

卒業論文  
重力波のデータ解析における分散処理の必要性

大阪工業大学  
情報科学部 情報科学科  
学籍番号 A05-043  
北口 潤  
2009年2月13日

# 目次

<b>1</b>	<b>序論</b>	<b>3</b>
1.1	背景	3
1.2	本研究の目的	3
1.3	本論文の構成	3
<b>2</b>	<b>アインシュタイン方程式</b>	<b>4</b>
2.1	アインシュタイン方程式	4
2.2	重力波	4
2.2.1	重力波の間接的な証拠	5
2.2.2	予想される重力波源	5
2.2.3	重力波検出への期待	6
<b>3</b>	<b>分散処理とは</b>	<b>8</b>
3.1	Einstein@home	8
3.2	その他のプロジェクト	9
3.3	BOINC とは	10
<b>4</b>	<b>数値解析法</b>	<b>11</b>
4.1	フーリエ級数展開	11
4.2	区分求積法	12
4.2.1	長方形近似	12
4.2.2	台形の公式	13
4.2.3	シンプソンの公式	14
4.3	テスト解析	15
<b>5</b>	<b>重力波描出のシミュレーション</b>	<b>16</b>
5.1	ノイズを含めたデータに対するフーリエ級数展開の精度	16
5.2	ノイズを含めたデータから検出時刻の特定	21
5.3	Einstein@home を想定したシミュレーション	34
<b>6</b>	<b>まとめ</b>	<b>38</b>

# 1 序論

## 1.1 背景

普段私たちは、パソコンを多種多様に使用している。少し前までは、文章や表計算をするために使われていたが、インターネットや様々なソフトウェアの普及により、日々パソコンは便利に使いやすくなっている。分散処理もその1つである。分散処理とは、時間がかかる計算をネットワークでパソコン同士を結び、計算データを分散し処理にかかる時間を大幅に削減しようとする考えである。今現在では、遠く離れた場所からでも処理することが可能である。複数のパソコンをネットワークで結び、計算機間がお互いに通信しながら処理する。この技術を駆使して、いつでも、どこにいても、誰でも、ネットワーク環境が整っていれば簡単に参加が出来る、地球や宇宙に関することに役立てるプロジェクトがある。

本論文では、アインシュタインが一般相対性理論を提案した時から存在を予言し、重力の波動現象である重力波の検出を目的としたプロジェクト Einstein@home に参加し、どのような概念で、どのような計算を行っているのかを学び、実際のデータを自分で作成したプログラムで解析する。1905年、アインシュタインが「特殊相対性理論」を発表した。この理論では、重力が働かない特殊な状況下で成り立つ理論であり、その10年後、すべての状況下において成り立つ「一般相対性理論」を発表した。

重力波は、1960年代にメリーランド大学のウェーバー (J.Weber) により、検出実験が始められたが、現在でも直接検出されていない。しかし、現在は天体からの重力波をとらえることができる感度を持つ検出器が建設されていて、実際に観測される日も近いと考えられている。重力波が検出されると重力波による天文学を学ぶことが出来る。

## 1.2 本研究の目的

本研究では、重力波の直接検出を目的とした分散処理プロジェクトに参加し、その中でどのような数学を用いて計算が行われているのか、なぜ分散処理する必要があるのか、分散する根本的な理由を、自ら解析プログラムを作成してテスト解析を行う。次に、故意的に重力波を含んだデータを解析し、重力波検出の際にはどのような反応があるのかをシミュレーションする。また、得られた結果からある程度の範囲に限定して、分散しなければ計算時間はどのくらい変わるの見積もりを立てる。

## 1.3 本論文の構成

まず、第2章では、アインシュタイン方程式と重力波について説明する。次に第3章では、分散処理プロジェクトの Einstein@home とそれを扱う BOINC について説明する。第4章ではフーリエ分解を用いたシミュレーション方法を簡単に説明する。第5章で実際のデータをオリジナルのプログラムを用いて解析し、重力波の検出を再現する。以降はこれまでの結果と考察を述べる。

## 2 アインシュタイン方程式

この章では、文献 [1, 2] を参照している。

### 2.1 アインシュタイン方程式

1905年に、アインシュタインは「特殊相対性理論」を発表した。特殊相対性理論では2つの原理を土台にした理論であり、相対性原理と光速不変の原理である。第1の相対性原理は慣性系と座標系とでは、光速を含むすべての物理法則が成り立つという原理である。第2の光速不変の原理は、光の速さは誰から見ても、常に  $3.0 \times 10^8 \text{ km/s}$  で一定になると言う原理である。特殊相対性理論は重力を含まない理論である。しかし、その10年後重力が働く状況下でも成り立つ「一般相対性理論」を発表した。一般相対性理論では等価原理を土台に特殊相対性理論をさらに発展させ考えられた理論である。等価原理とは、加速度運動する観測者からすると慣性力と重力を同じとみなすことができる。つまり重力を慣性力と考えることができる。アインシュタイン方程式は、アインシュタインの重力場の方程式と呼ばれ、一般相対性理論で導いた、万有引力・重力場を記述する場の方程式である。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

左辺は、時空がどのように曲がっているのかを表す曲率であり、右辺は物質場の分布を表す。左辺は  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$  としてアインシュタインテンソルと呼ばれ、右辺の  $T_{\mu\nu}$  はエネルギー・運動テンソルである。左辺の  $R_{\mu\nu}$  はリッチの曲率テンソル、 $R$  はリッチの曲率スカラーであり、どちらも時空多様体の計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  から計算される幾何学量である。 $G$  は万有引力定数、 $c$  は光速であり、添え字  $\mu, \nu$  は、それぞれ時空の座標を特定するもので、時間1次元と空間3次元の4成分を動き、 $g_{\mu\nu}$  は10個の独立成分を持つ  $4 \times 4$  の対称テンソルである。

星のような物質またはエネルギーを右辺に代入すれば、その星の周りの時空がどういう風に曲がっているかを読み取ることが出来る式である。

### 2.2 重力波

一般相対性理論によれば、大質量の物体の激しい運動によって周囲の時空を歪ませ、時空の歪みが波のように伝わる。この波動現象を重力波と呼ぶ。重力波はアインシュタインによって予言されているが、直接検出はまだされていない。また、検出可能な重力波は地上で人工的に発生することは不可能であり、天体現象で発生する重力波に期待することになる。ただ、天体現象では大きな重力波は発生しない。メリーランド大学のウェーバー (J. Weber) によって、検出実験が1960年代に始められた。ただ、重力波は極めて小さく検出は不可能とされていた。また、当時の検出器の感度では重力波の直接検出は夢のような話だった。

しかし、現在は天体からの重力波をとらえることができる感度を持つ検出器が建設されていて、実際に観測される日も近いと考えられている。重力波が検出されると重力波による天文学を学ぶことが出来る。ここでは、重力波はどのようにして発生するのか述べる。

### 2.2.1 重力波の間接的な証拠

間接的な証拠は、1974年にプエルトリコにあるアレシボ電波天文台で2つの星がお互いに旋回しているときに重力波があったと観測された。これは、十数年長期的に星を見ていたとき、お互いの軌道周期が減少していることが発見された。学者のテイラーとハルスは軌道周期の変動に疑問を抱き、お互いに旋回しているときに何か別の力が働き、軌道周期が変動させられていると考えた。実際に、重力波によりお互いの星がエネルギーを失っていた。

### 2.2.2 予想される重力波源

重力波は巨大な質量を持った物質の激しい運動で発生するとされている。天体现象から発生する重力波の検出が必要である。ただ、通常为天体现象で発生する重力波は極めて小さく、重力波のエネルギー放出率が典型的な周波数の6乗に比例するため、運動周期の極めて短い現象が重力波の候補となる。しかし、重力波の発生には、質量の集団的な運動が必要で、その周波数には限界がある。例えば、中性子星の半径を10kmとすると、光がこれを横切る時間は約 $70\mu\text{s}$ である。この時間が、星全体の質量が運動する一番短い時間のスケールを与える。ここから、重力波の周波数はだいたい10kHz程度が上限となることがわかる。これより高い周波数の重力波が発生する場合、星全体の質量が関与することはなくなり、発生率が低くなる。

また、先ほど述べた連星系からの重力波の周期は数時間である。この例からも分かるように、低い方はmHz以下の周波数まで広がっていると考えられている。しかし、地上では低い周波数ほど揺らぎが大きく、このような周波数の重力波を観測することは難しくなる。

ここでは、地上の検出器で最も検出に期待ができそうな周波数(10Hz~10kHz)の重力波源について述べる。

#### ● 連星の合体

連星系は重力波を放出し続けると軌道周期が近づき、2つの星は合体する。PSR 1913+16の場合には約 $3\times 10^8$ 年後合体すると考えられていて、この合体の直前には、軌道周期は数ミリ秒までに上昇し、非常に大きな重力波が発生すると期待されている。このような現象は中性子星連星系の合体と呼ばれていて、地上で観測可能な重力波源の最有力候補であると考えられている。

ただ、このような現象は宇宙が広いからといっても稀な現象である。また、約 $3\times 10^8$ 年後合体するまで待つことになるので他の波源に頼ることになる。

#### ● 超新星

ある種の星は、最後の瞬間に大爆発を起こす。超新星と呼ばれている現象である。超新星にはいくつかの種類があるが、光学的な観測等で観測されている。この現象は星全体の質量が極めて大きな時間変動を起こすので、重力波の発生源として有望視されてきたが、実際にどのような運動が起きるのかは全く不明であり、数値計算による結果で議論が行われている。もし、星の爆発が完全に球対称だと重力波は出ない。

## ● パルサーからの連続波

パルサーは回転する中性子星と考えられている。もし、パルサーの形状が回転軸の周りで非対称であれば、重力波が発生する。そして電磁波で正確に回転の周期が測定されるので、その情報を用いて、極めて高感度に信号解析を行うことが可能である。また、ほかの重力波源と異なり連続的な信号が出ているため、測定を行う時間を選ばないという利点がある。実際に、ほとんどのパルサーは、回転速度が低下している現象(スピンドアウン: ゆっくりになる)が見られている。これは、パルサーが何らかの形でエネルギーを放出していることを意味している。このスピンドアウン率を見るとパルサーの放出しているエネルギーの総量が測定できる。ここから、パルサーからの重力波の上限が推定できる。しかし、連星系と異なり、電磁波などで放出されるエネルギーもあり、重力波の寄与がどの程度あるのかはよく分かっていない。

パルサーに対する重力波探査は、最初、牡牛座のかに星雲のパルサーに対して行われていた。このパルサーは、1054年の超新星の残骸の中に発見されたもので、地球からの距離は約6300光年、約30Hzの信号を送っている。若いパルサーでスピンドアウン率( $3.8 \times 10^{-10}$  Hz/s)も大きい。もし、全てが重力波であるとすると、地上で観測した時  $h \sim 10^{-25}$  となる。

また、その後、発見されたミリ秒パルサーと呼ばれる高速回転するパルサーもある。最初、ミリ秒パルサーが発見された時は(B 1937+21, 624Hz)、エネルギーの放出率が周波数の6乗に比例することから、大きな重力波が期待されたが、観測が進みスピンドアウン率が小さいことが判明した( $\sim 10^{-14}$ Hz/s)。その後も多くのミリ秒パルサーが見つかったが、状況は変わらない。最速のパルサーは2006年に見つかったが、スピンドアウン率の正確な値は分かっていない。ただ、回転周波数が712Hzと極めて高いので、星のある種の振動モードが不安定になって成長し、重力波を放出する可能性が示唆されている。もし、重力波が観測されると中性子星の構造に関して重要な情報が得られる。

今のところ星の形状に関する情報は全くないから、観測での上限から形状の非対称性を決めることになっている。 $h$ の上限はだいたい $10^{-23}$ となっている。

Einstein@homeで扱うデータは、パルサーからの連続波を計算に使用しているが、地球もパルサーも公転するので受信方向が異なる。よって重力波の到達時間も変わるのでその都度計算が行われる。

### 2.2.3 重力波検出への期待

天文学の基本は、天体の発する様々な波長の電磁波を観測することである。ガリレオによる望遠鏡の発明以来、最新の観測技術は常に新しい宇宙の姿をもたらしてきた。

もし、重力波による宇宙観測が始まったら、どんな姿が見えるだろうか。電磁波は電荷の運動を発生するので、天体全体の運動状態を反映しているわけではない。また、基本的に表面または天体を取り巻く周囲の物質から発せられるから、天体内部の運動の様子を直接見ることはできない。しかし、重力波は星全体の巨視的な運動の状況が見える。これは、電磁波観測による情報とは相補的なものになる。連星系の合体は衝突が起きるまでは重力波以外の手段ではそれを観測することは不可能と思われる。また、合体が始まるとすさまじいエネルギーが放出される。特異な天体現象として知られる $\gamma$ 線バースト(GRB)は、そのエネルギー発生の機構に

謎が多く、ある種の GRB はこの連星の合体ではないかという説もある。このようなことは、重力波が観測されればより深く機構を理解できる。

この分野の研究を始めた頃は、重力波の源の一番目は、超新星であった考えられていた。そしてその当時は銀河系内（距離で 10kpc くらい）で起きれば、 $h \approx 10^{-18}$  という話で、技術の発展に伴いこのレベルが実現できるという状況だった。しかし、銀河系内では 100 年に一度くらいしか起きないから、乙女座銀河団の約 15~22Mpc までカバーするためには感度が  $10^{-21}$  という話になった。この範囲なら、超新星は年に数回かそれ以上観測されるから、何か有意な信号が見える可能性が高いということだった。ところが、精密な数値計算で超新星を扱い、重力波の放出を検討するとは実はもっと小さな信号しか発生しないことが分かった。そして、波形のよく分かる連星の合体が一番の目標になった。しかし、こちらは全く頻度が分からない。結局、さらに遠くまで見える感度が要求されている。検出器の感度は、今、乙女に手が届くかどうかの青年期にある。ここでめでたく見つければ、その後の研究の発展に拍車がかかるのは間違いない。

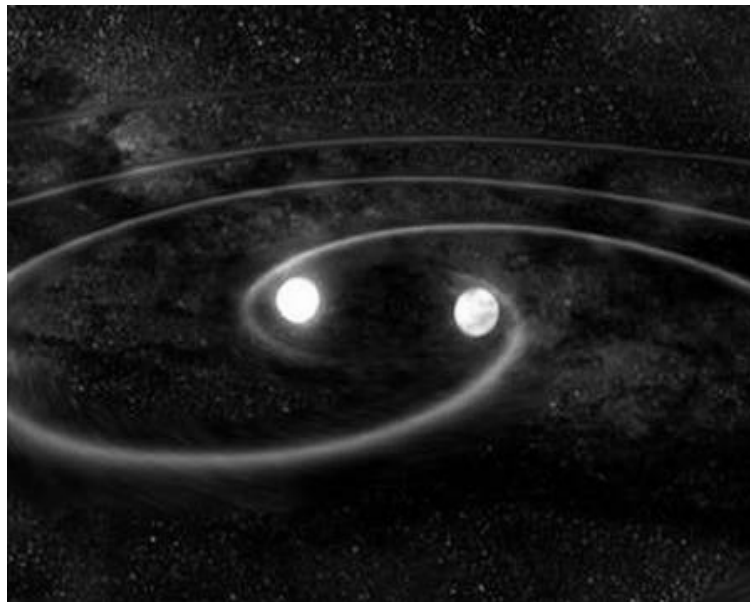


図 1: 連星系からの重力波

図 1 は、回転している 2 つの連星系から重力波が発生している。さざ波のように伝わっていくのがわかる。2 つの星は、重力波を放出しながら軌道周期を縮めていき最後には合体する。その直前には、大きな重力波が発生するとされている。( <http://the-cosmos.org/2005/06/img/06-02/0-3-1-wd00.jpg> )

### 3 分散処理とは

この章では、プロジェクトとそのプロジェクトを運用する分散処理のソフトウェアである BOINC について説明する。尚、この章は文献 [3,4,5] を参照している。

#### 3.1 Einstein@home

##### Einstein@home

本プロジェクトは、重力波の直接検出を目指すプロジェクトである。前章でも説明したが時空の歪みが波のように伝わっていく波動現象を重力波と呼ぶ。宇宙では超新星爆発によってブラックホールや中性子星が形成されるとき、また隣接した連星系から強い重力波が放出されると考えており、実際にテイラーとハルスは、PSR 1913 + 16 という連星パルサーの周期を十余年間にわたり正確に測定した結果、1981 年に、そこから重力波によってエネルギーが放出されていることを間接的に証明したが、しかし、重力波の直接検出には至っていない。電磁波を利用して正確な回転の周期がわかっているパルサーや、その他のパルサーが出ずであろうと考えられる重力波の周波数を対象にしていて、計算に用いて直接検出を目指す。観測したデータからノイズ以外の信号を計算し取り出す作業を分散している。この計算には、アメリカにある LIGO とドイツにある GEO600 という専用の重力波検出器が出力したデータを用いる。



図 2: 重力波検出器の LIGO

図 2 は重力波データを出力する重力波検出器である。レーザー干渉計である LIGO は長さ 4km で直径 1.2m の真空管が 2 つの設置されている。そこからデータを出力する。

( <http://www.phys.lsu.edu/lsusps/zonemeeting2007/LIGO.gif> )



## 3.2 その他のプロジェクト

- SETI@home

SETI(Search for Extraterrestrial Intelligence) は、地球外の知的生命を検出するプロジェクトである。専用の電波望遠鏡を使って宇宙からの狭帯域信号を受信を目標にする。狭帯域信号は自然現象では生じる例は知られていないので、検出することは地球外にほかの技術がある証拠になる。電波信号は主にノイズとテレビ局、レーダーや衛星など人工的な信号で構成される。SETI@home ではデジタル化されたデータを解析する。その際、CPU 能力が高ければ大きい周波数範囲でも処理速度をあげることができます。参加することは CPU 能力を上げることになる。したがって SETI 信号の検出を手助ける。

- Rosetta@home

蛋白質が 3 次元的にどのような形状であるかを決定する。最終的には人間の病気の治療法の発見に至るかもしれない。計算生物学の重要な要素の 1 つであるタンパク質の立体構造とタンパク質複合体を正確に予測し設計する一歩手前まで来ている。これを証明するには、世界最大のスーパーコンピューターをも上回る莫大な計算資源が必要となる。

- Seasonal Attribution Project

気象変化を予測したり、極端な気象事象は人類が起こした気候の変化にどの程度起因しているのかを調べるプロジェクトである。最近の異常気象の現象は、世界の気候に人間活動の影響について議論を求めている。

- LHC@home

素粒子加速器を素粒子が巡る様子を模擬して、その軌道の安定性を研究するプロジェクトである。PC の使用していない時間を利用して計算をする。

今回は Einstein@home を含めて、5 つのプロジェクトを紹介したが分散処理を用いたプロジェクトは他にもまだまだたくさんある。( <http://boinc.oocp.org/projects.php> )

### 3.3 BOINC とは

BOINC ( Berkeley Open Infrastructure for Network Computing ) とは分散コンピューティングのためのオープンソース・ソフトウェアである。( <http://boinc.berkeley.edu/> ) 世界で約 30 万もの人が参加していて、約 50 万台のコンピュータを使い、約 1700TFLOPS の計算時間を可能にしている。用いるデータはそれぞれのプロジェクトによって異なるが、プロジェクト専用の観測器で観測されたデータを使うが、観測データを解析するには膨大な処理能力が必要で、スーパーコンピュータでも長時間かかる計算を分散して行う。分散するデータは参加者の PC が使用していない時間にデータを送り、計算をさせる。計算は自動的に行われ、計算が終わるとサーバに自動的に結果が転送させる。参加者の皆が協力して、スーパーコンピュータを超える仮想スーパーコンピュータを再現し、処理能力の向上を目的とするプラットフォームである。これはプロジェクトすべてに共通する。

BOINC は、膨大な計算量と大容量ストレージの一方もしくは両方を必要とするアプリケーションを支援するように作成されていて、プロジェクトは数十テラ FLOPS もの CPU パワーと何テラバイトものストレージへアクセスすることが可能である。

しかし、BOINC はボランティアがプロジェクトの資源を自発的に提供されたもので信頼性は低い、BOINC を効果的に利用できるアプリケーションには次の特性が要求される。

- 公共の共感

多くの参加者の協力をなくして、このソフトウェアは成り立たない。アプリケーションは公衆にとって興味深く感じれるべきである。プロジェクトの運営には、人々の興味を引きそれなりの目的と心構えが必要である。

- 独立した並列処理

アプリケーションは、互いにデータ依存性を持たない並列処理に分割可能である。

- 計算量に比べて低データ量

入出力データは、高価だが接続は遅いかもしれないインターネットを経由して送られる。アプリケーションが CPU 時間一日当たり 1 G バイト以上のデータを生みだすか消費する場合、構内接続コンピュータ群を使用するほうが、ボランティア・コンピューティングよりも安価である。

- 耐故障性

参加のコンピュータから計算し返信される結果が常に正しいとは限らない。エラー発生確率を抑えるために冗長コンピューティング手法 (Redundant computing) を用いるも、確率をゼロにすることは出来ない。

BOINC は、一般的に運用されているソフトウェアなので PC のネットワーク環境が整っていれば誰でもダウンロードが可能で、誰でも参加することが出来る。BOINC 上で運用するプロジェクトはそれぞれが独立性を持っているため参加したいときに参加することが出来る。また、プロジェクトによって処理能力を変更することが可能である。しかし、あまり知られておらずプロジェクトの参加が少ないのが現実である。( <http://boinc.oocp.org/parallelize.php> )

## 4 数値解析法

この章では、文献 [5,6] を参照している。

### 4.1 フーリエ級数展開

Einstein@home でデータ解析をする際、LIGO と GEO という重力波検出器から出力されるデータを用いて、パルサーからの連続的な重力波を発見しようとする。重力波はパルサーの形状が回転軸に周りで非対称であれば重力波が発見されるとされており、電磁波を利用して正確な回転の周期がわかっているパルサーや、その他のパルサーが出ずであろうと考えられる重力波を対象にしている。解析計算にはフーリエ級数展開を用いており、フーリエ級数展開では「周期的な関数は、すべて三角関数の和として表現することができる」という概念のもと、波の現象があるときその波の性質を数学的に解析する手段として重宝されている。データ解析や信号処理などの工学的な分野で使用される。重力波データを波や電波の信号を有限でかつ周期的であると仮定してに変換し、パワースペクトル（成分）を求めることで、その波の持つ特徴を見つけ出すことが出来き、波の式を導くことが出来る。

次の (4.1) はフーリエ級数展開の式である。

$$\lambda(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{f=1}^{\infty} (a_f \cos 2\pi ft + b_f \sin 2\pi ft) \quad (4.1)$$

入力波形  $\lambda(x)$  は、右辺のように  $\sin x$  と  $\cos x$  の合成に分解できると考える。ここで  $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$  は係数である。

$a_n$  と  $b_n$  それぞれの求め方は

$$a_f = \frac{2}{T} \int_0^T \lambda(t) \cos 2\pi ftdt \quad (4.2)$$

$$b_f = \frac{2}{T} \int_0^T \lambda(t) \sin 2\pi ftdt \quad (4.3)$$

ここで  $T$  は周期を、 $f$  は周波数を、 $t$  は時間（秒）をそれぞれ表している。

## 4.2 区分求積法

与えられた入力信号  $f(x)$  を周期  $T$  の範囲まで積分することでパワースペクトルを求めることが出来る。式 (4.2) と式 (4.3) は区分求積法を用いたプログラムで作成した。今回用いた区分求積法は、長方形近似、台形の公式、シンプソンの公式の3種類である。

### 4.2.1 長方形近似

積分区間  $[a, b]$  を  $k$  分割し、各小区間の上で長方形を足し合わせていく公式である。積分する範囲を分割して図 3 のように長方形で近似していく。

$$\int_a^b f(x)dx = f(a+1) * h + f(a+2) * h + \dots + f(b) * h \quad (4.4)$$

ただし、 $h = (b - a)/k$

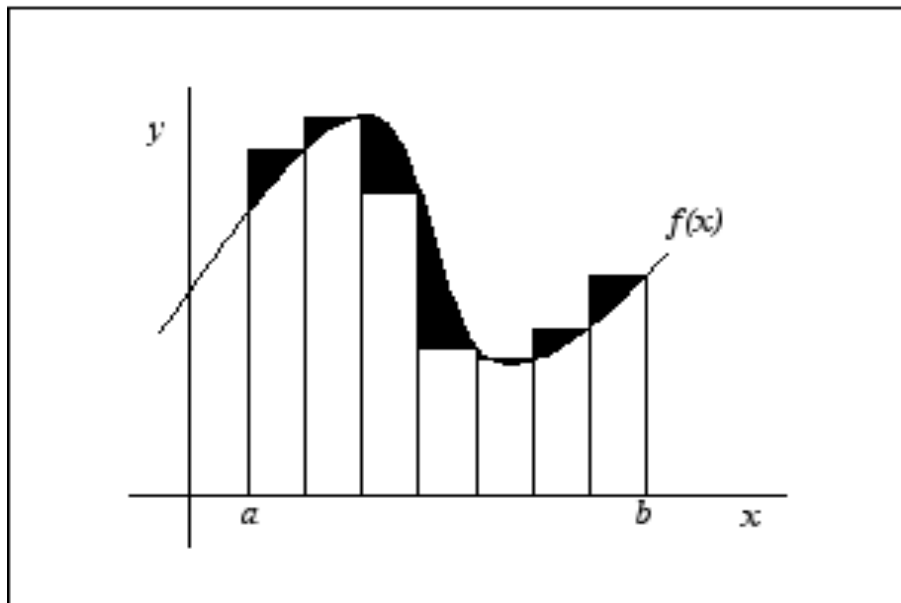


図 3: 長方形近似

図 2 より黒い部分は誤差を表していて、長方形近似の場合では波の振幅が複雑なほど誤差が大きくなる。

台形の公式とシンプソンの公式は、積分区間をいくつかの小区間に分割し、各小区間の上で被積分関数を補間多項式で近似する。その補間多項式の小区間の上で積分しその結果を加え合わせる。

#### 4.2.2 台形の公式

積分区間  $[a, b]$  を  $k$  分割し、各小区間の上で台形を足し合わせていく公式である。

全体としては

$$\int_a^b f(x)dx = (f(a) + f(a+1)) * \frac{h}{2} + (f(a+1) + f(a+2)) * \frac{h}{2} + (f(a+2) + f(a+3)) * \frac{h}{2} \\ \dots + (f(b-1) + f(b)) * \frac{h}{2} \quad (4.5)$$

ただし、 $h = (b - a)/k$

よって

$$\int_a^b f(x)dx = (0.5f(a) + f(a+1) + f(a+2) + f(a+3) + \\ \dots + f(b-1) + 0.5f(b)) * h \quad (4.6)$$

となる。

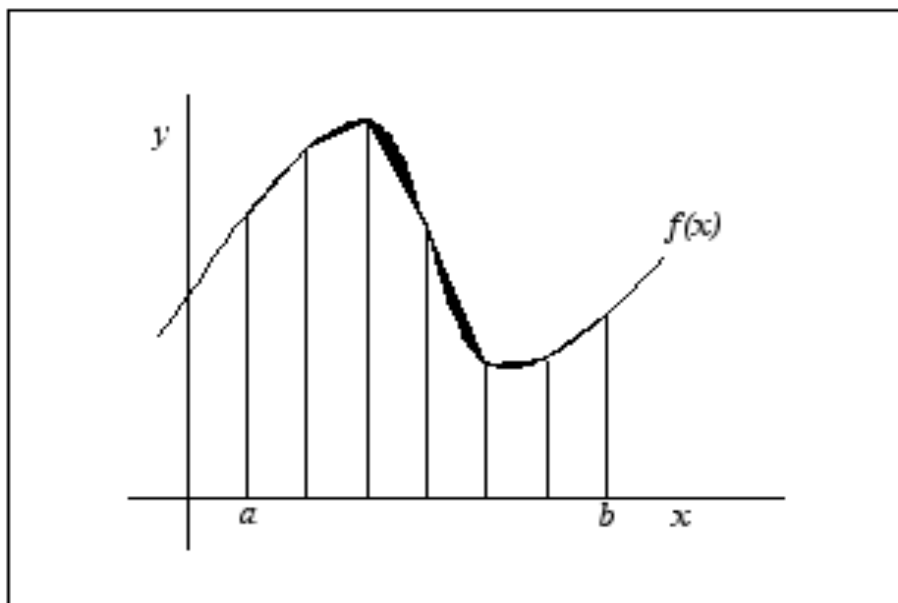


図 4: 台形の公式での近似

図 4 より、台形の公式での近似でも長方形近似より少ないが振幅の差が大きいとき誤差が生じることがわかる。

### 4.2.3 シンプソンの公式

積分区間  $[a, b]$  を  $k$  分割して、2 区間ずつ組にして被積分関数を 2 次式で近似するで足しあわしていく公式である。

二つの小区間に  $[x_k, x_{k+2}]$  における積分値は

$$\int_{x_k}^{x_{k+2}} f(x) dx = (f(x_k) + f(x_{k+1}) + f(x_{k+2}))h / 3 \quad (4.7)$$

全体としては

$$\int_a^b f(x) dx = \{ (\text{両端の関数値の和}) + 4(\text{奇数番目の値の和}) + 2(\text{偶数番目の値の和}) \} / 3 \quad (4.8)$$

ただし、 $h = (b - a)/k$  で  $n$  は偶数に限る。

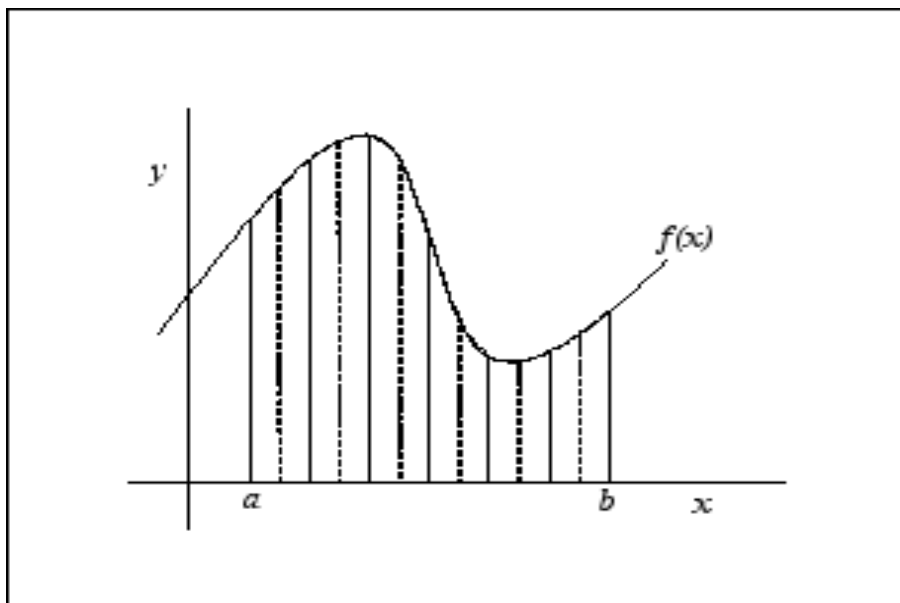


図 5: シンプソンの公式での近似

図 5 より、シンプソンの公式を用いると誤差はほとんど見られない。

図 3、図 4、図 5 より、シンプソンの公式、台形の公式、長方形近似の順に精度が高くなると考えられる。次にそれぞれの精度のテスト解析を行う。

### 4.3 テスト解析

サンプルデータからパワースペクトルを導き出すプログラムを長方形近似、台形の公式、シンプソンの公式の3種類それぞれの区分求積法を用いて作成した。ここでは、同じ波に対してどのように数値が変わってくるのか、分割する数を同じにして精度を比較する。

図6は10000個の値で三角関数を合成したものである。式は

$$y = 2 \sin(x) + 5 \cos(3x) + 4 \sin(8x) + 3 \cos(10x) \quad (4.9)$$

である。

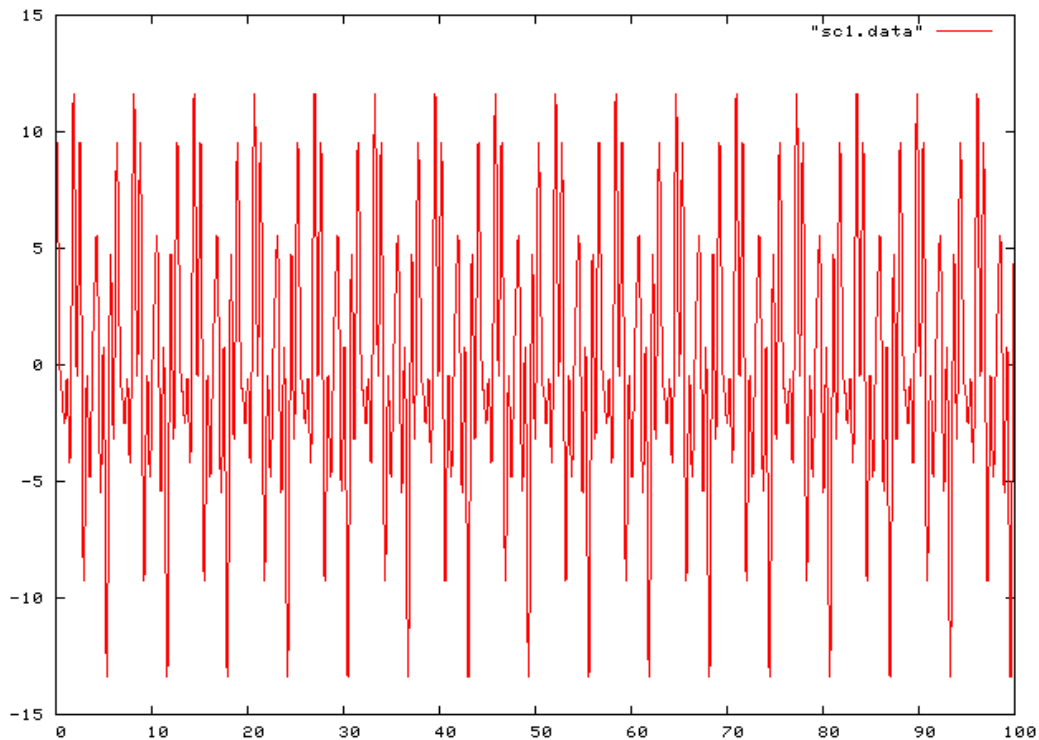


図6: サンプルデータ

このサンプルデータを作成した3種類のプログラムで解析する。次に示すのは、それぞれ100分割して得られた結果である。

長方形近似では、 $b_1 = 2.0386 \dots, a_3 = 4.8162 \dots, b_8 = 3.8567 \dots, a_{10} = 2.9346 \dots$

台形の公式では、 $b_1 = 2.0115 \dots, a_3 = 5.1189 \dots, b_8 = 4.0146 \dots, a_{10} = 3.0904 \dots$

シンプソンの公式では、 $b_1 = 2.0106 \dots, a_3 = 5.0199 \dots, b_8 = 4.0146 \dots, a_{10} = 2.9947 \dots$

という結果になった。以上の結果から精度が良い順に並べると、シンプソンの公式、台形の公式、長方形近似になった。よって、シンプソンの公式を用いて重力波のデータ解析を次章で行う。

## 5 重力波描出のシミュレーション

本研究では、実際に Einstein@home で分散し計算されているデータ解析を再現する。実際に Einstein@home で計算されているデータは、大阪市立大学理学研究科の神田展行教授からいただき、シミュレーション解析をしていく。データはほぼノイズで構成されていて雑音を含んだ状態で考える必要がある。その際に故意に重力波を含んだデータにして解析する。次に重力波は解析結果がどのようなときに存在するのかを述べる。

### 5.1 ノイズを含めたデータに対するフーリエ級数展開の精度

フーリエ級数展開で実データを解析しどんな周波数なのか、どこに重力波があったのかを求める。その際、ノイズとその他の信号の閾値は決まっており、Signal to Noise ratio (SNR) と呼ばれる。SNR はノイズと信号の比率を表し、重力波では、ノイズの平均値よりも 1.25 倍を超える値の場合、その値をノイズ以外の信号と見なすことを決めている。考える重力波のサンプルデータとしてはノイズが一定レベル ( $10^{-19}$  の振幅) であり、挿入した重力波の振幅が  $(\alpha)10^{-16}$ 、 $(\beta)10^{-17}$ 、 $(\gamma)10^{-18}$ 、 $(\delta)10^{-19}$  の場合を考えた。最後の場合は、ノイズと重力波が同レベルであるが、振幅が同じでノイズの中に紛れ込んだデータから重力波信号を描出可能なのかが問題になる。

ここでは、振幅の異なる波のデータを解析し、周波数を求めるとどのような結果が得られるかシミュレーションする。設定として周波数の範囲は 50 ~ 300Hz の間の整数値を持つものとした。

次に示す図は、振幅ごとに 1 秒間の信号を 20000 個の値で与えたサンプルデータと振幅ごとに周波数のパワースペクトルを求めたグラフである。

図 7 は、振幅が  $(\alpha)10^{-16}$  の波と振幅が  $10^{-19}$  のノイズの和を合成したものである。図 9 は、振幅が  $(\beta)10^{-17}$  の波と振幅が  $10^{-19}$  のノイズの和を合成したものである。図 11 は、振幅が  $(\gamma)10^{-18}$  の波と振幅が  $10^{-19}$  のノイズの和を合成したものである。図 13 は、振幅が  $(\delta)10^{-19}$  の波と振幅が  $10^{-19}$  のノイズの和を合成したものである。 $(\alpha)$ 、 $(\beta)$ 、 $(\gamma)$ 、 $(\delta)$  の順に波形がノイズに紛れて見た目には判別できなくなっている。それぞれ横軸は秒、縦軸は振幅である。

図 8、図 10、図 12、図 14 は、振幅がそれぞれの  $(\alpha)$ 、 $(\beta)$ 、 $(\gamma)$ 、 $(\delta)$  の振幅ごとに 100 ~ 200Hz の間で周波数のパワースペクトルを求めたものである。それぞれ横軸は周波数 (Hz)、縦軸は全体の割合 (%) を表したものである。



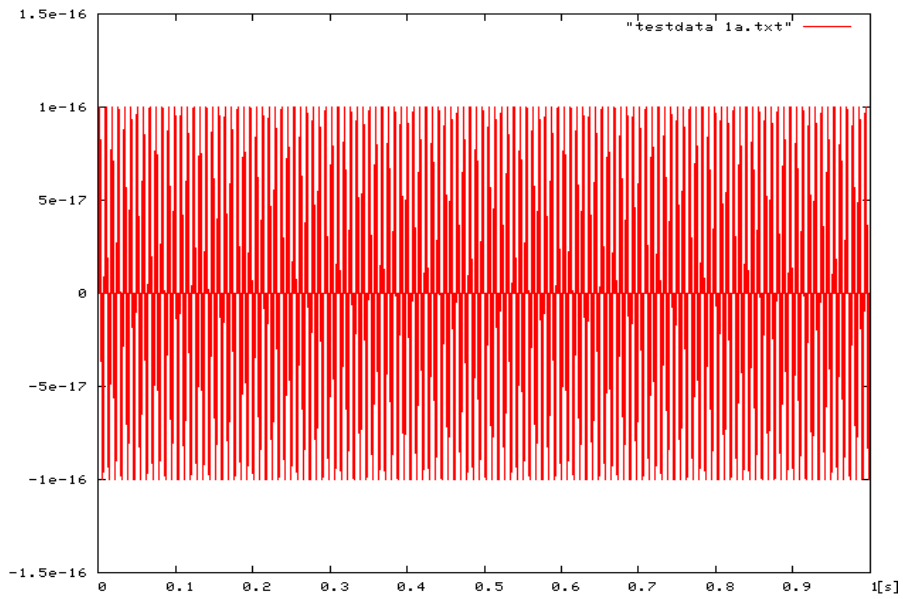


図 7: 重力波サンプルデータ 1

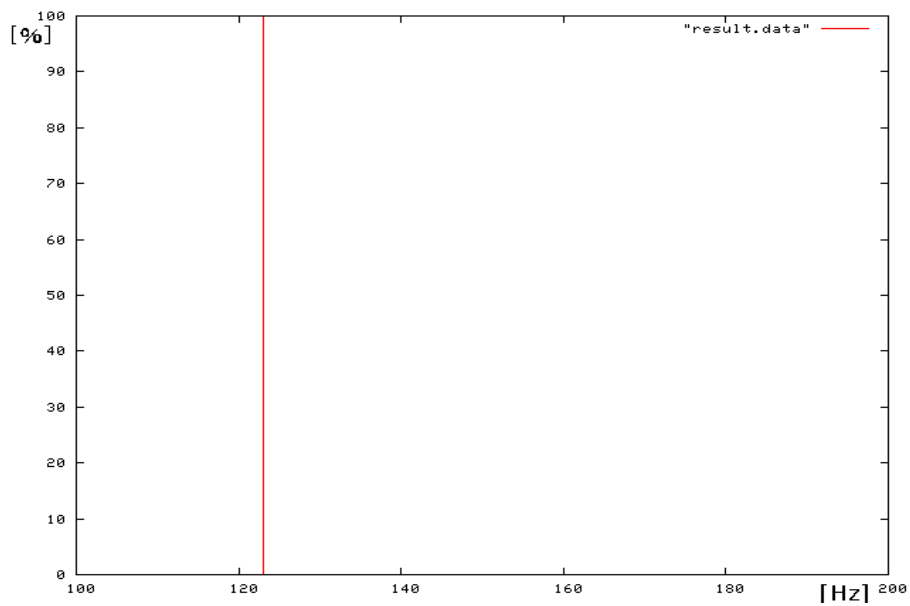


図 8: 重力波サンプルデータ 1 の解析

図 8 は、振幅が  $(\alpha)10^{-16}$  の波と振幅が  $10^{-19}$  のノイズの和を 100 ~ 200Hz の間で周波数を求めたものである。解析した結果、123 の値だけ数値が 99 % の割合を占めているので、図 7 は 123Hz の周波数を持つ波であることがわかった。 $(\alpha)$  は、波形そのものがノイズよりも明確に判別できるデータなので、パワースペクトルも非常に明確になっていることがわかる。

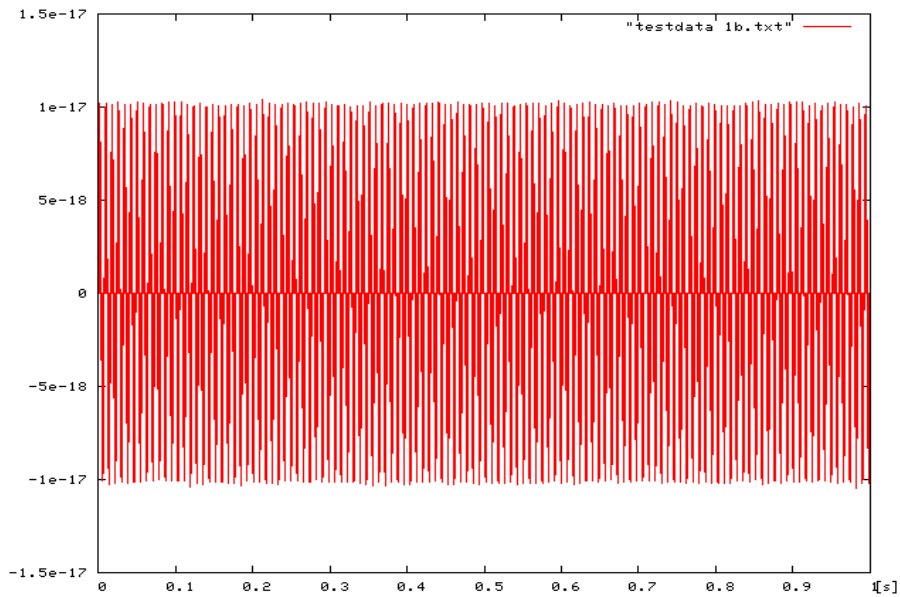


図 9: 重力波サンプルデータ 2

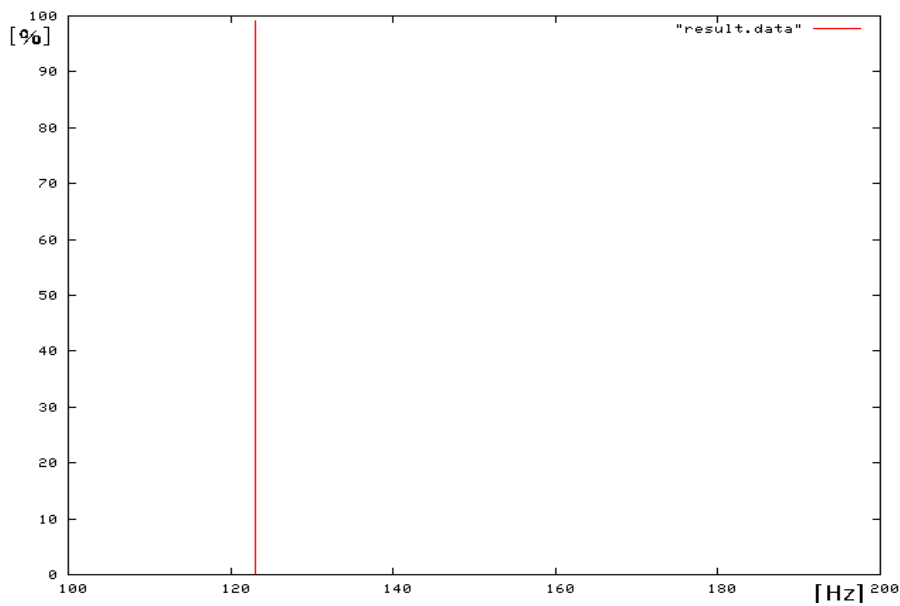


図 10: 重力波サンプルデータ 2 の解析

図 10 は、振幅が  $(\beta)10^{-17}$  の波と振幅が  $10^{-19}$  のノイズの和を 100 ~ 200Hz の間で周波数を求めたものである。解析した結果、123 の値だけ数値が 99 % の割合を占めているので、図 9 は 123Hz の周波数を持つ波であることがわかった。 $(\beta)$  も同様に、波形そのものがノイズよりもある程度明確に判別できるデータなので、パワースペクトルも非常に明確になっていることがわかる。

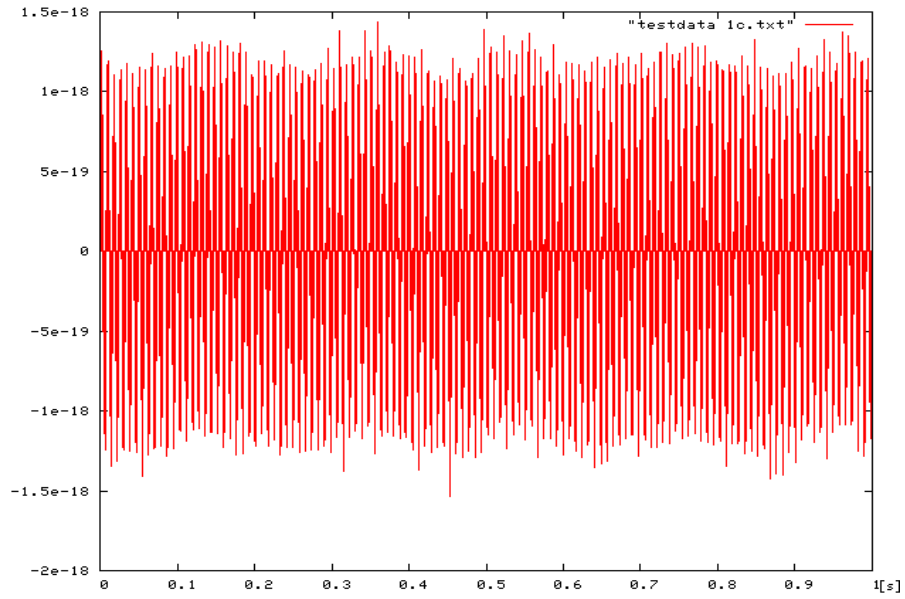


図 11: 重力波サンプルデータ 3

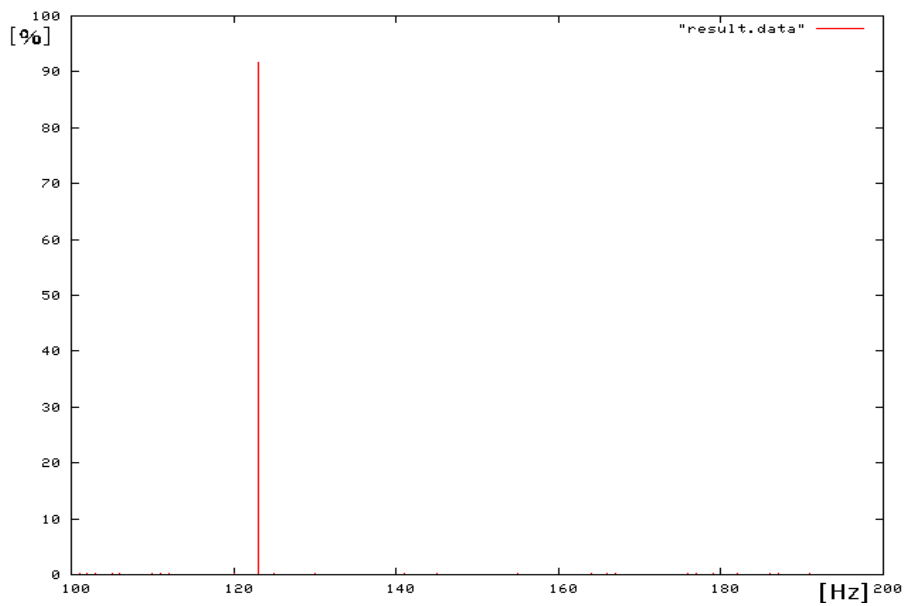


図 12: 重力波サンプルデータ 3 の解析

図 12 は、振幅が  $(\gamma)10^{-18}$  の波と振幅が  $10^{-19}$  のノイズの和を 100 ~ 200Hz の間で周波数を求めたものである。解析した結果、123 の値だけ数値が 90 % 以上の割合を占めているので、図 11 は 123Hz の周波数を持つ波であることがわかった。 $(\gamma)$  は、波形とノイズが紛れていて見た目では判別できないが、周波数を描出できている。

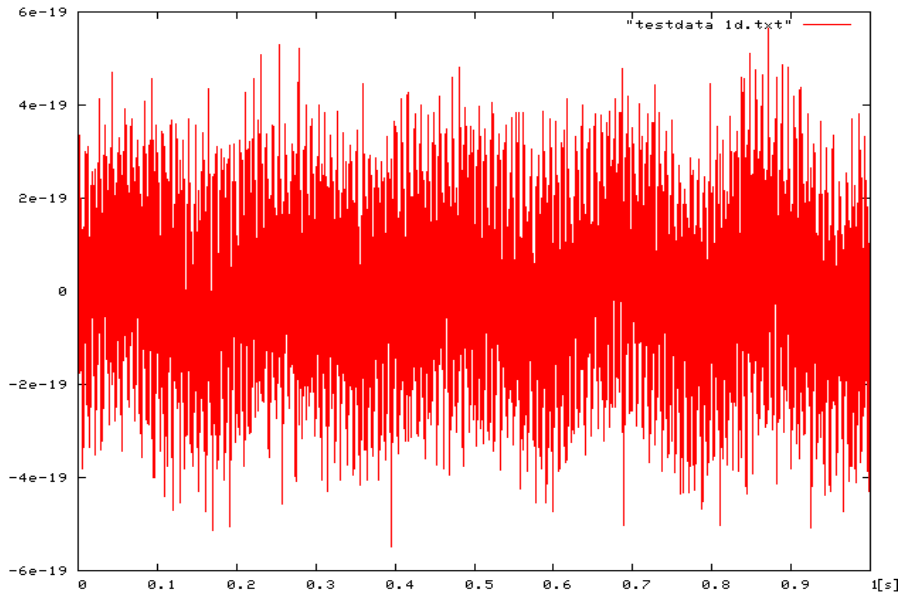


図 13: 重力波サンプルデータ 4

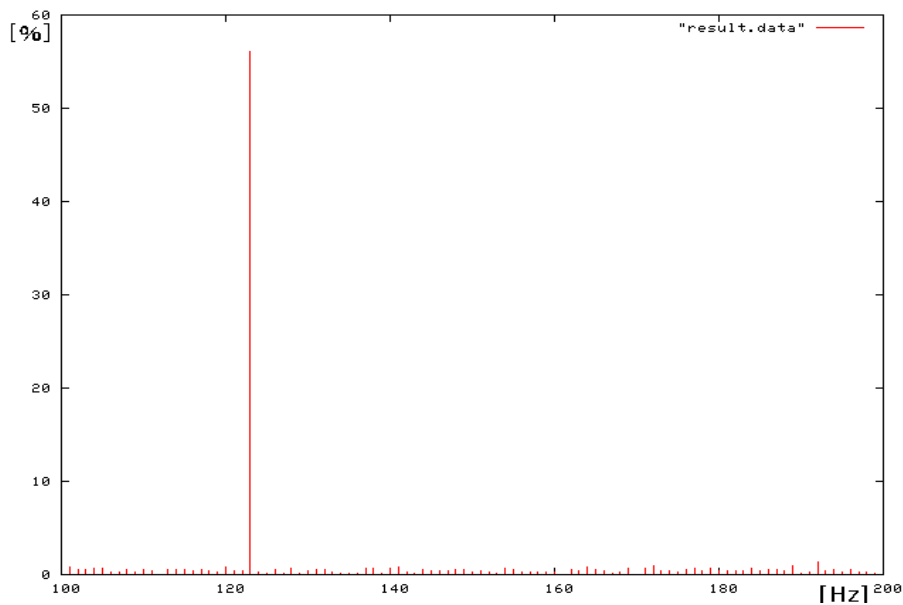


図 14: 重力波サンプルデータ 4 の解析

図 14 は、振幅が  $(\delta)10^{-19}$  の波と振幅が  $10^{-19}$  のノイズの和を 100 ~ 200Hz の間で周波数を求めたものである。解析した結果、123 の値だけ数値が 55 % 以上の割合を占めているので、図 13 は 123Hz の周波数を持つ波であり、ノイズの効果を持っているが波のパワースペクトルが描出されていることがわかった。

図 8、図 10、図 12、図 14 の解析から挿入した重力波の振幅がノイズと同レベルであっても波のパワースペクトルを導き出せている。これは、ノイズはランダムであり波としての性質がないため、フーリエ級数展開では特定の周波数のものとして認識されないためと考えることができる。

## 5.2 ノイズを含めたデータから検出時刻の特定

干渉計と星（パルサー）との相対位置によって、重力波の検出時刻はさまざまである。これは地球もパルサーも公転しているからである。検出器から出力される時間が異なることで重力波の検出時刻が変わってくる。相対位置と検出時刻がわかることが必要になってくる。ここでは、検出時刻の特定をシミュレーションする。

次に示す図は、1秒間の信号を20000個の値で与えたサンプルデータ、周波数のパワースペクトルと0.1秒刻みのパワースペクトルを求めたグラフである。重力波は、1秒間内に0.1秒だけ含まれていて、それぞれノイズの振幅が異なった波に含めた。

図16は、振幅が $(\alpha)10^{-16}$ の波と振幅が $10^{-19}$ のノイズの和を合成したものである。図21は、振幅が $(\beta)10^{-17}$ の波と振幅が $10^{-19}$ のノイズの和を合成したものである。図26は、振幅が $(\gamma)10^{-18}$ の波と振幅が $10^{-19}$ のノイズの和を合成したものである。図31は、振幅が $(\delta)10^{-19}$ の波と振幅が $10^{-19}$ のノイズの和を合成したものである。それぞれ横軸は秒、縦軸は振幅である。

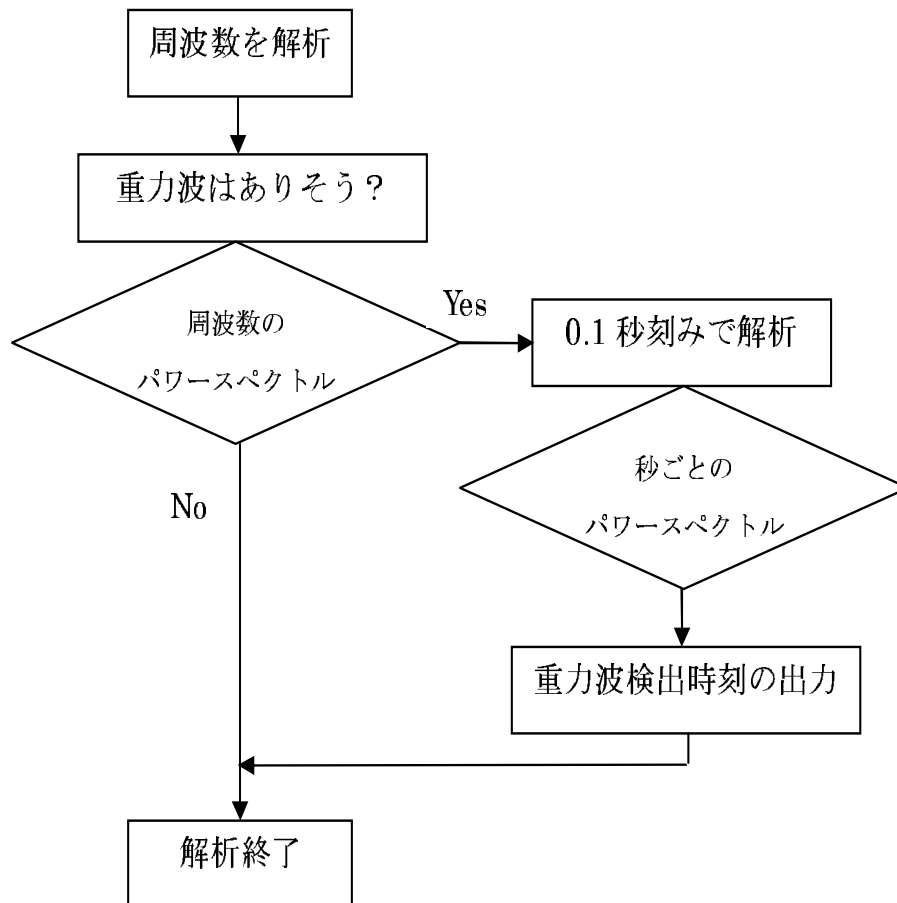


図15: プログラムのフローチャート

図15は、プログラムの流れを表している。

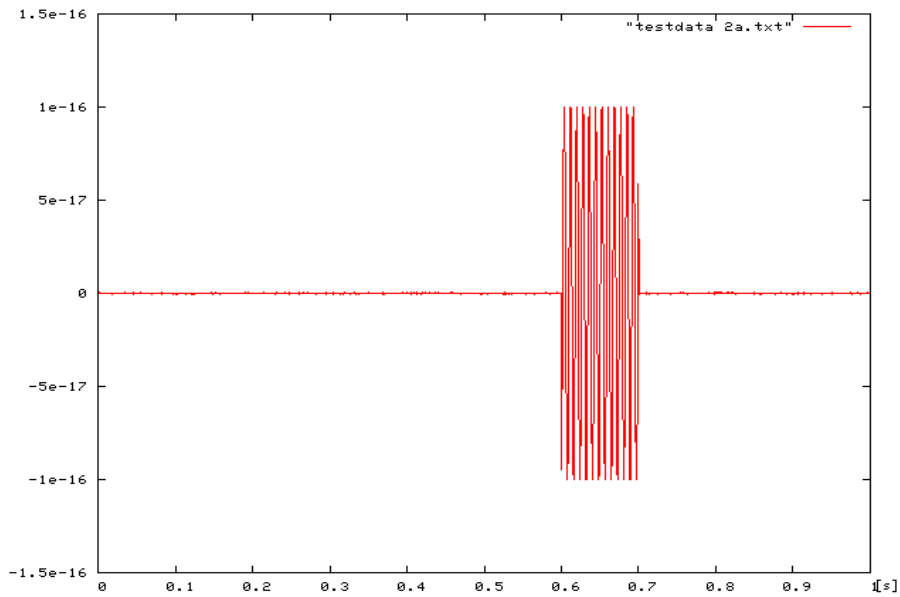


図 16: 重力波サンプルデータ 5

図 16 は、0.1 秒間に重力波が含まれている。見た目でも重力波の発生位置が確認できる。

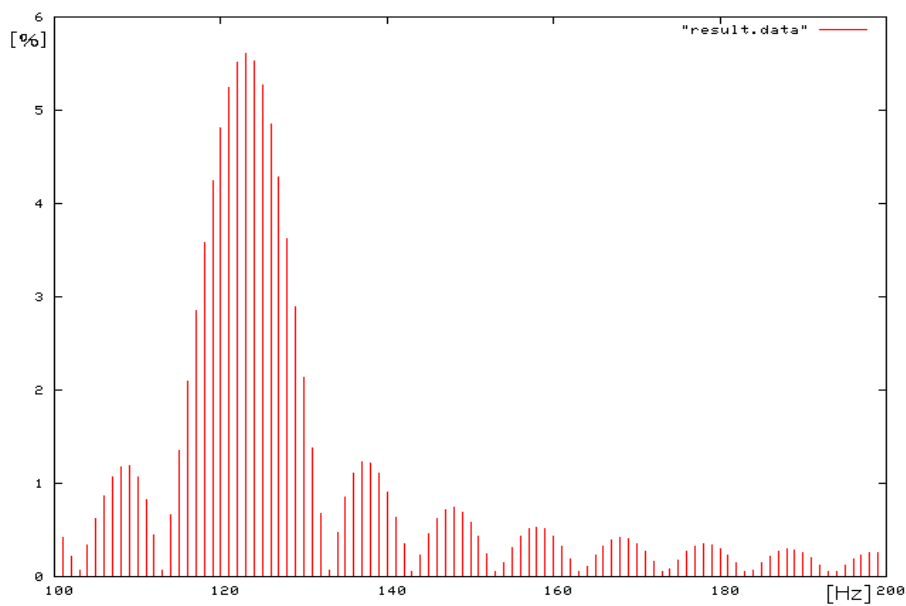


図 17: 図 16 の周波数のパワースペクトル

図 17 は、16 の 100 ~ 200Hz の間で周波数のパワースペクトルを求めたものである。図 17 より、図 16 は 110Hz ~ 130Hz の間で 5 % 以上の割合を占めている数値があり、周波数を特定するにはまだ要素が足りない。

図 18 は、0 秒～0.1 秒の間の 100～200Hz の周波数ごとのパワースペクトルを表している。横軸は周波数 (Hz)、縦軸は全体の割合 (%) である。

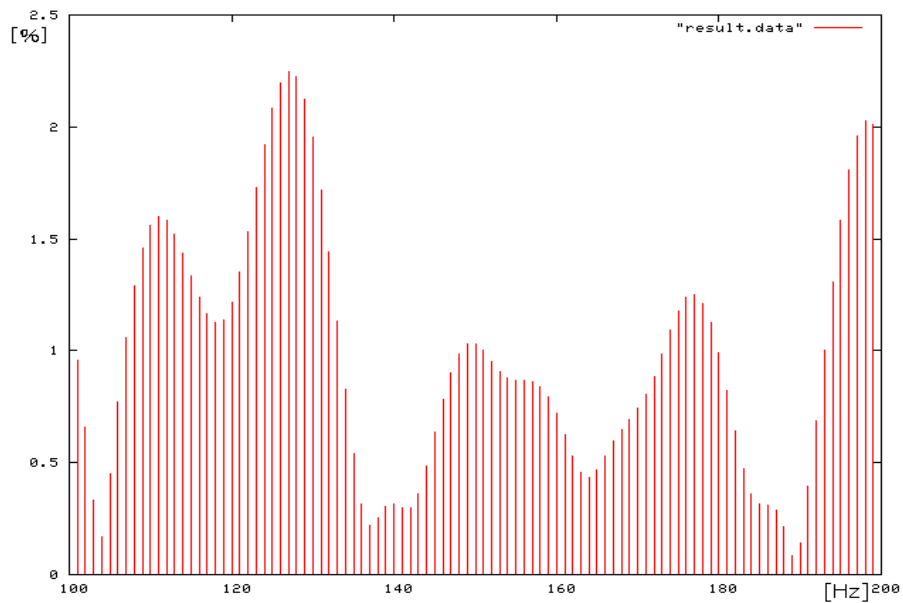


図 18: 図 16 の 0 秒～0.1 秒の間のパワースペクトル

図 19 は、0.6 秒～0.7 秒の 100～200Hz の周波数ごとのパワースペクトルを表している。横軸は周波数 (Hz)、縦軸は全体の割合 (%) である。

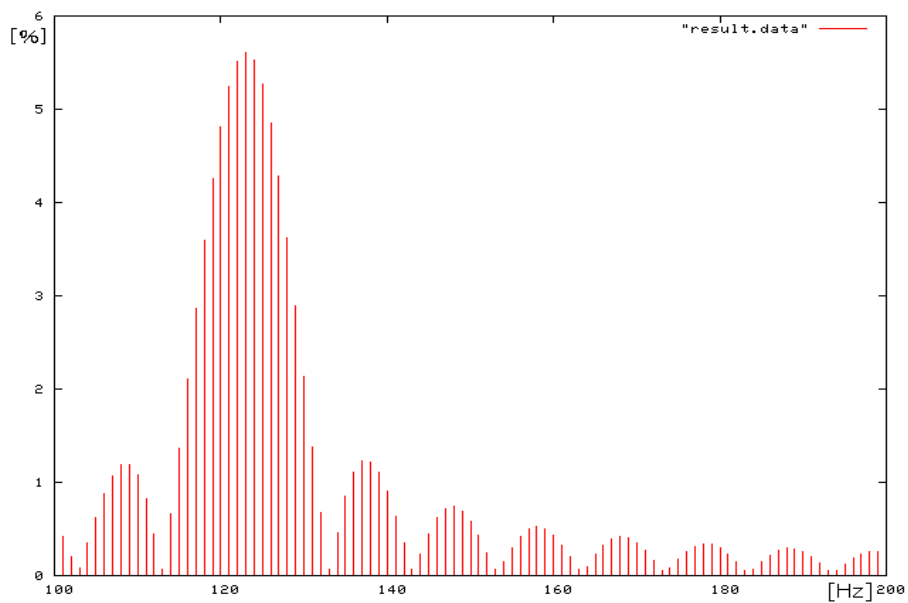


図 19: 図 16 の 0.6 秒～0.7 秒の間のパワースペクトル

図 18 では、目立った変化は見られない。図 19 では、110Hz ~ 130Hz の間で 5 % 以上の割合を占めている数値があり、その中の最大は 123Hz であった。周波数のパワースペクトル (図 17) と 0.1 秒刻みでのパワースペクトル (図 19) の 2 つより周波数は 123Hz が有力である。

図 20 は周波数 123Hz の 0.6 ~ 0.7 秒の間の秒のパワースペクトルを表している。横軸は周波数 (Hz)、縦軸は全体の割合 (%) である。

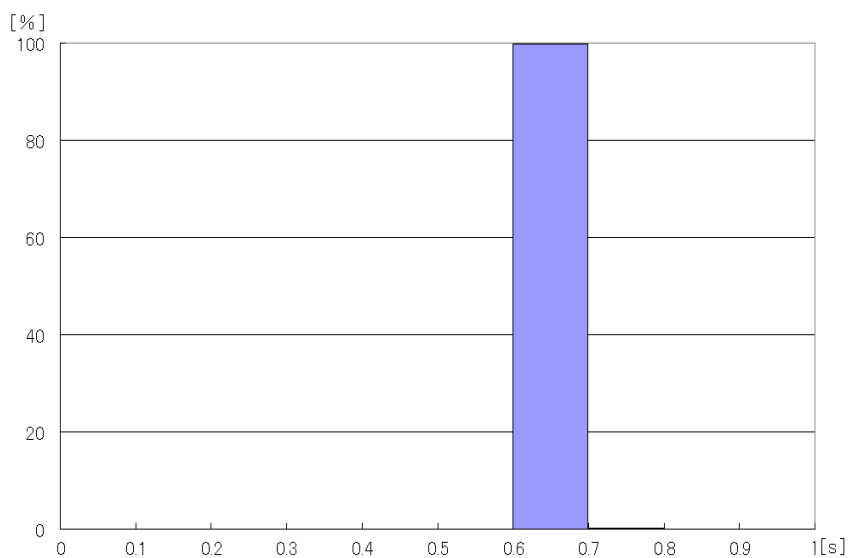


図 20: 図 16 の 123Hz の秒のパワースペクトル

図 20 より、図 16 は 123Hz で 0.6 ~ 0.7 秒間に重力波があることがわかった。



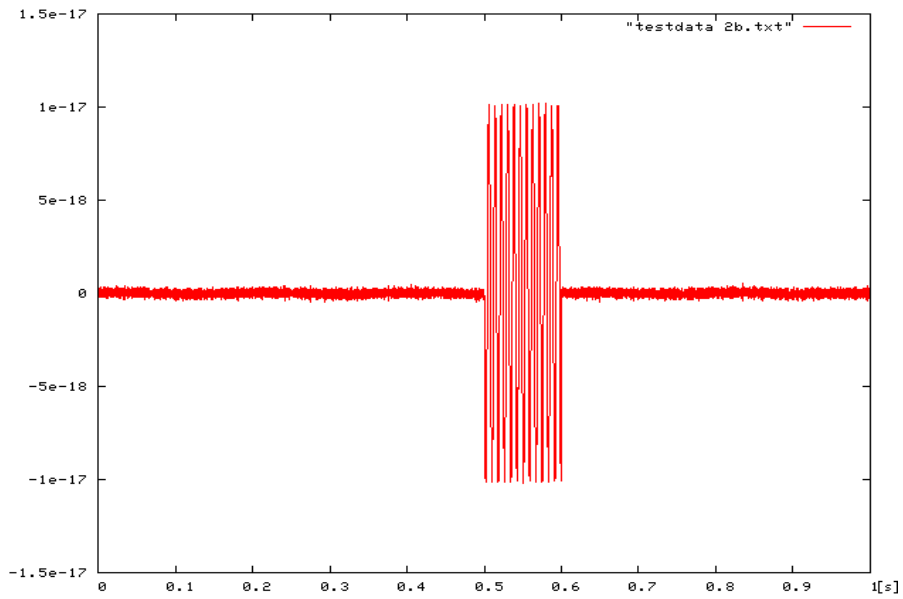


図 21: 重力波サンプルデータ 6

図 21 は、0.1 秒間に重力波が含まれている。見た目でも重力波の発生位置が確認できる。

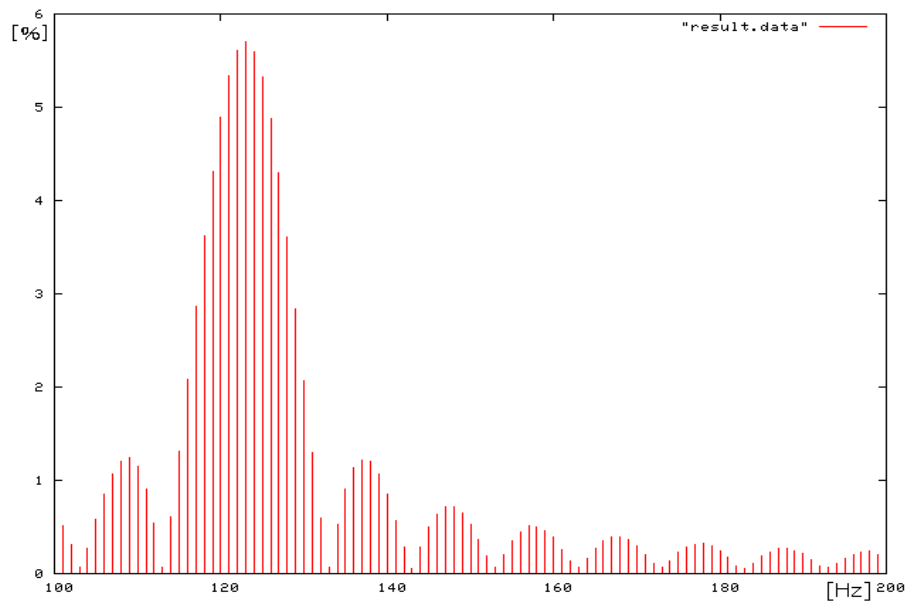


図 22: 図 21 の周波数のパワースペクトル

図 22 より、図 21 は 110Hz ~ 130Hz の間で 5 %以上の割合を占めている数値があり、周波数を特定するには要素が足りない。

図 23 は 0 秒 ~ 0.1 秒の 100 ~ 200Hz の周波数ごとのパワースペクトルを表している。横軸は周波数 (Hz)、縦軸は全体の割合 (%) である。

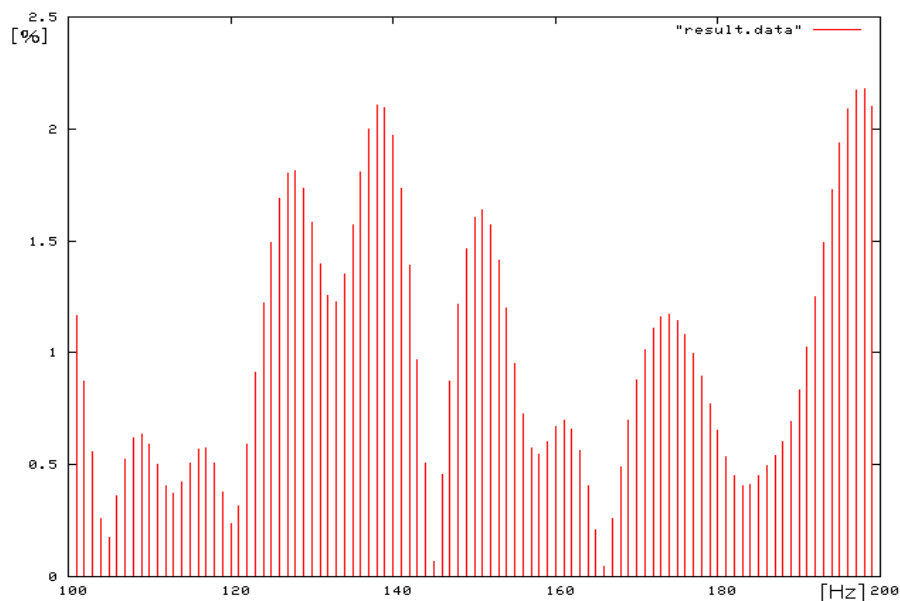


図 23: 図 21 の 0 秒 ~ 0.1 秒の間のパワースペクトル

図 24 は 0.5 秒 ~ 0.6 秒の 100 ~ 200Hz の周波数ごとのパワースペクトルを表している。横軸は周波数 (Hz)、縦軸は全体の割合 (%) である。

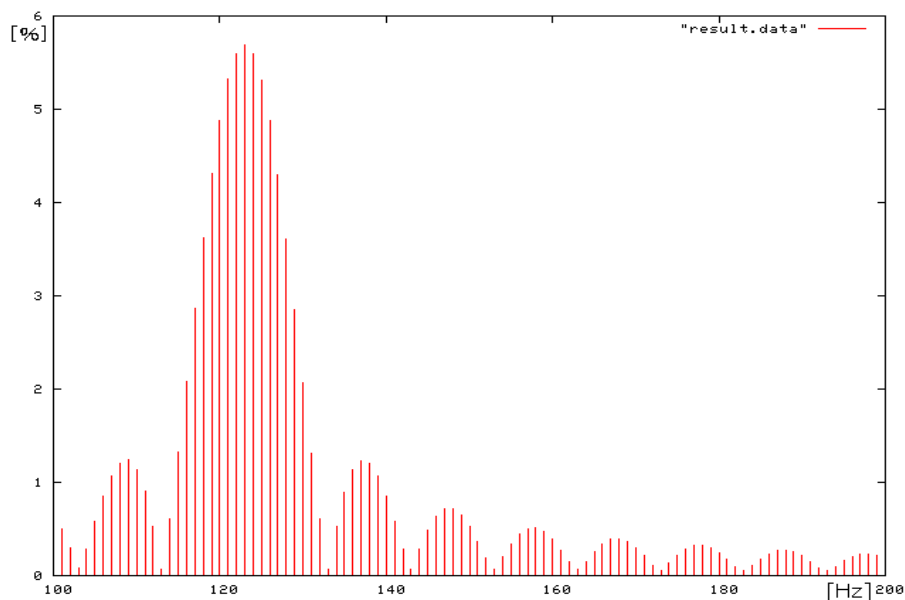


図 24: 図 21 の 0.5 秒 ~ 0.6 秒の間のパワースペクトル

図 23 では、目立った変化は見られない。図 24 では、110Hz ~ 130Hz の間で 5 % 以上の割合を占めている数値があり、その中の最大は 123Hz であった。周波数のパワースペクトル (図 22) と 0.1 秒刻みでのパワースペクトル (図 24) の 2 つより周波数は 123Hz が有力である。

図 25 は周波数 123Hz の 0.5 ~ 0.6 秒の間の秒のパワースペクトルを表している。横軸は周波数 (Hz)、縦軸は全体の割合 (%) である。

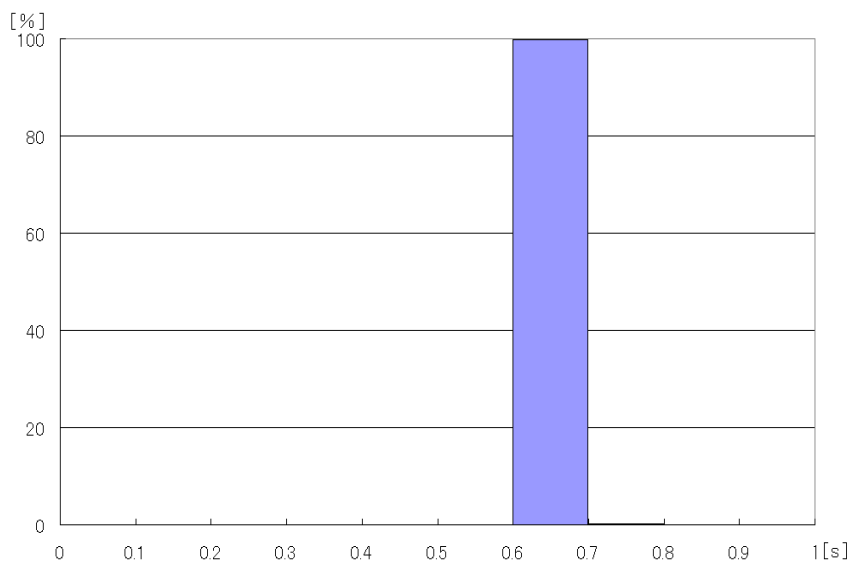


図 25: 図 21 の 123Hz の秒のパワースペクトル

図 25 より、図 21 は 123Hz で 0.6 ~ 0.7 秒間に重力波があることがわかった。

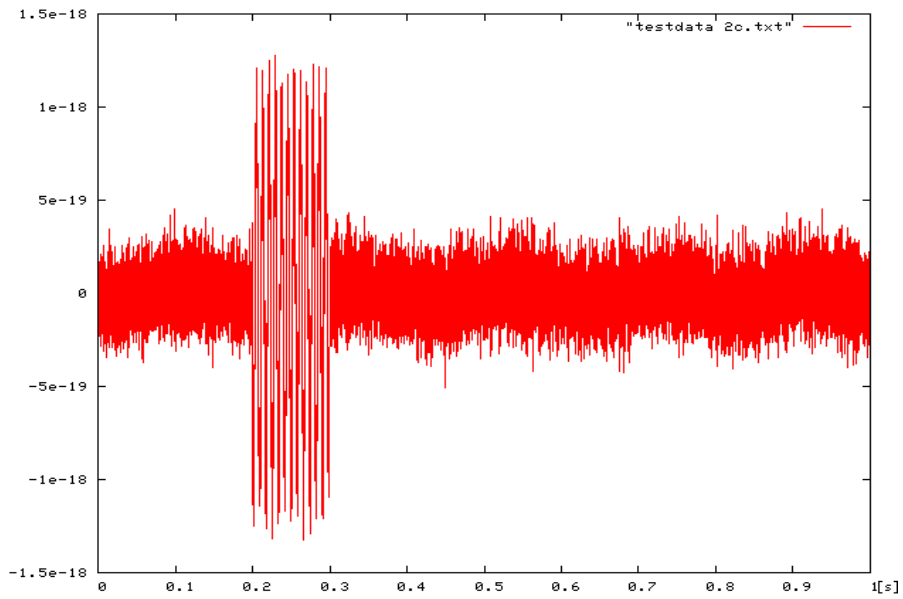


図 26: 重力波サンプルデータ 7

図 26 は、0.1 秒間に重力波が含まれている。見た目でも重力波のある程度、発生位置が確認できる。

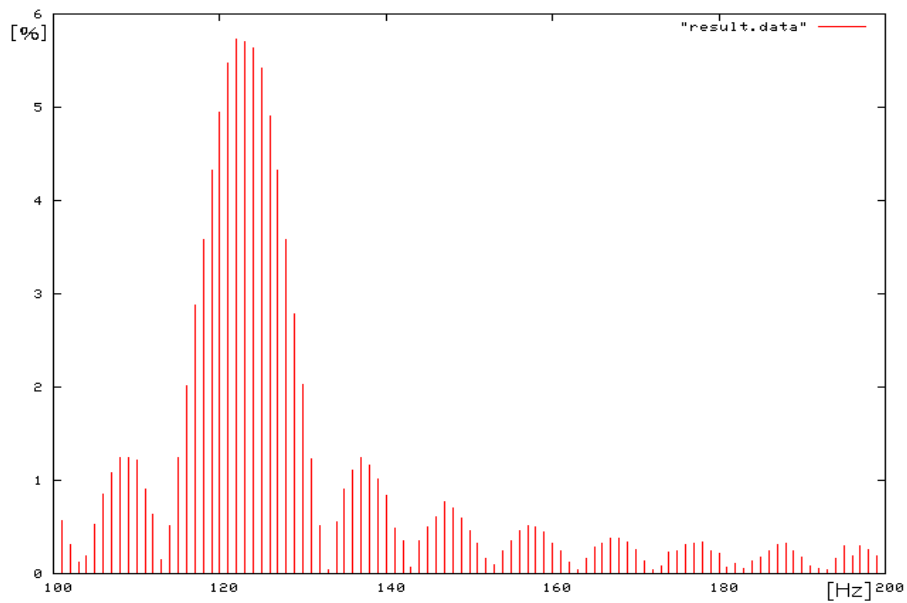


図 27: 図 26 の周波数のパワースペクトル

図 27 より、図 26 は 110Hz ~ 130Hz の間で 5 %以上の割合を占めている数値があり、周波数を特定するには要素が足りない。

図 28 は 0 秒 ~ 0.1 秒の 100 ~ 200Hz の周波数ごとのパワースペクトルを表している。横軸は周波数 (Hz)、縦軸は全体の割合 (%) である。

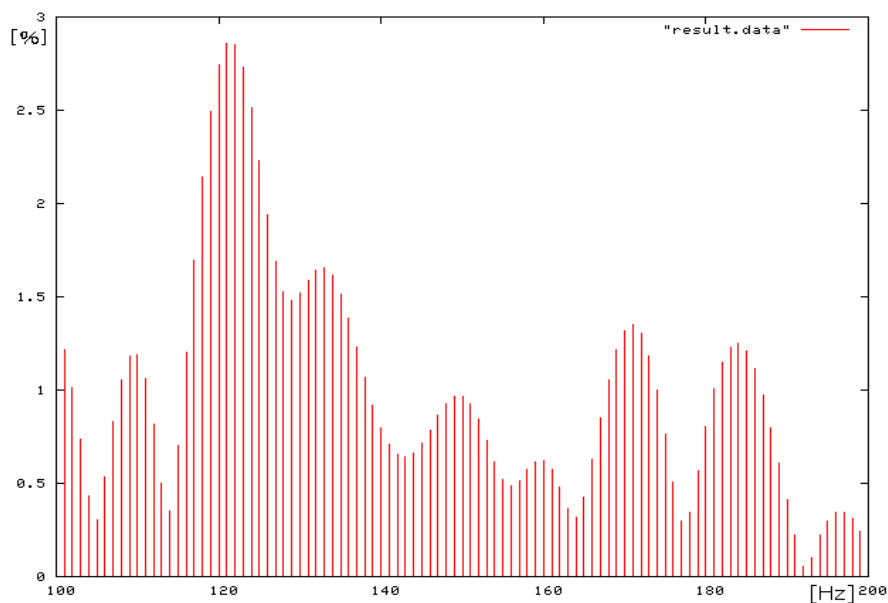


図 28: 図 26 の 0 秒 ~ 0.1 秒の間のパワースペクトル

図 29 は 0.2 秒 ~ 0.3 秒の 100 ~ 200Hz の周波数ごとのパワースペクトルを表している。横軸は周波数 (Hz)、縦軸は全体の割合 (%) である。

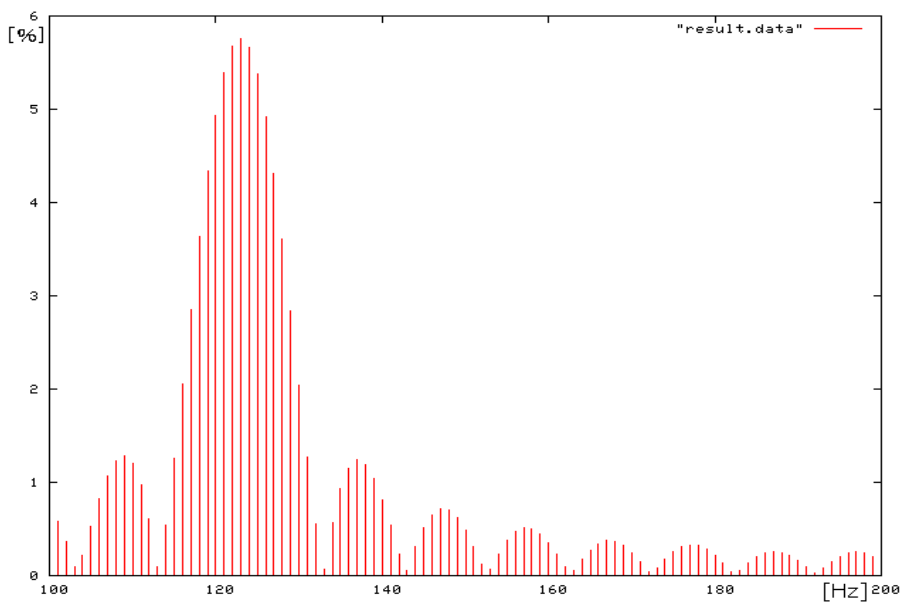


図 29: 図 26 の 0.2 秒 ~ 0.3 秒の間のパワースペクトル

図 28 では、目立った変化は見られない。図 29 では、110Hz ~ 130Hz の間で 5 % 以上の割合を占めている数値があり、その中の最大は 123Hz であった。周波数のパワースペクトル (図 27) と 0.1 秒刻みでのパワースペクトル (図 29) の 2 つより周波数は 123Hz が有力である。

図 30 は 100 ~ 200Hz の周波数ごとのパワースペクトルを表している。横軸は周波数 (Hz)、縦軸は全体の割合 (%) である。

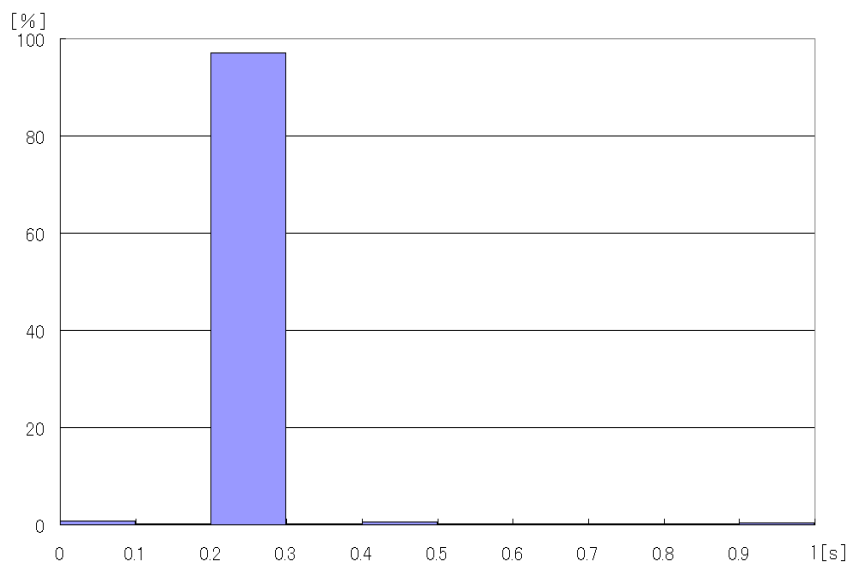


図 30: 図 26 の 123Hz の秒のパワースペクトル

図 30 より、図 26 は 123Hz で 0.2 ~ 0.3 秒間に重力波があることがわかった。

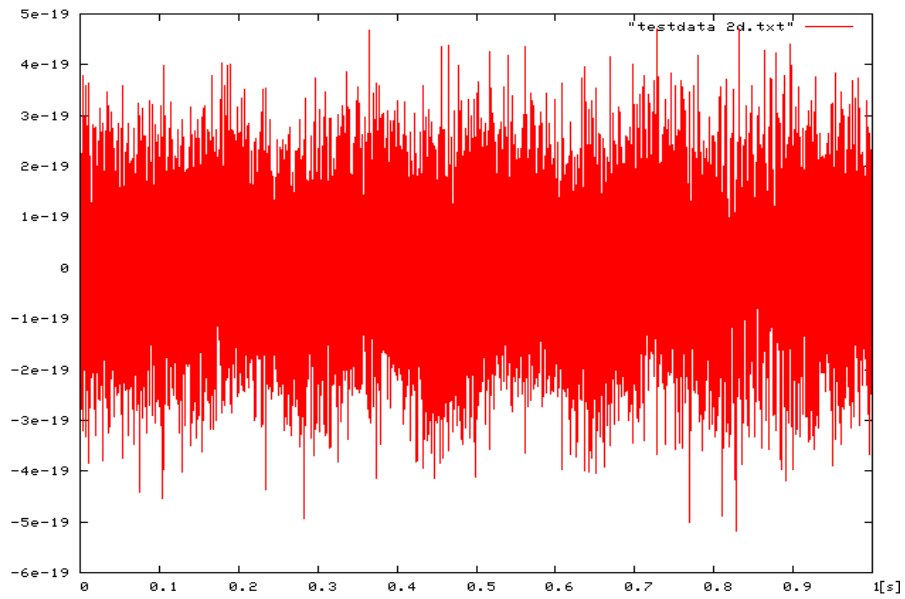


図 31: 重力波サンプルデータ 8

図 32 は、0.1 秒間に重力波が含まれている。見た目ではどこに重力波があるのかわからない。

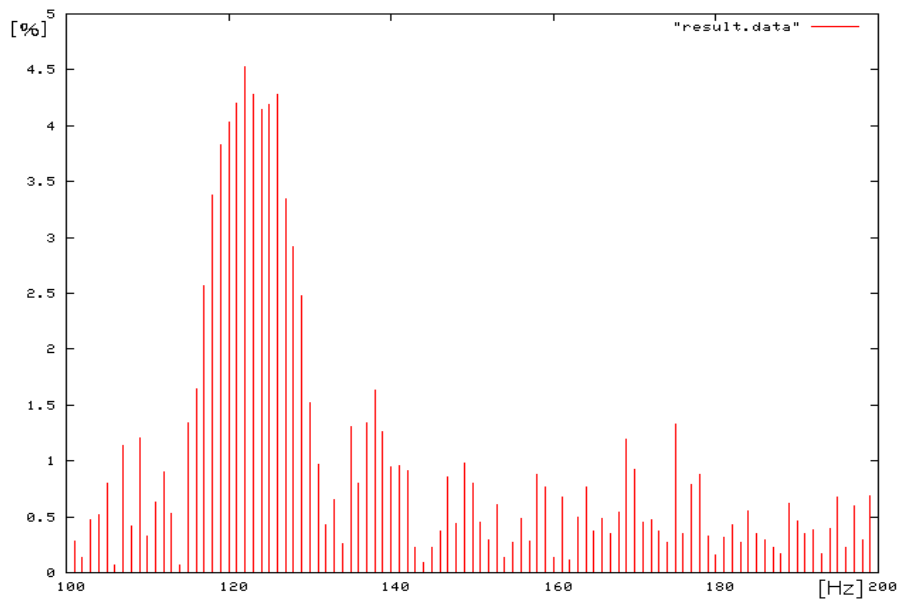


図 32: 図 31 の周波数のパワースペクトル

図 32 より、図 31 は 110Hz ~ 130Hz の間で 5 %以上の割合を占めている数値があり、周波数を特定するには要素が足りない。

図 33 は 100 ~ 200Hz の周波数ごとのパワースペクトルを表している。横軸は周波数 (Hz)、縦軸は全体の割合 (%) である。

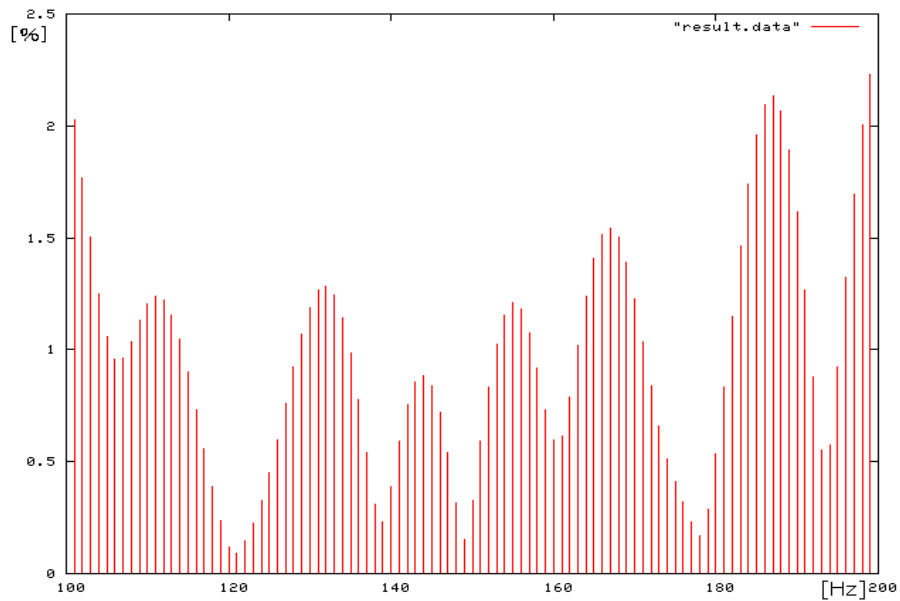


図 33: 図 31 の 0 秒 ~ 0.1 秒の間のパワースペクトル

図 34 は 100 ~ 200Hz の周波数ごとのパワースペクトルを表している。横軸は周波数 (Hz)、縦軸は全体の割合 (%) である。

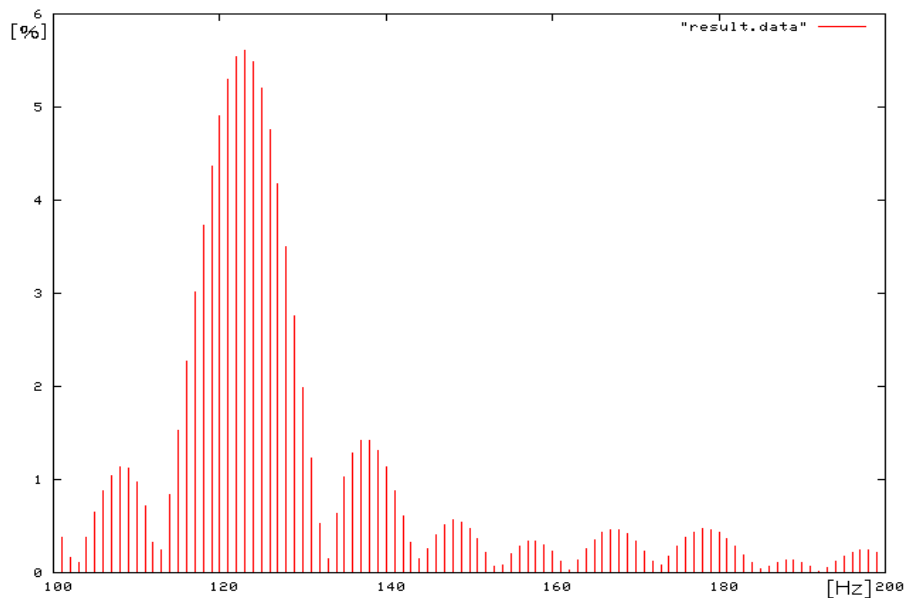


図 34: 図 31 の 0.8 秒 ~ 0.9 秒の間のパワースペクトル



図 33 では、目立った変化は見られない。図 34 では、110Hz ~ 130Hz の間で 5 % 以上の割合を占めている数値があり、その中の最大は 123Hz であった。周波数のパワースペクトル (図 32) と 0.1 秒刻みでのパワースペクトル (図 34) の 2 つより周波数は 123Hz が有力である。

図 35 は 100 ~ 200Hz の周波数ごとのパワースペクトルを表している。横軸は周波数 (Hz)、縦軸は全体の割合 (%) である。

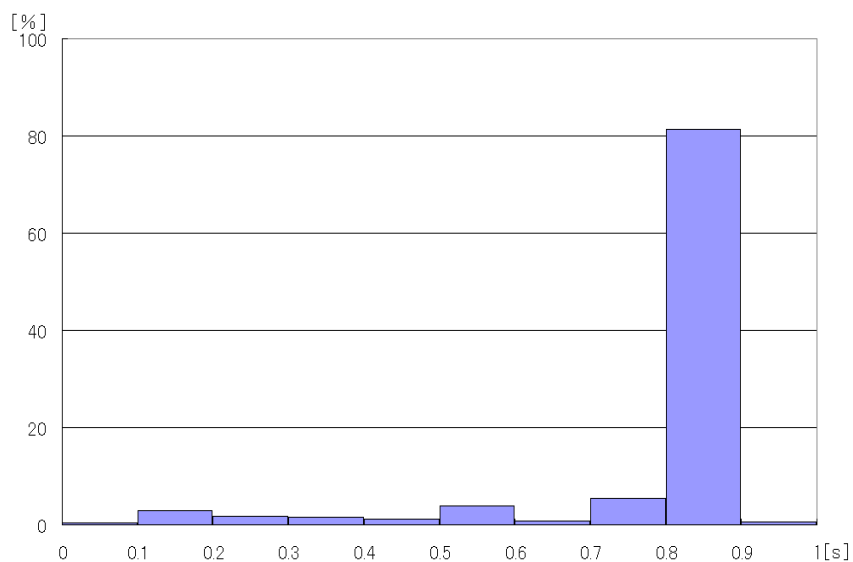


図 35: 図 31 の 123Hz の秒のパワースペクトル

図 35 より、図 31 は 123Hz で 0.8 ~ 0.9 秒間に重力波があることがわかった。

### 5.3 Einstein@home を想定したシミュレーション

ここでは、Einstein@home の再現をする。まず 5.1 では、周波数のわかっていない波から重力波とノイズの振幅が同レベルでも周波数を特定できることがシミュレーションでわかった。次に 5.2 では、周波数もわからず重力波の発生時刻もわからない波から、周波数と秒ごとにパワースペクトルを求めることによって、周波数と発生時刻を特定することシミュレーションでわかった。

図 36 は、1 秒間の信号を 20000 個の値で与えたサンプルデータで横軸は秒、縦軸は振幅である。このデータから周波数と発生時刻を特定する。

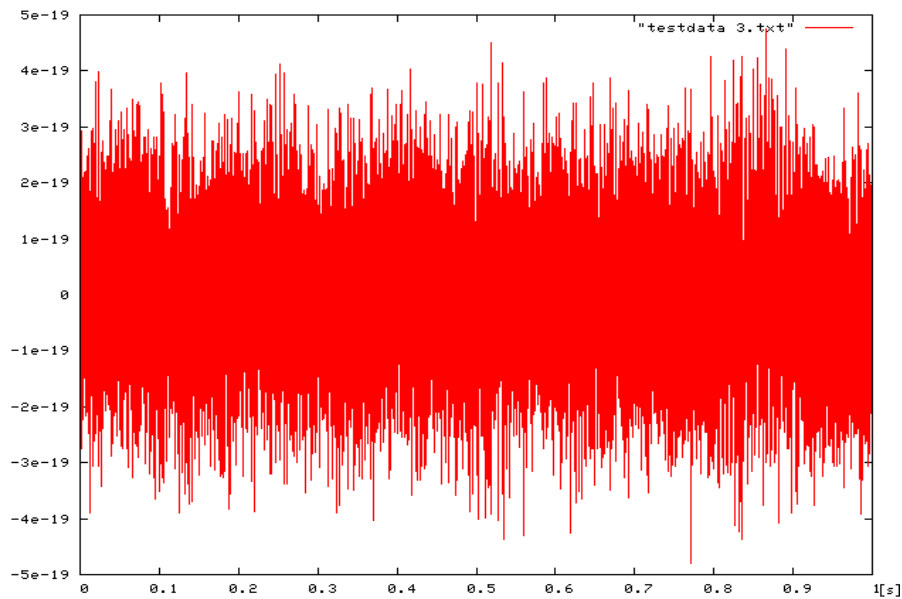


図 36: 重力波データ

図 37 は 100 ~ 200Hz の周波数ごとのパワースペクトルを表している。横軸は周波数 (Hz)、縦軸は全体の割合 (%) である。

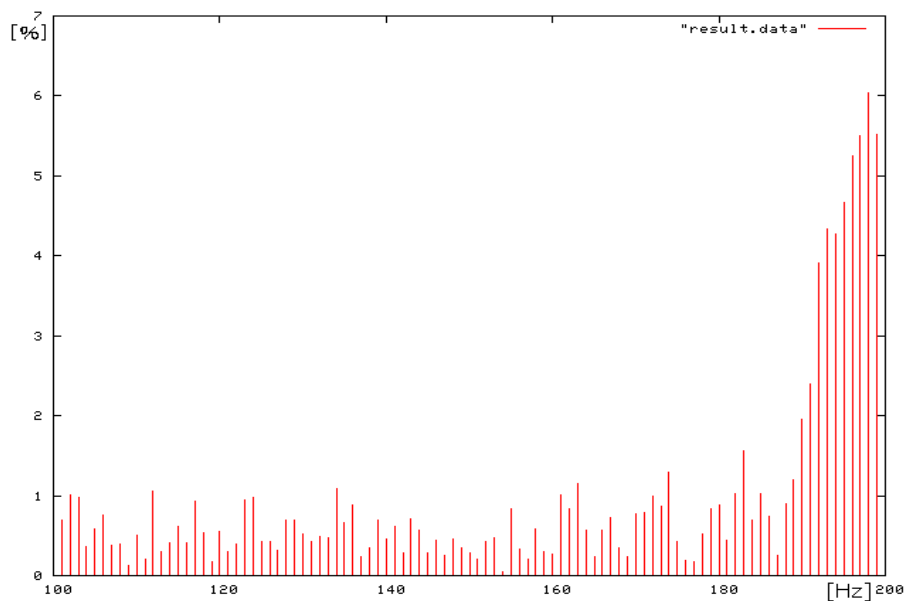


図 37: 重力波周波数のパワースペクトル

図 38 は 0 秒 ~ 0.1 秒の間での 100 ~ 200Hz の周波数ごとのパワースペクトルを表している。横軸は周波数 (Hz)、縦軸は全体の割合 (%) である。

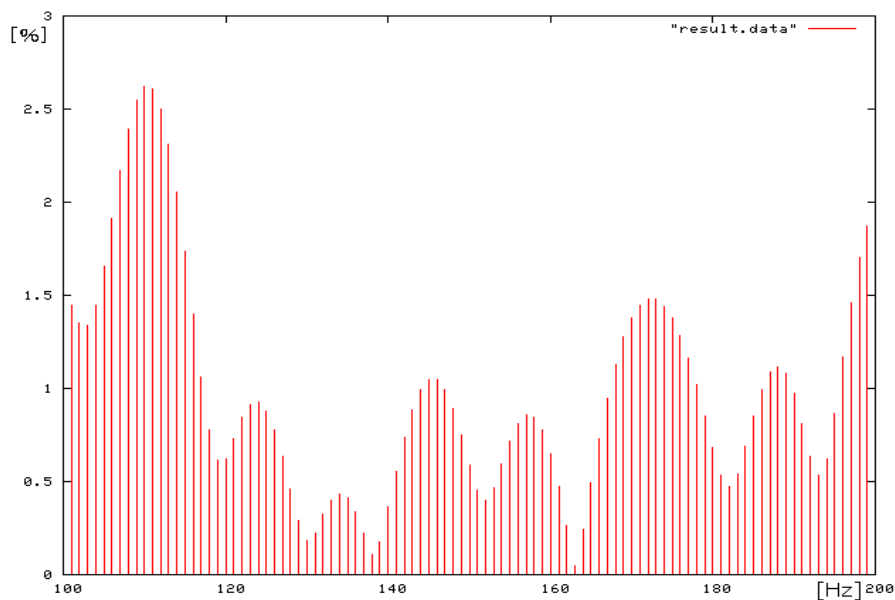


図 38: 0 秒 ~ 0.1 秒の間での重力波パワースペクトル

図 39 は 0.8 秒 ~ 0.9 秒の間での 100 ~ 200Hz の周波数ごとのパワースペクトルを表している。横軸は周波数 (Hz)、縦軸は全体の割合 (%) である。

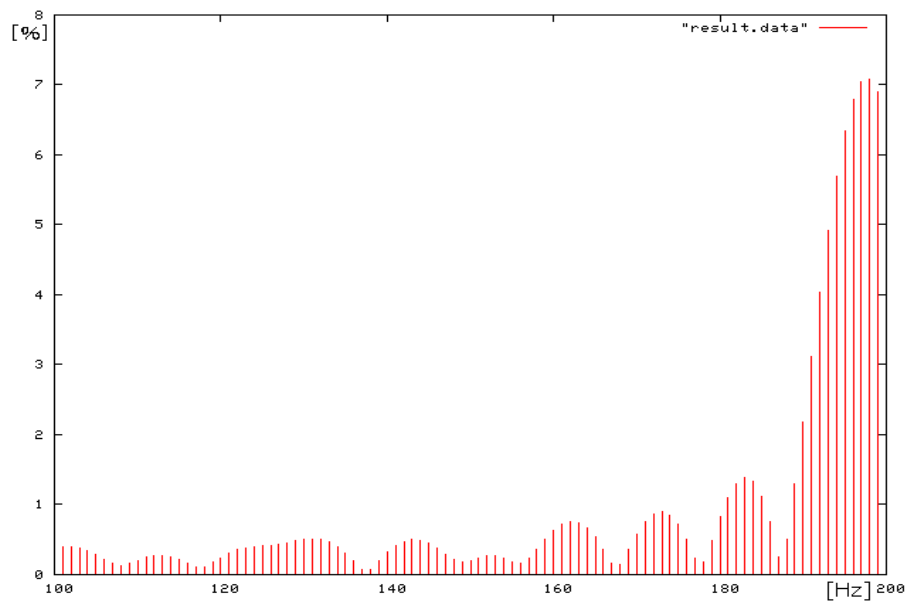


図 39: 0.8 秒 ~ 0.9 秒の間での重力波パワースペクトル

図 37 より、図 36 は 190Hz ~ 200Hz の間で 6 %以上の割合を占めている数値があり、周波数を特定するには要素が足りない。図 38 では、目立った変化は見られない。図 39 では、190Hz ~ 200Hz の間で 7 %以上の割合を占めている数値があり、その中の最大は 198Hz であった。周波数のパワースペクトル (図 37) と 0.1 秒刻みでのパワースペクトル (図 39) の 2 つより周波数は 198Hz が有力である。

図 40 は 100 ~ 200Hz の周波数ごとのパワースペクトルを表している。横軸は周波数 (Hz)、縦軸は全体の割合 (%) である。

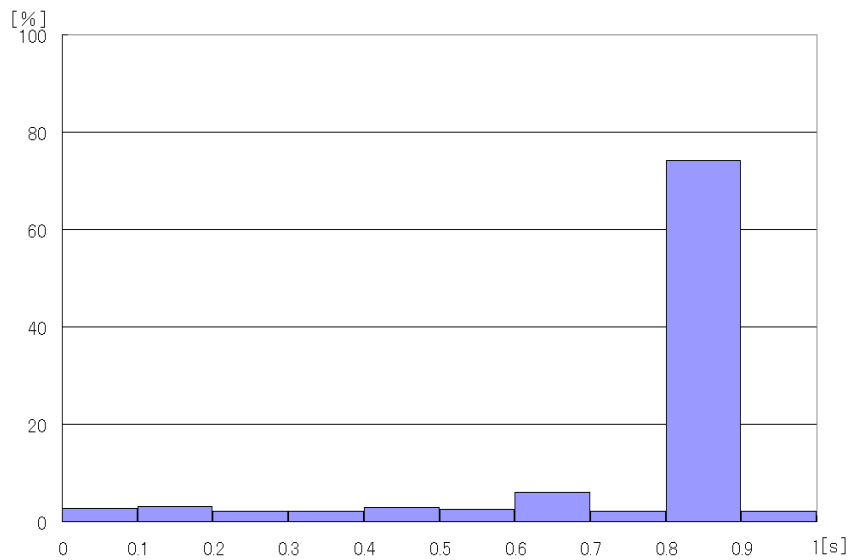


図 40: 図 36 の 0.8 秒 ~ 0.9 秒の間の秒のパワースペクトル

## 6 まとめ

本研究では、当初の目的であった Einstein@home をプログラムを用いて再現することができた。アインシュタインによって予言された重力波の直接検出にはたくさんの人々からの協力を得て証明されようとしている。また、Einstein@home を運用する BOINC の振る舞いを、ダウンロードしプロジェクトに参加することで、ユーザが使用していない時間に計算を行うことを確認することができた。

フーリエ級数展開では、区分求積法を長方形近似、台形の公式、シンプソンの公式のそれぞれのプログラムからテスト解析をし、シンプソンの公式が最も誤差が少なくより精度の良い数値が計算されることが証明できた。また、大阪市立大学理学研究科の神田教授から実際に Einstein@home で解析されているデータをいただき、フーリエ級数展開の「波を周期的な関数と捉えて三角関数の和として表現できる」という特性を活かして情報のないノイズを含んだデータから、周波数の特定や検出時間の特定をシミュレーションから導くことができた。その際、ノイズと重力波の振幅が同レベルでも周波数をノイズはランダムな数値であると考え、周期的な波だけを描出することができた。

今回シミュレーションを行った結果、周波数 50Hz ~ 300Hz の間で 1 秒間 (0.1 秒刻み) のデータから、周波数と検出時間を特定するのに約 6 秒かかったが、実際の解析を想定して、周波数 50Hz ~ 1500Hz で 30 時間分のデータを検出時間 0.001 秒刻みで解析すると、本研究で用いたプログラムでは、

$$\text{約 } 6 \text{ 秒} \times \frac{1500-50}{300-50} \times 30 \text{ 時間分のデータ} \times 100 = 104400$$

約 104400 時間かかり、約 12 年間計算し続けなければ計算結果が得られない。Einstein@home で解析するデータの同定には、さらに振幅、周波数、地球とパルサーはそれぞれ公転していて受信方向による重力波到達時間の変調などのパラメータがあるので計算量は増える。

## 参考文献

- [1] 佐藤 勝彦、相対性理論、岩波書店 (1996)
- [2] 三尾 典克、相対性理論、サイエンス社 (2007)
- [3] Einstein@home、<http://einsteinathome.org/about/index.html>
- [4] B.Abbott et al., arXiv:0804.1747v1 [gr-qc]、(10 Apr 2008)
- [5] BOINC、<http://boinc.oocp.org/indexj.php>
- [6] 真貝 寿明、徹底攻略微分積分、共立出版、(2009)

[7] 戸川 隼人、科学技術計算ハンドブック、サイエンス社、(1998)