球に残っていた人よりも歳を取っていないという「浦島太郎」のような奇妙な結論が導かれる。

また一般相対性理論によれば、光を飲み込んでしまうほどの強い重力場が存在する天体「ブラックホール」近傍では、重力によって時間の流れが遅れてしまう。

本論文では、2006年の橘による卒業論文「特殊相対性理論における時間の遅れ」で論じた光速に近い速度で移動しているロケットでの時間の遅れに、さらにブラックホール近傍まで行って帰ってきたときの時間の遅れ、この二つの時間の遅れを考慮し、静止している人と観測者との時間のずれがどのように変化していくのかを考察した。

また橘の論文ではロケットの加速度は一定だったのに対し、本論文では少しでも実際のロケットの加速に近づけるよう関数形を仮定した。最終的には、ロケットで何年かけて何年先の地球にタイムスリップしたいかというパラメータをもとに、ロケットの速度、ブラックホール滞在の経路の最適結果を出力するプログラムを完成させることが本研究の最終目標である。

## 1.2 本論文の構成

第2章では、光速に近い速度で運動する物体の時間と静止している物体との時間がどのように異なるのかを説明した。第3章では、強い重力場近傍での時間の遅れを説明した。第4章では、ブラックホールへ行って何年か滞在して帰ってくるという仮想モデルを仮定し、第5章では結果と考察を述べた。

## 2 運動する物体の時間の遅れ (特殊相対性理論)

### 2.1 ニュートン力学における時間の概念

ニュートンは絶対時間という考えを提唱した。これは、時間は誰に対しても一様に流れるものであり、観測者の時刻は位置やいかなる運動状態にもよらない絶対的なものであるということである。

例えば同じ構造で同じ時刻を示す二つの時計があった場合、これらの時計がその後それぞれどのような運動をしようと、再び同じ位置に戻って来たときには必ず同じ時刻を示す。日常生活では常識としてとらえられている事実である。

### 2.2 慣性系・ガリレイ変換・相対性原理

ニュートン力学は3つの法則からなる。

- 慣性の法則：外力が作用していないとき、物体は静止しているか、等速運動する。
- 運動の法則：物体の加速度は外力に比例する。
- 作用・反作用の法則：一方が受ける力と他方が受ける力は向きが反対で大きさが等しい。

運動を記述するには、例えば地面に固定した座標系のように基準になる座標系 (基準系) を考えると便利である。慣性の法則は、ある座標系からみて力を受けない物体が等速運動をすることを意味する。これは逆に力を受けない物体の運動が等速直線運動として見えるような基準系を選ぶことができることを示している。慣性の法則が成り立つ基準系を慣性系という。地球は自転しており、太陽の周りを公転して、さらに太陽も銀河系の中で回転運動して、銀河系もまた1つの銀河として運動しているので、厳密には慣性系であるとは言えないが、それだと慣性系が成立している座標系が分からないので、相対的に慣性の法則が成立している座標系を慣性系と定義して、物理法則を議論することは十分に可能である。

慣性系において物体が力の作用を受けると、運動に変化が生ずる。そのことを述べたのが運動の法則である。運動の法則を式に表すと次のような運動方程式になる。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = f \quad (1)$$

物理学の法則を式として表すには、座標系を定めなければならない。そのために1つの慣性系の座標系上でこの運動の法則を表す方程式を示し、 $m$  は質量、 $x$  は座標、 $t$  は時間である。 $f$  はこれらに働く力を表す。この座標系を  $x$  座標系と決め、この  $x$  座標系を  $x$  軸方向に速度  $v$  で運動している座標系を  $x'$  座標系とする。この2つの座標系は図1のように表されるが座標変換は、次の式(2)のように書くことができる。

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (2)$$

この変換では、 $\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$  が成立するので、 $x'$  系の運動方程式 (1) と同じように表され、

$$m \frac{d^2x'}{dt^2} = f \quad (3)$$

となる。これは、 $x$  系と  $x'$  系それぞれの座標系で考えているので同等の式となる。この2つの慣性系の座標変換の式 (2) をガリレイ変換とよぶ。式 (3) は、座標変換である式 (2) を式 (1) に代入することにより証明される。このガリレイ変換を分かりやすく図に表したのが図 2-1 である。 $t$  と  $t'$  が等しいのは、どの座標系でも時間は不変的に流れており、どの座標系でも原点さえ一致させれば流れている時間は等しい。

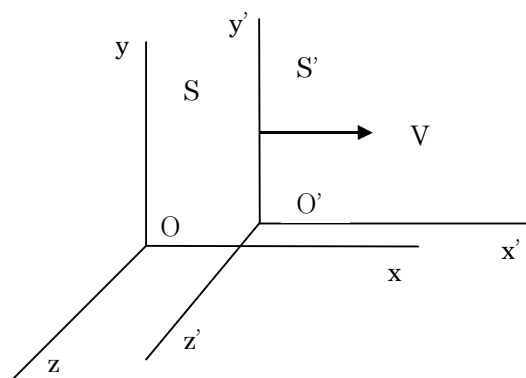


図 2-1: 大きさ  $V$  の相対速度をもつ 2 つの慣性系

このように力学法則はどの慣性系においても同じ形で成立する。これを相対性原理とよぶ。

## 2.3 光速度不変の原理

光速度不変の原理とは、観測者がどんな速さで運動していても、光は常に一定の速さで進むということである。たとえば、光源から発する光の速さが秒速 30 万  $km$  だとして、観測者が秒速 10 万  $km$  で光を追いかけても観測者から見た光の速さは 20 万  $km$  ( $30-10=20$ ) にはならず、つねに秒速 30 万  $km$  で進んでいるように見えるということである。

アインシュタインは相対性原理とこの原理を出発点として相対性理論を構想した。

## 2.4 ローレンツ変換

ローレンツ変換とは、相対性原理 (慣性系の相対性) と光速度不変の原理より導かれる。2つの慣性系間の座標 (時間座標と空間座標) を結びつける線形変換である。2つの慣性系の相対速度  $V$  を、 $V_x = V$ 、 $V_y = V_z = 0$  として空間的に 1 次元の運動を考える。2つの慣性系  $S$  と  $S'$  の座標軸は平行で、 $t = t' = 0$  のとき両方の座標の原点は一致しており、 $S'$  は  $S$  の  $x$  軸の正の方向へ、図 2-1 のように大きさ  $V$  の相対速度で移動しているとする。

ガリレイ変換は互いに等速直線運動をしている慣性系間の空間座標と時間の線形変換であるので、ガリレイ変換を一般化した線形変換を考える。すなわち

$$(x', y', z', t') \text{ は } (x, y, z, t) \text{ の 1 次関数} \quad (4)$$

であるとする。光速不変の原理のもとでは、時間も慣性系ごとに定める必要があるので、慣性系ごとに直行座標  $(x, y, z)$  と時間  $t$  の 4 つの値を定める必要がある。この 4 変数  $(x, y, z, t)$  で記述される時間、空間を合わせてミンコフスキー時空と呼ぶ。光速不変の原理のもとでは、時間も空間も絶対的なものではないから、そのことに気をつけて考察する。まず  $y$  座標について考える。慣性系  $S$  で  $y$  が一定の点は  $xz$  平面に平行な面上にある。この面を  $S'$  でみても  $x'z'$  平面に平行であると考えてよい。したがって  $y$  軸に平行におかれた物差しの長さが変化したとしても、その比は  $V$  のみの関数で、比例定数を  $a(V)$  とすると

$$y' = a(V)y \quad (5)$$

と書ける。ところで、 $S'$  から  $S$  を見ると、 $S'$  の座標系の  $x'$  軸の負の方向へ速度  $V$  で  $S$  が移動している。

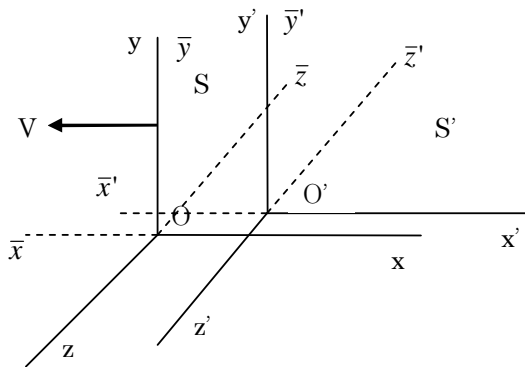


図 2-2: 慣性系  $S'$  から  $S$  をみる

そこで 2 つの座標系で、それぞれ  $y$  軸と  $y'$  軸を回転軸として  $180^\circ$  の回転を行う。座標変換はそれぞれ

$$\begin{aligned} \bar{x} &= -x \\ \bar{y} &= y \\ \bar{z} &= -z \end{aligned} \quad (6)$$

および

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= -x' \\ \bar{y}' &= y' \\ \bar{z}' &= -z' \end{aligned} \quad (7)$$

となる。この新しい座標系によると、 $S$  は  $S'$  の座標系の  $\bar{x}'$  軸の正の方向へ、大きさ  $V$  の相対速度で移動していることになる。これは、もとの座標系を用いて  $S$  から  $S'$  をみた場合と同じになる。したがって式 (5) と同じ形の関係式

$$\bar{y} = a(V)\bar{y}' \quad (8)$$

を得る。変換式 (5) に式 (6)、式 (8)、式 (7) の順に代入すると

$$y' = a(V)y = a(V)\bar{y} = (a(V))^2\bar{y}' = (a(V))^2y'$$

となる。この式の最左辺と最右辺を比較すると

$$(a(V))^2 = 1$$

を得る。したがって  $a(V)$  は  $V$  に無関係な定数となるが、 $a(V) = \pm 1$  の不定さが残る。これは次のようにして簡単に決められる。すなわち  $V = 0$  のときは頂等変換になるから式 (6) は  $y = a(0)y$  となる。よって

$$a(V) = 1$$

を得る。したがって  $S$  の座標  $y$  の点は  $S'$  の座標  $y'$  の点になり

$$y' = y \quad (9)$$

を得る。同様にして

$$z' = z \quad (10)$$

を得る。つぎに  $x$  座標と  $x'$  座標の間の関係を考察する。 $t = t' = 0$  のとき  $S$  の座標と  $S'$  の座標の頂点は一致している。そして  $S$  の  $x$  軸の正の方向への速さ  $V$  で  $S'$  が等速直線運動している。したがって  $S'$  の座標の原点、すなわち  $x' = y' = z' = 0$  の点の、 $S$  からみた  $x$  座標は

$$x = Vt \quad (11)$$

で与えられる。このことと式 (4) から、 $S'$  の  $x'$  座標は変換

$$x' = b(V)(x - Vt) \quad (12)$$

で与えられることがわかる。実際、式 (12) で  $x' = 0$  とおくと式 (11) が得られる。ここで  $b(V)$  は相対的な速さ  $V$  のみの関数である。慣性系  $S'$  と  $S$  の立場をとりかえ、変換式 (6) と式 (7) を行ってみると、式 (12) を導いた場合と同じ事情になるから、

$$\bar{x} = b(V)(\bar{x}' - Vt')$$

という変換式を得る。この式に式 (6) と式 (7) を代入して変形すると

$$x = b(V)(x' - Vt') \quad (13)$$

を得る。式 (13) に式 (12) を代入して  $t'$  について解くと

$$t' = b(V)t - \frac{(b(V))^2 - 1}{b(V)V}x \quad (14)$$

となる。

ここで光速不変の原理を用いて  $b(V)$  の関数系を求める。慣性系  $S$  と  $S'$  は真空中にあるものと

する。時刻  $t = t' = 0$  に原点  $O = O'$  にあった発光体が光を発したとする。光速不変の原理より、真空中の光の速さは光源の運動状態には無関係であるから、発光体は  $S$  上にあるとしても、 $S'$  上にあるとしても、どちらでもよい。光の先端は、 $S$  でみると時間  $t$  ののちには、原点  $O$  を中心とする半径  $ct$  の球面上にある。この球面上の 1 点の座標を  $(x, y, z)$  とすると、それは球面の方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \quad (15)$$

をみだす。したがって  $x$  軸の正の方向へ進んだ光の先端の  $x$  座標は

$$x = ct \quad (16)$$

となる。

一方この光を  $S'$  で観察すると、時間  $t'$  ののちに、光の先端は原点  $O'$  を中心とする半径  $ct'$  の球面上に達するから、この球面上の 1 点の座標を  $(x' = y' = z')$  とすると、球面の方程式

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0 \quad (17)$$

を得る。したがって、 $x'$  軸の正の方向へ進んだ光の先端の  $x'$  座標は

$$x' = ct' \quad (18)$$

となる。

簡単のため、 $x$  軸上で考え、光の先端が、 $S$  と  $S'$  の共通の  $x$  軸 =  $x'$  軸上の空間の 1 点に到達したとする。その点の原点からの距離が  $S$  では  $x$ 、 $S'$  では  $x'$  である。またそのときの時刻を  $S$  では  $t$ 、 $S'$  では  $t'$  であるとする。そのとき、 $x$ 、 $t$  と  $x'$ 、 $t'$  との間には式 (12) と式 (14) で与えられる関係式が成り立つ。式 (18) に式 (12) と式 (14) を代入し、さらに  $x$  を式 (16) により消去すると  $b(V)$  が求まり、

$$b(V) = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

を得る。複号は、 $V = 0$  のとき式 (12) が恒等式となることから定まり

$$b(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (19)$$

を得る。いまは簡単のため  $x$  軸上で考えたが、 $y$  座標、 $z$  座標については式 (10)、式 (11) により  $y = y'$ 、 $z = z'$  である。これを用いれば式 (15)、式 (17) と式 (14) を用いて、やはり式 (19) が導かれる。

式 (19) を式 (12) と式 (14) に代入して

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ t' &= \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \end{aligned}$$



を得る。これらの式と式 (9) と式 (10) をまとめて、ある事象の  $S$  と  $S'$  における時空座標の変換公式として

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x-Vt}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t-Vx/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \end{aligned} \quad (20)$$

を得る。これらの式を、 $x, y, z, t$  について解くと、逆変換の式

$$\begin{aligned} x &= \frac{x'+Vt'}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t'+Vx'/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \end{aligned} \quad (21)$$

を得る。逆変換式 (21) は式 (20) においてダッシュをつけかえ、 $V$  を  $-V$  におきかえて得られる。これは、 $S$  系と  $S'$  系の関係は相対的運動の方向が反対向きであることを除けば、互いに同等であることを意味している。

これらの変換公式をローレンツ変換と呼ぶ。

ローレンツ変換式 (20) は、 $t$  の代わりに長さの次元をもった量  $ct$  を使うと、 $x$  と  $ct$  に対して同じ形の式になる。すなわち

$$x' = \frac{x - (V/c)(ct)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad ct' = \frac{ct - (V/c)x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (22)$$

となる。

ローレンツ変換は、ガリレイ変換の拡張であるが、もっとも大きな違いはガリレイ変換では時間は座標のとりかたとは無関係に流れる絶対的なものであったのに対して、ローレンツ変換では時間は空間座標と一体となって変換されることである。

## 2.5 時計のパラドックス

2つの座標系  $x$  系および  $x'$  系の原点にそれぞれ固定された2つの時計  $C$  と  $C'$  を考える。時刻  $t = t' = 0$  で両者は同じ位置にあり、時計はゼロにセットすると時計  $C'$  は  $x$  系では速度  $v$  で  $x$  方向に移動しているので、時刻  $T$  での時計の世界点<sup>1</sup>を  $P$  とすると、その座標値は  $(ct, x) = (cT, vT)$  である。また  $x'$  系では  $C'$  は原点で静止しているので、座標値は  $(ct', x') = (c\tau, 0)$  である。ローレンツ変換よりこれらの座標値の間には

$$c\tau = \frac{cT - (v/c)T}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \sqrt{1 - (v/c)^2} cT \quad (23)$$

の関係がある。これは

$$\tau = \sqrt{1 - (v/c)^2} \cdot T \quad (24)$$

<sup>1</sup>世界点とは、ミンコフスキー時空での1点のこと。

と書き直すことができる。この式は  $\tau < T$  であることを示しており、運動している時計を観測したとき、その時計が  $\tau$  という時刻を示しているにもかかわらず、 $x$  系の観測者の自分の時計ではすでに  $T$  という時刻を刻んでいることを示している。つまり観測者に対して運動している時計は遅れてみえるのである。自分が静止しているような座標系で測定する時間を、その物体の固有時間と呼んでいる。ここでは  $\tau$  が時計  $C'$  の固有時間である。

今度は設定を逆にし、 $x'$  系に静止した観測者が  $x$  に固定された時計  $C$  を観測する場合を考える。同様に  $x'$  系から  $x$  系の時計  $C$  を観測する。座標系の相対性から運動している時計は時間が遅れるので式 (24) で  $\tau$  と  $T$  を入れ代えた式

$$T = \sqrt{1 - (v/c)^2} \cdot \tau \quad (25)$$

を用いると、この時の時計  $C$  の時刻がわかる。 $v$  の値を  $0.87c$  とすると  $x'$  系が運動している場合、 $x$  系で  $T = 2$  時間のとき式 (24) が示すように  $x'$  系の時計は  $\tau = 1$  時間しか経っていない。また  $x$  系が運動している場合に  $\tau = 1$  時間を代入すると  $T = 0.5$  時間という値が得られる。 $x$  系の観測者は  $T > \tau$  と主張し、 $x'$  系の観測者は  $T < \tau$  と主張しているということである。これを時計のパラドックスという。おたがいの時計の進み方が遅くなるというのは矛盾しているように思われるが、光速度不変の原理より運動している座標系と静止している座標系は、互いに別々の時間を持っているので式 (24) と式 (25) は別々のものの時間を比較していることになる。よって互いに遅れることは正しいことが分かる。

## 2.6 双子のパラドックス

2.5 節で述べた、互いの時間が遅れる矛盾というのは、異なる世界点におかれた 2 つの時計を比較したことによる同時性の不一致から生じたものである。そこで  $x'$  系に固定した時計  $C'$  を世界点  $P$  (時刻は  $\tau$ ) で速度が、 $-v$  である  $x''$  系に移し変えてもと来た道を戻る。すると時刻  $2\tau$  には出発地点に帰って来る。この時点で 2 つの時計は同じ世界点にあるのでお互いの時計を見せ合うことで時間の比較を行うことができる。一方の時計が進んでいるならもう一方の時計は遅れていなければならない。互いに相手の時計が遅れているという主張は矛盾である。この矛盾を分かりやすく表現したのが双子のパラドックスである。双子の一方 A 君は地球に残り B 君は光の速さに近いロケットで宇宙を旅行し帰ってくる。B 君は時刻  $\tau$  に瞬時に速度を反転し帰路に向かう。すると時刻  $2\tau$  に地上に帰還することになる。地球に固定した  $x$  系も、行きのロケットに固定した  $x'$  系も、また帰りのロケットに固定した  $x''$  系もすべて慣性系であり、自分の座標系から観測した相手の時計は遅れるはずである。

つまり B 君が帰還したとき、A 君の立場から考えると「B 君は自分より若くなっている」はずだし、B 君の立場から考えると「A 君は自分より若くなっている」はずである。

この矛盾を双子のパラドックスという。しかしこの 2 人の主張で正しいのは、地球に固定した慣性系  $x$  系に終始留まった A 君の方だけである。地球に残っている A 君の時間を  $t$ 、ロケット内の B 君の時間を  $t'$  としたとき  $t'$  は式 (24) より

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - (v/c)^2} \Delta t \quad (26)$$

として表すことができる。

この式 (26) を積分することによって B 君が宇宙旅行をして帰って来る間に地球上では何年進ん

でいるのかを知ることができる。

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1 - (v/c)^2} dt \quad (27)$$

B君は宇宙旅行に行った際、折り返し地点で速度を反転する加速度運動を瞬時に行うが、その加速度運動は、この積分には寄与しない。したがって帰着点である地球での  $x$  系での時刻は  $2T$ 、宇宙旅行してきた時計の固有時間は  $2\tau$  である。当然、宇宙旅行してきた B君の方が歳は若いままである。 ( $2\tau < 2T$ )

宇宙旅行してきた B君がこれと同じことを主張することはできない。なぜなら B君に固定した座標系は加速度運動しているため、慣性系ではないからである。

## 2.7 時間の遅れ

前節の式 (26) より  $v$  の値が  $c$  に近づけば近づくほど B君の時間は遅れていくことがわかる。実際にどの程度時間が遅れるのかを図に示す。

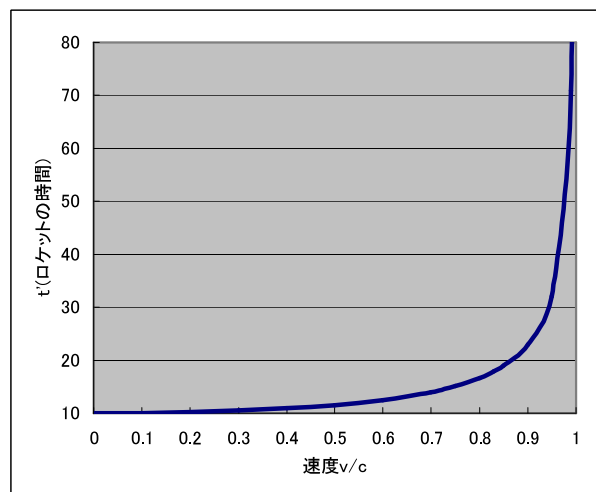


図 2-3: ロケットに 10 年乗った場合の地球時間

これはロケットで宇宙を速度  $v$  で 10 年間旅行した場合の地球の時間を示したものである。図から分かるように  $0.1c$  ぐらいでは、さほど変化はないが  $0.9c$  のときには地球の時間が約 2 倍の 23 年、 $0.99c$  では約倍の 71 年も経っている。光速に近づければ近づくほどに時間の遅れが顕著に増加しているのが分かる。

### 3 強い重力場における時間の遅れ (一般相対性理論)

#### 3.1 アインシュタイン方程式

一般相対性理論によれば、大質量の物体は周囲の時空を歪ませる。つまり、重力の正体は時空の歪みである。

アインシュタイン方程式は、アインシュタインの重力場の方程式とよばれ、一般相対性理論の中で導いた、万有引力・重力場を記述する場の方程式である。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (28)$$

左辺は、時空がどのように曲がっているのかを表す時空の曲率であり、右辺は物質場の分布を表す。左辺は  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$  としてアインシュタインテンソルと呼ばれ右辺の  $T_{\mu\nu}$  はエネルギー・運動量テンソルである。

左辺の  $R_{\mu\nu}$  はリッチの曲率テンソル、 $R$  はリッチの曲率スカラーであり、どちらも時空多様体の計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  から計算される幾何学量である。 $G$  は万有引力定数、 $c$  は光速であり、添え字  $\mu, \nu$  は、それぞれ時空の座標を特定するもので、時間1次元と空間3次元の4成分を動き、 $g_{\mu\nu}$  は10個の独立成分を持つ  $4 \times 4$  の対称テンソルである。

星のような物質またはエネルギーを右辺に代入すれば、その星の周りの時空がどういう風に曲がっているかを読みとることができる式である。

#### 3.2 シュヴァルツシルトの解

一般相対性理論におけるアインシュタイン方程式 (重力場の方程式) の解の1つで、カール・シュヴァルツシルトが導き出したものをシュヴァルツシルトの解と呼びアインシュタイン方程式のもっとも簡単な解である。

シュヴァルツシルトの解の導出方法を下記に記す。

アインシュタイン方程式 (重力場の方程式) を  $r$  を動径座標とする球対称、静的真空という条件で解く。球対称、静的という仮定から計量を

$$ds^2 = -e^{\nu(r)}dt^2 + e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\varphi^2) \quad (29)$$

とおく。

式 (29) の計量テンソルの 0 でない成分として、

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -e^{\nu(r)} \\ g_{rr} &= e^{\lambda(r)} \\ g_{\theta\theta} &= r^2 \\ g_{\varphi\varphi} &= r^2 \sin^2\theta \end{aligned} \quad (30)$$

と関数形を仮定した。

式 (30) は、

$$\begin{aligned}
g^{tt} &= -e^{-\nu(r)} \\
g^{rr} &= e^{-\lambda(r)} \\
g^{\theta\theta} &= \frac{1}{r^2} \\
g^{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}
\end{aligned} \tag{31}$$

と変形することができる。

式 (31) より、クリストッフェル記号  $\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ae}(\partial_b g_{ec} + \partial_c g_{eb} - \partial_e g_{bc})$  を計算すると次式が得られる。

$$\begin{aligned}
\Gamma_{tr}^t &= \Gamma_{rt}^t = \frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr} & \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\sin\theta \cos\theta \\
\Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dr} & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -re^{-\lambda} \\
\Gamma_{tt}^r &= \frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr} \cdot e^{\nu-\lambda} & \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r} \\
\Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cot\theta & \Gamma_{\theta r}^\theta &= \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r}
\end{aligned} \tag{32}$$

他のすべての成分は0である。

リッチテンソル  $R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu\lambda}^\lambda$  を計算して、真空での重力場の方程式  $R_{\mu\nu} = 0$  の左辺が0でないものを書くと

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= e^{\nu-\lambda} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{d^2\nu}{dr^2} - \frac{1}{4} \left( \frac{d\nu}{dr} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{d\nu}{dr} \frac{d\lambda}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} \right\} = 0 \\
R_{rr} &= \frac{1}{2} \frac{d^2\nu}{dr^2} + \frac{1}{4} \left( \frac{d\nu}{dr} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{d\nu}{dr} \frac{d\lambda}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr} = 0 \\
R_{\theta\theta} &= -1 + e^{-\lambda} \left( 1 + \frac{1}{2} r \frac{d\nu}{dr} - \frac{1}{2} r \frac{d\lambda}{dr} \right) = 0 \\
R_{\varphi\varphi} &= -\sin^2\theta + \sin^2\theta e^{-\lambda} \left( 1 + \frac{1}{2} r \frac{d\nu}{dr} - \frac{1}{2} r \frac{d\lambda}{dr} \right) = 0
\end{aligned} \tag{33}$$

となる。 $R_{tt}$  に  $e^{-\lambda}$  をかけて  $R_{rr}$  に加えると

$$e^{-\lambda} R_{tt} + R_{rr} = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\nu + \lambda) = 0$$

を得る。これから  $b$  を任意の定数として

$$\nu + \lambda = b \tag{34}$$

となる。この式を  $R_{\theta\theta}$  に代入して  $\nu$  を消去すると

$$\begin{aligned}
R_{\theta\theta} &= -1 + e^{-\lambda} \left( 1 - r \frac{d\lambda}{dr} \right) \\
&= -1 + \frac{d}{dr} (re^{-\lambda}) = 0
\end{aligned}$$

を得る。この式を積分すれば、 $a$  を積分定数として

$$\begin{aligned}
-r + re^{-\lambda} + a &= 0 \\
e^{-\lambda} &= 1 - a/r
\end{aligned} \tag{35}$$

となる。これらの解、式 (34) と式 (35) を式 (33) に代入すると、すべての方程式をみたすことがわかる。したがって、式 (29) は

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{a}{r}\right)(dt)^2 + \frac{1}{1 - a/r}(dr)^2 + r^2\{(d\theta)^2 + \sin^2\theta(d\varphi)^2\} \tag{36}$$

となる。積分定数  $a$  を定めるには、弱い重力場近似の式  $g_{tt} = \eta_{tt} - \frac{2}{c^2} \Phi(x, y, z)$  にニュートン力学のポテンシャル

$$\Phi = -GM/r$$

$$G = 6.672 \times 10^{-11} m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$$

を代入して比較すると

$$g_{tt}(r) = -1 + \frac{a}{r} = -1 + \frac{2}{c^2} \frac{GM}{r}$$

となる。すなわち

$$a = \frac{2GM}{c^2} \quad (37)$$

である。計量が式 (36), (37) で与えられているアインシュタインの重力場の方程式  $R_{\mu\nu} = 0$  の解を、シュヴァルツシルト解と呼ぶ。

これは重力の源となっている物質の外部で成り立つ解である。そしてこの計量をシュヴァルツシルト計量という。

### 3.3 シュヴァルツシルト半径

前節で導かれたシュヴァルツシルト計量は十分遠方ではニュートンの万有引力の法則と一致するが、半径が

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (38)$$

で発散する。つまり内部の領域、 $r < r_g$  では  $g_{tt}$  は正となり、また  $g_{rr}$  は負となる。つまり内部の領域では、 $t$  の方向への微小変化  $dt$  によって世界間隔の 2 乗  $ds^2$  は正となり、 $t$  座標軸は時間的ではなく空間的 ( $ds^2 > 0$ ) になっている。また  $r$  軸の方向は、逆に空間的ではなく時間的 ( $ds^2 < 0$ ) になっている。この計量の性質が大きく変化する半径  $r_g$  をシュヴァルツシルト半径と呼ぶ。このシュヴァルツシルト半径の内側からは光をも脱出することはできない。この領域をブラックホールと呼ぶ。すなわち  $r_g$  はブラックホールの境界である。

### 3.4 ブラックホール近傍での時間の遅れ

前々節のシュヴァルツシルトの解より、座標一定点での時間を考えると  $dr = 0, d\theta = 0, d\varphi = 0$  とし、時間の遅れは次式で表すことができる。

$$dt' = \sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}} dt \quad (39)$$

この式は、ブラックホールより十分遠方にいる観測者 ( $dt$ ) と、ブラックホールの中心から距離  $R$  の位置にいる観測者 ( $dt'$ ) の関係を示す。すなわちブラックホールの質量  $M$  とブラックホールの中心からの半径  $R$  の値を与えるとロケットでブラックホール近傍を訪れた場合、ロケットに乗っている人の時間は地球に残っている人の  $\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}}$  倍遅れることを意味している。

また半径  $R$  が小さいほどブラックホールの中心に近づくため時間の遅れは増加する。半径  $R$  を前節で説明したシュバルツシルト半径  $r_g$  の  $a$  倍として、先ほどの式 (39) は

$$dt' = \sqrt{1 - \frac{1}{a}} dt \quad (40)$$

と表せる。実際にブラックホールの周りをロケットで円運動した場合、円運動する際の距離、半径  $R$  の値を変えるとロケット内と地球の時間にどれくらいの遅れが生じるのかを図 3-1 に示す。

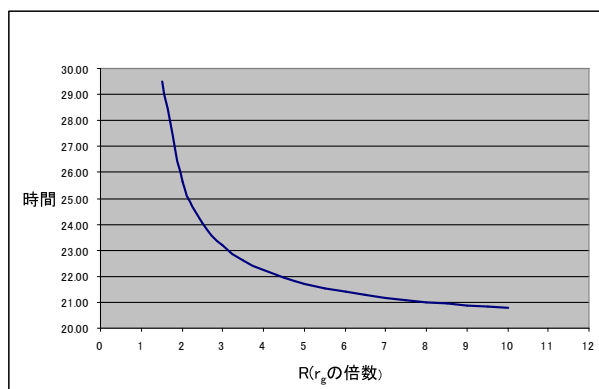


図 3-1:半径  $R$  の周りを地球時間 10 年円運動したときのロケット内の時間

図から分かるとおり円運動する半径  $R$  の値が小さいほど、つまりブラックホールからの距離が近い程、ロケット内の時間は遅れて進む。

また  $r_g$  で単位を考えると、時間の遅れる割合は、ブラックホールの質量によらないこともわかる。

ブラックホールの周りでは、最終安定円軌道<sup>2</sup>である半径  $3r_g$  以上の地点を円軌道しなければ、ブラックホールの巨大な重力に飲み込まれてしまう。 $3r_g$  の地点で円運動した場合の地球の時間は、図よりロケット内の時間の約 2.3 倍の 23 年であることが分かる。

<sup>2</sup>ブラックホールの周りを円運動する際、重力と遠心力が釣り合い、かつ安定している点を円運動しなければならない。

最終安定円軌道とは、その名のとおりにこの半径の内側では安定な円運動をとることができない半径である。その半径はシュバルツシルト半径の 3 倍である。

## 4 準光速ロケットによる宇宙旅行の仮想モデル ~ 未来旅行 ~

この章では、ロケットでブラックホールまで行って帰ってきた場合を考え、運動する物体の時間の遅れと強い重力場による時間の遅れ、この2つによる時間の遅れから下記の3つを求めた。

- モデル A T' 年かけて (ロケット内の時間)、T 年 (地球の時間) 先の未来に行く と仮定したときのロケットの速度 V と往復する星までの距離 (D 光年)
- モデル B T 年先の未来へ行くのに D 光年先のブラックホールを往復すると仮定したときのロケットの速度 V とロケット内の時間 T' 年
- モデル C モデル B の仮定にブラックホールの周りを t 年円運動したときのロケットの速度 V とロケット内の時間 T' 年

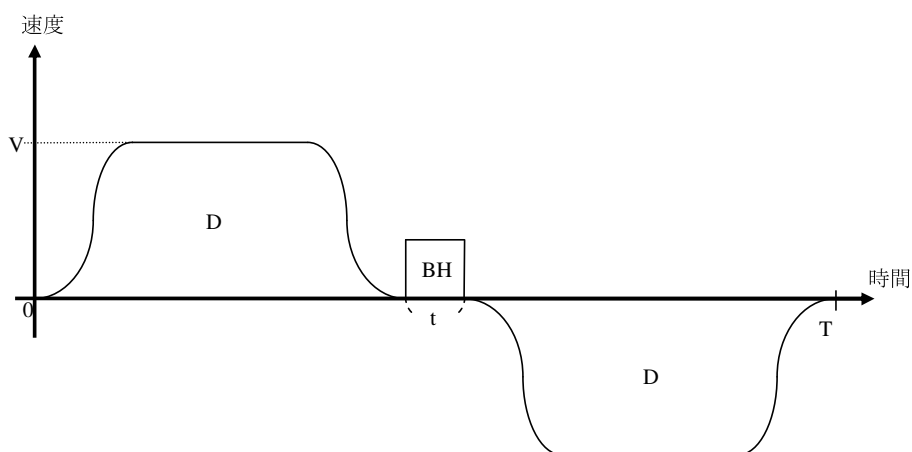


図 4-1: 仮想ブラックホール旅行モデル

### 4.1 ロケットの加速・減速部分の仮定

ロケットが最高速度  $V$  に達するまでの加速の様子は図 4-1 のように 3 つの関数形からなるよう仮定した。3 つの関数は  $(0 < t \leq t_1)$ 、 $(t_1 < t \leq t_2)$ 、 $(t_2 < t \leq t_3)$  で場合分けされ、それぞれの関数式は

$$v = \begin{cases} \frac{1}{2}at^2 & (0 < t \leq t_1) \\ at_1(t - t_1) + v_1 & (t_1 < t \leq t_2) \\ \frac{1}{2}\frac{at_1}{t_2 - t_3}(t - t_3)^2 + V & (t_2 < t \leq t_3) \end{cases}$$

であらわされるものとする。それぞれの曲線、直線がなめらかに接続するように工夫した。図 4-2 に  $v - t$  グラフを示す。

この 3 つの式から

$$V = -\frac{1}{2}\frac{at_1}{(t_2 - t_3)}(t_2 - t_3)^2 + at_1(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}at_1^2 \quad (41)$$



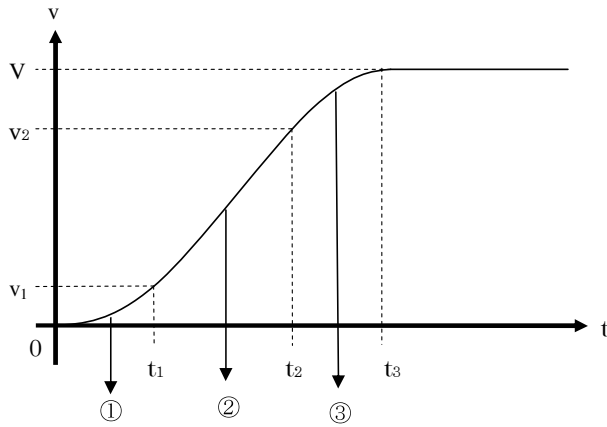


図 4-2: ロケットの加速

が得られる。なお図 4-2 と式からも分かるように  $(t_1 < t \leq t_2)$  での式  $at_1(t - t_1) + v_1$  は、加速度  $at_1$  の等加速度運動していることを表している。その傾き  $(at_1)$  を人間が実際耐えうるであろう重力加速度  $2g$  以内に抑えるため  $a = 0.01g$ 、0 から  $t_3$  までを 100000 分割し、 $t_1 = \frac{1}{100000}t_3$ 、 $t_2 = \frac{99999}{100000}t_3$  とした。

このとき、ロケットの速度を  $0.9c$  とした場合の  $at_1$  の値は 16.2 である、 $(at_1 < 2g = 19.6)$  なので、ほぼ光速の 90 % くらいまでの加速であれば、加速度は  $2g$  以内に収まる。それ以上の速度  $V$  まで加速する場合はロケット内が強い重力場となる。

$a$ 、 $t_1$ 、 $t_2$  を式 (41) に代入すると式 (41) は

$$V = 9.7999 \times 10^{-7} \cdot t_3^2 \quad (42)$$

となる。

式 (42) は  $V$  と  $t_3$  の関数である。つまり、 $V$  の値を決めてやれば、 $t_3$  の値が求まるので場合分けされた関数各々の時間でのロケットの速さが求まり、式 (26) によって各々の時点での時間の遅れを算出することができる。

実際には区分求積法を用いて、次のように時間の遅れや距離を計算した。

例として  $(0 < t \leq t_1)$  の範囲での時間の遅れは、0 から  $t_1$  までを  $n$  分割して、 $i$  番目と  $i - 1$  番目で積分し足し合わせる。

$$dt'_i = \int_{\frac{i-1}{n} \cdot t_1}^{\frac{i}{n} \cdot t_1} \sqrt{1 - (v(t)/c)^2} dt_i \quad (43)$$

また時間と速度が分かれば、場合分けされた関数それぞれを区分求積法を用いることにより、加速している間に進んだ走行距離も算出することができる。同じく例として  $(0 < t \leq t_1)$  の範囲での走行距離は、時刻  $\frac{i}{n} \cdot t_1$  と  $\frac{i-1}{n} \cdot t_1$  の間で進んだ距離は  $\frac{T_1}{n}$  であり速度を  $v_i$  とすると時間が  $t_1$  に達する間に進んだ距離  $D_1$  は  $D_i$  を 0 から  $t_1$  までの範囲で足し合わせたものである。 $D_i$  は

$$D_i = v_i \times \frac{t_1}{n} \quad (44)$$

で求めることができる。実際のプログラムでは  $n = 10^5$  とした。

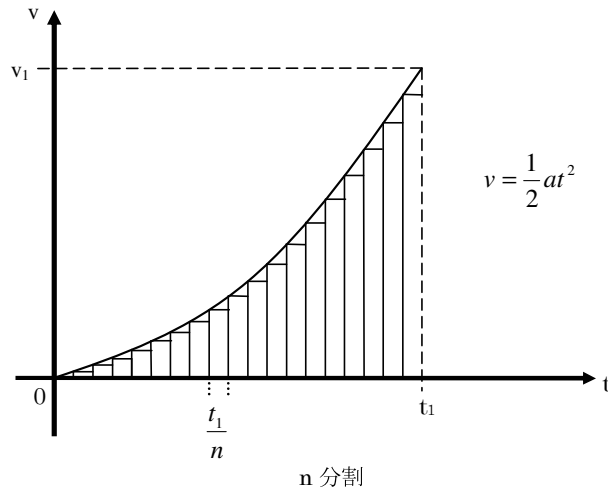


図 4-3:区分求積法

## 4.2 境界値問題の計算方法

モデル A、B、C は、それぞれ仮定する値と算出する値があるが、これらの解を見つけるためには積分方程式を解くことが必要である。本研究では、プログラムを組み、すべて  $V$  を仮定することによって求めた。

すなわち  $V$  を仮定して、求める量を計算し、そのプロセスをくり返すことによって目的の量に近づけていくという境界値法の手法を取った。具体的には次のような手順である。

最高速度である  $V$  の値を決めてやると前節で述べたとおり、加速部分でのロケット内の時間の遅れ、その間に進んだ距離を求めることができる。また等速運動している部分では  $\frac{T}{2}$  から加速、減速 ( $2t_3$ ) を差し引いた部分を前節と同様に式 (26) を使うことによって時間の遅れを求めることができ、またその面積を求めれば距離を求めることができる。実際、プログラムを作成するにあたって、2分法を用いて作成した。例としてモデル A のプログラムの流れを図 4-4 に示す。

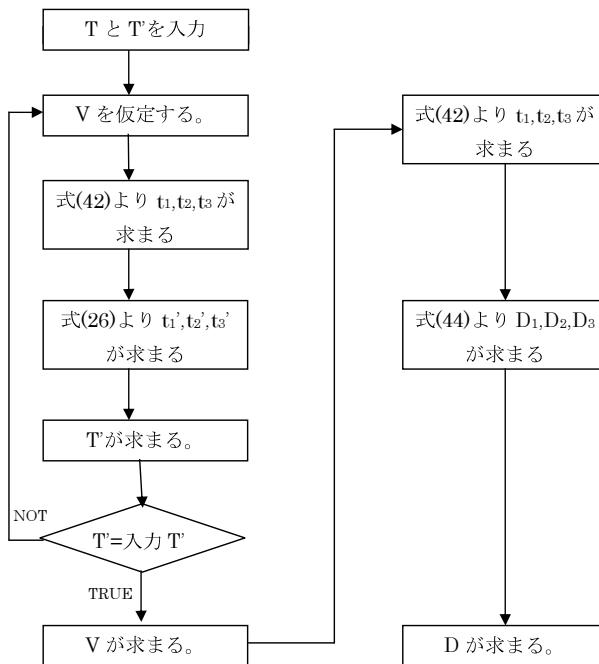


図 4-4:モデル A のプログラムのフローチャート

## 5 結果・考察

### 5.1 モデル A

モデル A  $T'$  年かけて (ロケット内の時間)、 $T$  年 (地球の時間) 先の未来に行くと仮定したときのロケットの速度  $V$  と往復する星までの距離 ( $D$  光年)

100 年先の未来に行くのにロケット内の時間  $T'$  を与えたときに、速度  $V$  と距離  $D$  の値はどのようなになるのかを計算した。グラフ化すると図 4-5 のような結果が得られた。

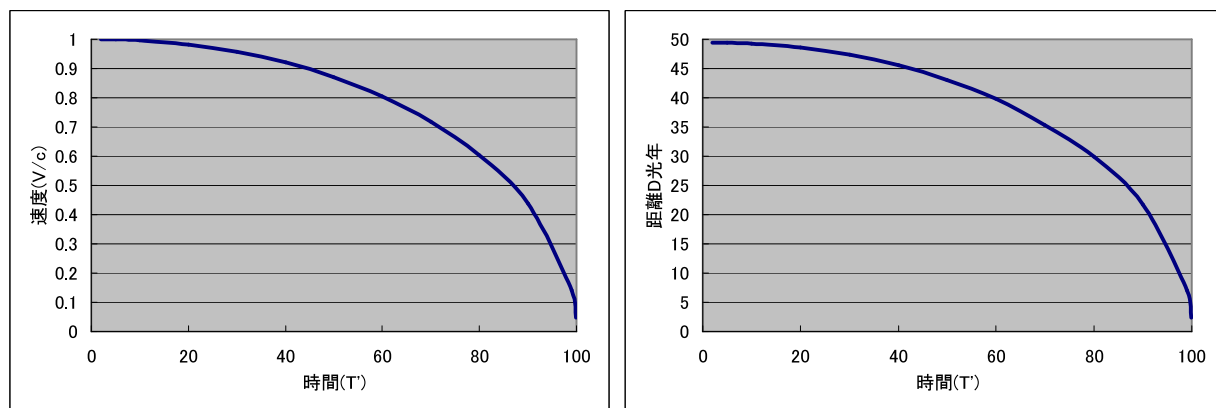


図 4-5:100 年先の未来へいく場合の  
速度とロケット内の時間の関係 (左グラフ)  
星までの距離とロケット内の時間の関係 (右グラフ)

図 4-5 から分かるようにロケット内の時間  $T'$  が増加すると速度  $V$  と距離  $D$  は減少していくことが分かる。つまりロケット内の時間を短くすればするほど、より光速に近い速度で飛行し、なおかつ星までの距離の値も大きい。長くした場合は、その逆になることが分かる。グラフ上の  $T'=100$  の点は存在しない。これは、100 年先の未来に 100 年かけて行くことを意味するので第 2 章で述べたとおり運動している観測者というのは、少なくとも時間の遅れが生じるため、 $T'=100$  の点は存在しない。地球上にいるのと変わらないからである。また  $T'=0$  の点となるのは、ロケットの速度が光速と同じスピードにならなければなる極限に相当する。

## 5.2 モデルB

モデルB T年先の未来へ行くのにD光年先のブラックホールを往復すると仮定したときのロケットの速度Vとロケット内の時間T'年

これは目的地を設定したときに、実際に生じるであろうロケットと地球の時間の進み方の違いを考えるモデルである。

3つのブラックホールを設定した。下記のとおりである。

1. プロキシマ・ケンタウリ…ケンタウルス座の恒星であり太陽系から最も近い天体である。この星は光っているからブラックホールではないが、この程度の距離(4.22光年)にブラックホールがあると仮定した。
2. 白鳥座のX-1…太陽系から約8000光年先にある、現在ブラックホールの最有力候補の天体。質量は太陽の9倍以上といわれている。
3. 銀河中心のブラックホール…太陽系が存在する銀河、その中心には巨大なブラックホールがあるといわれている。距離は30000光年で、その質量は太陽の $10^6 \sim 10^{10}$ 倍といわれている。

それぞれTの値を増加させると速度Vとロケット内の時間T'がどのように変化するか計算した。また注意点として、ブラックホールを往復するには光速でも2D年かかってしまうためTの値は $T > 2D$ の範囲で設定しなければならない。計算した結果のグラフを下記に記す。

### 1. プロキシマ・ケンタウリを往復する場合

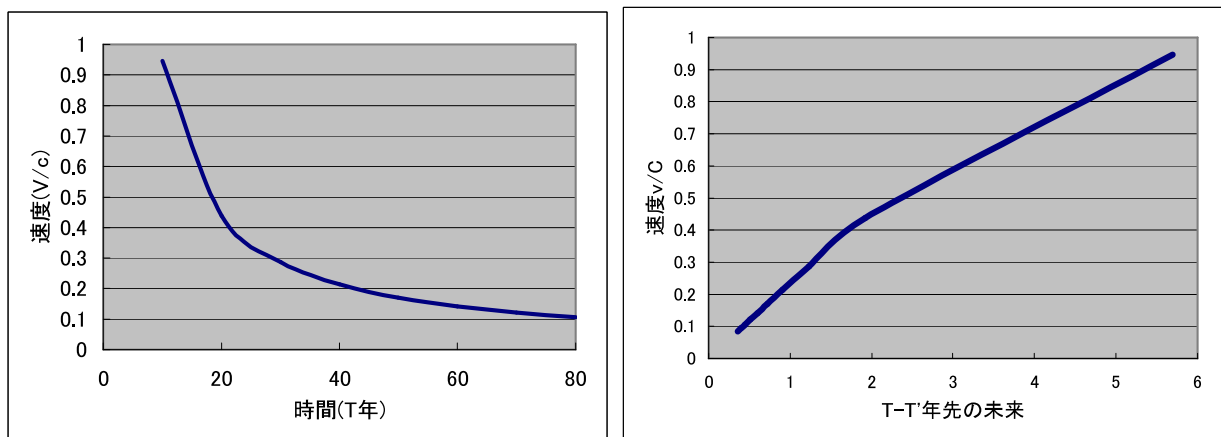


図 4-6: プロキシマ・ケンタウリを往復する場合の  
ロケットの速度と地球の時間の関係 (左グラフ)  
ロケットの速度と地球とロケット内の時間のずれの関係 (右グラフ)

## 2. 白鳥座 X-1 を往復する場合

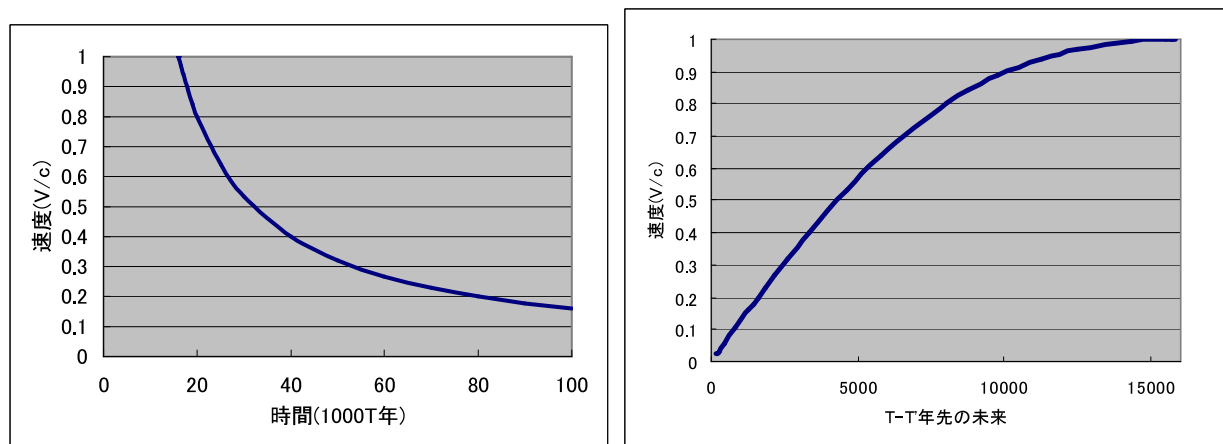


図 4-7:白鳥座 X-1 を往復する場合の  
ロケットの速度と地球の時間の関係 (左グラフ)  
ロケットの速度と地球とロケット内の時間のずれの関係 (右グラフ)

## 3. 銀河中心のブラックホールを往復する場合

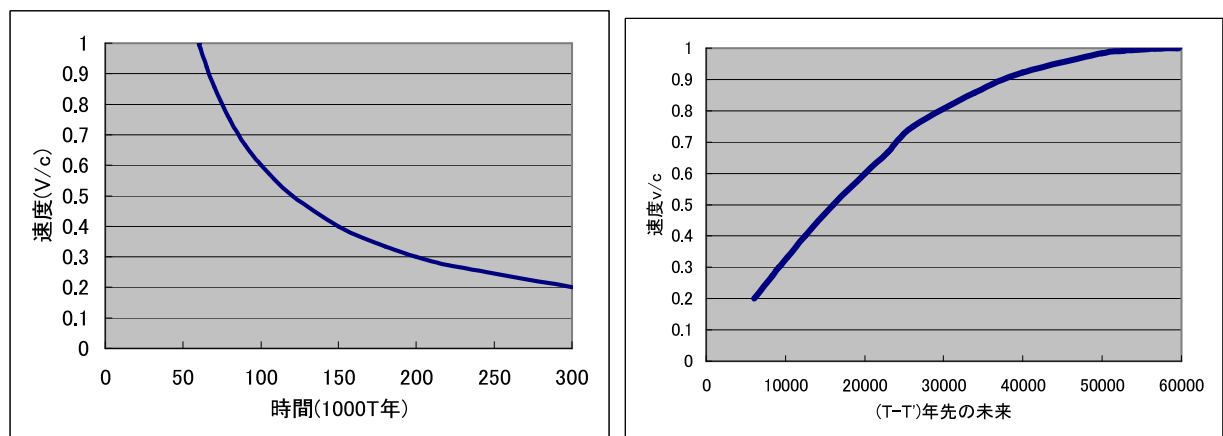


図 4-8:銀河中心のブラックホールを往復する場合の  
ロケットの速度と地球の時間の関係 (左グラフ)  
ロケットの速度と地球とロケット内の時間のずれの関係 (右グラフ)

この3つのパターンは、どれもほぼ同じ曲線を描いていることが分かる。右図より、ロケットの速度が光速に近づくにつれ、ロケット内の時間が進まなくなるので、ロケット内と地球の時間のずれが大きくなっていることが分かる。また左図から分かるように、より遠い未来(地球時間)に行こうとすればするほど、速度は減少し、ロケット内の時間は増加していることが分かる。この理由は以下のとおりである。 $T = 2D$ とは光速と同じ速度で旅行するという意味なので、仮定することはできないがTの値を2Dの値に近づければ近づけるほど、速度は光速に近づく。つまり遠い未来というのは( $T \gg 2D$ )であり、速度は光速から遠ざかっていく。第2章で説明したとおり、ロケット内の時間は、ロ

ケットの速度が光速に近いほど遅れるので、遠い未来に行こうとすると ( $T$  の値を大きくすると)、速度は小さくなり、ロケット内の時間の遅れも小さくなる。

ロケットの乗組員の寿命を考え、5 世代にわたって ( $T' = 500$  : 人間の寿命を 100 とした) 宇宙旅行するとしたとき、 $T' \leq 500$  の制限内に収まるときの  $T$  の値を計算すると、 $T$  の範囲はそれぞれ

- 1. プロキシマ・ケンタウリス … ( $8.5 < T < 500$ )
- 2. 白鳥座 X-1 … ( $16000 < T < 16009$ )
- 3. 銀河中心 … ( $60000 < T < 60004$ )

となる。上記から分かるように、実際に 5 世代にわたりブラックホールを往復して未来に行くことを考えると、 $T$  の値は  $2D$  よりも大きな値であり、なおかつ遠いブラックホールへ行けば行くほどその上限は小さな値になっていることが分かる。 $T$  の範囲の下限の値が約  $2D$  になるため  $T'$  (ここでは 500 年) の値が  $2D$  の値に近ければ近いほど、より遠い未来へ行くことができる。仮に  $T'$  の半分である 250 光年先にブラックホールがあったと仮定し  $T$  の値を計算すると、 $T$  の範囲は  $500 < T < 710$  であり、加速・減速の加速度を  $|2g|$  とした場合には、710 年後が 5 世代で行ける最も遠い未来だということが分かる。

### 5.3 モデルC

モデルC ケースBの仮定にブラックホールの周りを $t$ 年円運動したときの  
ロケットの速度 $V$ とロケット内の時間 $T'$ 年

モデルBと同様に $T$ 年先の未来に $D$ 光年離れたブラックホールを往復する。今回はブラックホールについての地点から $t$ 年間その周りを円運動したときに、ロケットの速度 $V$ とロケット内の時間 $T'$ がどのように変化するか計算した。

注意点として、前節と同様 $2D$ 年以下の未来に行くことはできない。今回は問題設定が $t$ 年間ブラックホールの周りを円運動するため $T - t > 2D$ の条件で値を決めてやらねばならない。

20000年先の未来に行くとして、白鳥座のX-1を往復する場合、 $t$ の値を増加させると速度 $V$ 、ロケット内時間 $T'$ がどのように変化するか計算した。結果を図に示す。

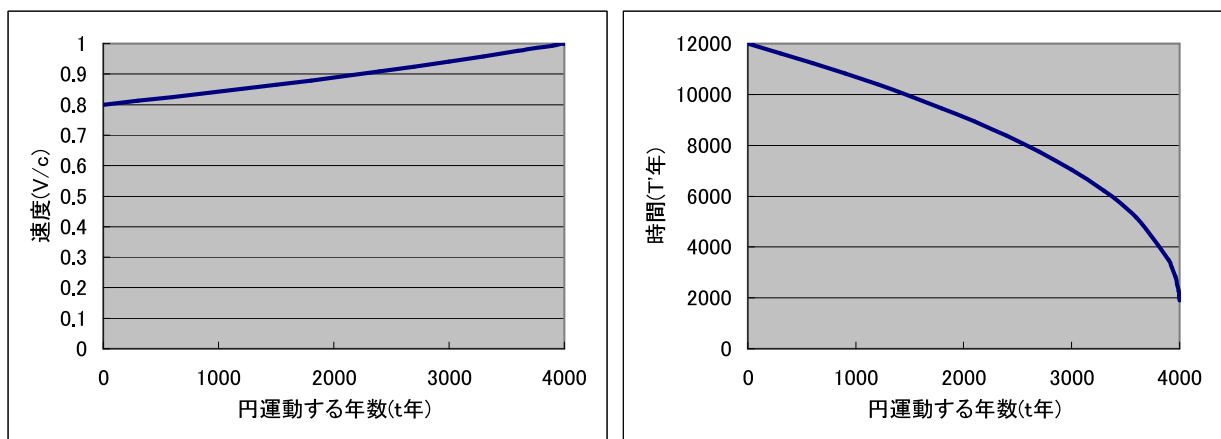


図 4-5:

図よりブラックホールの周りを円運動する年数を増やせば増やすほど、ブラックホールの周回運動では時間の遅れは稼げなくなるので、ロケットの速度は増加しなければならないことが分かる。

しかし、この結果は強い重力場から受ける時間の遅れによるものではない。多少の遅れはあるのだが、第3章で説明したとおり $t'$ は約 $\frac{1}{2.3}t$ と微々たるものであり、 $t$ の値を増加させると $T-t$ の値が減少していくため、速度が増加してしまうためである。

## 参考文献

- [1] 佐藤勝彦著 相対性理論 (岩波基礎物理シリーズ 9), 岩波書店 (1996)
- [2] 中野薫夫著 相対性理論 (物理入門コース), 岩波書店 (1984)
- [3] 福江純著 ブラックホールは怖くない?, 恒星社厚生閣 (2005)