

SPH法による重力の潮汐力効果のシミュレーション

福島宏章

2010/02/12

目次

1	本研究の概要・目的	3
2	潮汐力	3
3	SPH法	4
3.1	SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics)法とは	4
3.2	物理量の表現	4
3.3	流体力学的方程式	6
3.4	時間間隔の決定	11
3.5	SPH法の長所と短所	12
4	SPH法と単純な多体粒子法との比較	13
4.1	初期条件	13
4.2	シミュレーション結果	14
4.3	初期条件の変更	16
4.3.1	比熱比の変更	16
4.4	まとめ	18
5	一方の星を極端に重くした場合の潮汐力効果	19
5.1	初期条件	19
5.2	シミュレーション結果	22
5.2.1	初期速度の変更	22
5.3	まとめ	29

6	擬ニュートンポテンシャル	30
6.1	擬ニュートンポテンシャルとは	30
6.2	擬ニュートンポテンシャルとニュートン力学の比較	30
6.3	シミュレーション結果	33
6.4	まとめ	37
7	まとめ	38

1 本研究の概要・目的

2つの星あるいは星とブラックホールがあるとき、重力の潮汐力効果でどのように変形・破壊されるかのシミュレーションを行った。開発言語にはJavaを利用し、モデルにはSPH法(Smoothed Particle Hydrodynamics)を、計算にはRunge-kutta法を用いた。

本研究では1)SPH法を用いた場合と単純なニュートン重力の場合の比較、2)一方の星を極端に重くした場合の挙動の変化、3)一方の星からの寄与を擬ニュートンポテンシャルにした場合の挙動の変化についてプログラムを作成し、初期条件を様々に変化させてシミュレーションを行った。

以上のようなシミュレーションを行い、SPH法や擬ニュートンポテンシャルの有用性も調べた。

2 潮汐力

潮汐力は重力によって起こる効果の一種で満潮干潮といった潮汐の原因である。潮汐力は物体に働く重力場が一定でなく、物体表面あるいは内部の場所ごとに異なっているために起こる。ある物体が別の物体から重力の作用を受ける時、その重力加速度は、重力源となる物体に近い側と遠い側とで大きく異なる。これによって、重力を受ける物体は形を歪めようとする。球形の物体が潮汐力を受けると、重力源に近い側は重力で、遠い側は回転の力から来る遠心力で、2ヶ所が膨らんだ楕円体に変形しようとする。

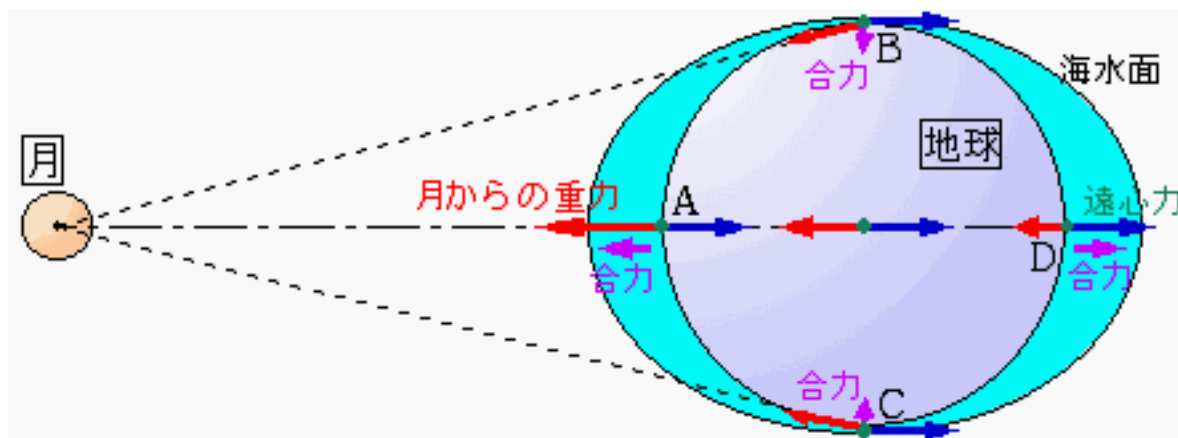


図 2.1 潮汐力

潮汐力の効果は、中性子星やブラックホールといった、大きな質量を持った小さな物体の近くでは特に顕著になる。これらの天体に落ち込む物体は潮汐変形を受けて細長く引き伸ばされる。

3 SPH法

3.1 SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics)法とは

星を流体として扱うためには密と圧力を考える必要があるが、単純な点粒子の運動では圧力を表現することが出来ない。そのためにSPH法を用いた。SPH法は粒子法の一つで流体を粒子の集合として表し、粒子一つ一つに有限な大きさを持たせることで流体の挙動を近似する方法である。状態方程式を仮定して、流体の性質を解析することもできる。

粒子法とは、粒子を用いた連続体の数値解析手法であり、本研究で用いたSPH法などがある。

従来から利用されてきた格子法では、解析領域を格子で区切り接点に物理量を設定する。そのため、適切な解析結果を得るために最適な格子を設定するのに時間がかかる。また、急激な変形が起こるような問題では格子生成が破綻してしまい計算することが出来ない。

粒子法では、粒子を分布させるだけなのでモデルの設定が容易で、粒子同士の位置関係が固定されていないため急激な変形にも対応できる。

3.2 物理量の表現

以下ではSPH法について説明する。ここでは文献[1]を参考にした。

物理量 $f(\mathbf{x})$ が存在したとき、物理量そのものではなく平均化関数 W によって平均化した関数 $\langle f \rangle$

$$\langle f(x) \rangle = \int W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) f(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (3.2.1)$$

を用いることとする。 \mathbf{x} は3次元ベクトルを表す。SPH法では、粒子の存在する点で物理量を代表し、それを W によって平均化する。どの程度平均化されるかは h で決まり、 h は平均化関数の広がりを表す。平均化関数はどのような物でも良いわけではなく、規格化のため、

$$\int W dx = 1 \quad (3.2.2)$$

の関係を満たさなければならない。そして、粒子の密度に応じて広がる幅を調整する。後述する (3.3.11) 式参照。

今回は平均化関数としてガウス関数を用いた。

$$W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', h) = a \exp\left(\frac{-\mathbf{x}^2}{h^2}\right) \quad (3.2.3)$$

物理量として流体の密度を表現する。実際の粒子の分布として点状の粒子の集合を考えると (3.2.1) 式より密度 ρ は、

$$\langle \rho(\mathbf{x}) \rangle = \sum_{j=1}^N m_0 W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'_j, h_j) \quad (3.2.4)$$

となる。ここで m_0 は粒子の質量であり、 x_j は j 番目の粒子の重心を表す。つまり、 N 個の分布関数 $W(x)$ の重ね合わせとして流体密度が決定される。図 3.2.1 のように各粒子に密度が分布してそれを重ね合わせると図 3.2.2 のように粒子全体の密度となる。

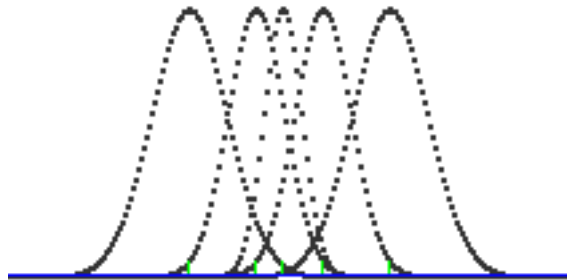


図 2.2.1 各粒子は密度を持つ

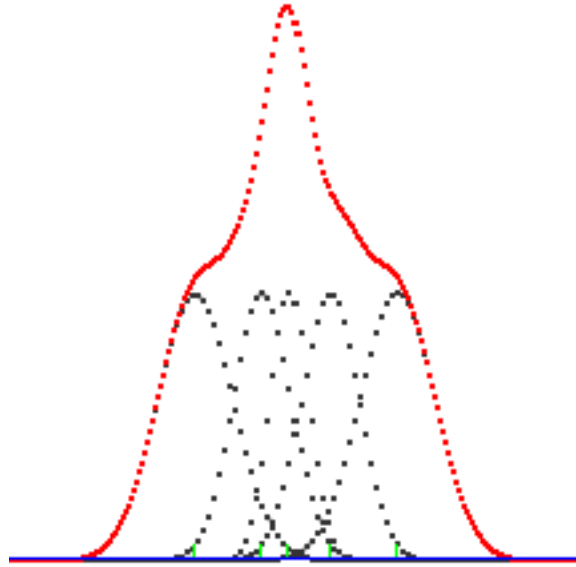


図 2.2.2 各密度を重ね合わせて全体の密度を表す

一般の物理量の表現は、密度の場合と同様に粒子の重心の位置の物理量で記述されている。この場合、粒子の個数密度だけの重みを持ってサンプルすることになるのでこれを考慮して $\langle f \rangle$ の表現は、

$$\langle f(x) \rangle = \sum_{j=1}^N f(x_j) \frac{m_0}{\rho(x_j)} W(x - x_j, h_j) \quad (3.2.5)$$

となる。

次に物理量の微分は W が解析関数であるから、そのまま微分が可能で、

$$\frac{d}{dx} \langle f(x) \rangle = \sum_{j=1}^N f(x_j) \frac{m_0}{\rho(x_j)} \nabla_x W(x - x_j, h_j) \quad (3.2.6)$$

となって、粒子の分布関数の勾配に $\frac{f m_0}{\rho}$ の重みをかけて和を取ることで与えられる。

3.3 流体力学的方程式

ここでは流体力学の式を SPH によって記述する。まず、星や星間ガス雲の状態方程式を与える。ここではポリトロープの関係式を用いる。

$$P = K\rho^{1+\frac{1}{N}} \quad (3.3.1)$$

ここで、 P と ρ はそれぞれ圧力と密度を表し、 K と N は定数である。以下では N の代わりに γ (比熱比)

$$\gamma \equiv 1 + \frac{1}{N} \quad (3.3.2)$$

を用いる。

流体力学の方程式は、
連続の式 (質量保存則)

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (3.3.3)$$

と、運動方程式

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P - \rho \nabla \Psi \quad (3.3.4)$$

からなる。ここで Ψ は重力ポテンシャルを表す。運動方程式はそれぞれの粒子の加速度を記述する形に表される。 j 番目の粒子の運動方程式は、

$$\frac{d^2 \mathbf{x}_j}{dt^2} = -\frac{1}{\rho(\mathbf{x}_j)} \nabla P(\mathbf{x}_j) - \mathbf{G}_j - \mathbf{Q}_j \quad (3.3.5)$$

となり、すべての粒子について解くことで (3.3.1) 式と共に流体の運動は決定される。 \mathbf{G} は重力による力を表し、 \mathbf{Q} は人工粘性項である。具体的な \mathbf{G} 、 \mathbf{Q} は後述する。

ここで物理量の規格化を行う。

$$\text{初期の流体密度} : \rho_0 \quad (3.3.6)$$

$$\text{初期の流体の半径} : R_0 \quad (3.3.7)$$

$$\text{自由落下時間} : t_{ff} = \sqrt{\frac{32}{3\pi G \rho_0}} \quad (3.3.8)$$

を規格化の単位として選ぶことにする。

具体的に流体力学の方程式を解いていく。まず、1個の粒子の分布関数は、

$$W_j(\mathbf{x}, h) = \frac{m_0}{\pi\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{h_j^3} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{h_j^2}\right) \quad (3.3.9)$$

とする。ここで m_0 は規格化された1粒子の質量で、

$$m_0 = \frac{M}{N} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{R_0^3 \rho_0}{N} = \frac{4\pi}{3N} \quad (3.3.10)$$

である。ここで N は計算に用いる粒子の総数である。(3.3.8) 式の h_j は粒子の広がり、

$$h_j = \eta \left(\frac{m_0}{\langle \rho(\mathbf{x}_j) \rangle} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.3.11)$$

で決定される。 $\langle \rho(\mathbf{x}_j) \rangle$ は j 番目の粒子が存在する点での流体密度である。 η は定数で、

$$\eta = 1 \quad (3.3.12)$$

が適当な値である。この h_j から密度は、

$$\begin{aligned} \langle \rho(\mathbf{x}) \rangle &= \sum_{j=1}^N m_0 W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h_j) \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{m_0}{\pi\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{h_j^3} \exp\left[-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)^2}{h_j^2}\right] \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

で与えられる。(3.3.11) と (3.3.12) は両方で超越方程式をなしているので逐次近似で解かれるべきであるが、(3.3.11) 式の右辺の密度にはいつも前のステップの密度を代入することで十分良い近似となる。

次に運動方程式 (3.3.4) の右辺を具体的に与えていく。圧力勾配は、

$$-\frac{1}{\rho} \nabla P = -\left(1 + \frac{1}{N}\right) \frac{P}{\rho} \cdot \frac{1}{\rho} \nabla \rho = -\frac{c_s^2}{\rho} \nabla \rho \quad (3.3.14)$$

となる。ここで c_s は、

$$c_s^2 = \left(1 + \frac{1}{N}\right) \frac{P}{\rho} \quad (3.3.15)$$

であり、流体内の局所的音速である。初期の音速を c_{s0} とおくと、

$$c_s^2 = c_{s0}^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{N}} = c_{s0}^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} \quad (3.3.16)$$

で音速は与えられる。(3.3.13) 式の

$$\nabla \rho \quad (3.3.17)$$

を計算するために密度の定義式を使って、

$$\begin{aligned} \nabla \langle \rho \rangle &= \sum_{j=1}^N m_0 \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h_j) \\ &= \sum_{j=1}^N 2m_0 \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)}{h_j^2} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h_j) \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

となる。密度勾配はおのこの粒子の密度分布の勾配の和で表されることになる。

次は重力の計算である。各粒子の広がり h_j より十分遠方に分布している場合は、

$$-\frac{Gm_0}{x_{ij}^3}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (3.3.19)$$

を各粒子について和を取ればよいことになる。ここで $x_{ij} = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$ である。

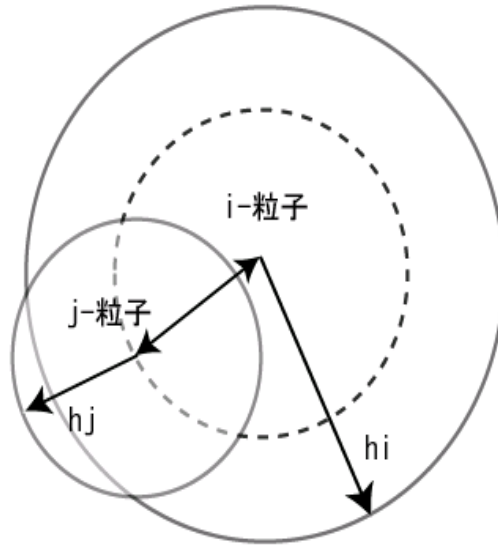


図 3.3.1 i 粒子の j 粒子に対する重力の寄与

図 3.3.1 のように粒子と粒子の広がり重なっている場合は j 粒子に対する i 粒子の寄与を考える必要があり、i 粒子の x_{ij} 内に含まれる質量となって、

$$-\frac{Gm_0}{x_{ij}^3}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \int_0^{x_{ij}} W(r, h_j) 4\pi r^2 dr \quad (3.3.20)$$

と書ける。W はガウス関数であるからこの式を規格化すると、

$$\mathbf{G}_i = -\frac{3\pi}{32} m_0 \sum_{j=1}^N \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{x_{ij}^3} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x_{ij}}{h_j}\right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{x_{ij}}{h_j} \exp\left(-\frac{x_{ij}^2}{h_j^2}\right) \right] \quad (3.3.21)$$

となる。ここで erf は誤差関数で、

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-y^2) dy \quad (3.3.22)$$

で定義される。 $\frac{x_{ij}}{h}$ が十分小さい極限では (3.3.18) 式は (3.3.20) 式の和に一致する。

次に決めるのは人工粘性項 Q_j である。天体現象ではしばしば流体内に衝撃波を含む。衝撃波は相対速度差が音速を超える流体の境界面で発生する。SPH で記述すると相対速度が音速を超える粒子群のぶつかり合いとして表現される。相対速度が音速を超えていない場合は、圧力勾配の力によって粒子が速度の異なる粒子群の間をすり抜けることはない。ところが、音速を超える場合は圧力勾配だけでは粒子のすり抜けを止めることが出来なくなってしまう。実際の流体ではすり抜

けは起こらないので衝撃波面の近傍だけで働く粘性を付加することでこの現象を回避する。粘性の強さを ϵ として、

$$\mathbf{Q}_j = \sum_{ij} \epsilon(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) q_{ij} \quad (3.3.23)$$

の形の力の和を加える。ここで q_{ij} は、

$$q_{ij} = \left[\left\{ \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)}{x_{ij}^2} \right\}^2 - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\dot{\rho}_j}{\rho_j} \right) \right] \exp\left[-\left(\frac{x_{ij}}{h_j}\right)^2\right] \quad (3.3.24)$$

であり、この粘性項を次の条件のもとで加える。

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) > 0 \quad \text{ならば} \quad q_{ij} &= 0 \\ \frac{\dot{\rho}_j}{\rho_j} < 0 \quad \text{ならば} \quad q_{ij} &= 0 \\ q_{ij} < 0 \quad \text{ならば} \quad q_{ij} &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

これらの条件はこの粘性が衝撃波面のみで働くように制限するためである。ここでは粘性の強さを、

$$\epsilon(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = 1 \quad (3.3.26)$$

とするのが適当である。

3.4 時間間隔の決定

流体計算において時間積分を実行するための時間間隔の決定が重要な因子となる場合がある。特に、差分法においては CFL(Courant Friedrichs Lewy) 条件を満たさなければ計算を安定して解くことが出来ない場合がある。CFL 条件とは、数値解析において時間スケールが発生する現象の時間よりも十分小さくなければならないという条件である。SPH 法の場合は計算が不安定になることはないが、物理的に考察して物理量の変化する時間スケールより十分小さく時間間隔を決定する必要がある。ここでは以下のように時間間隔を計算してその最小値で次のステップの時間間隔を決定する。

1) 局所的自由落下時間の最小値から決定される時間

$$\Delta T1 = \text{FFFL} \times \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_{max}}} \quad (3.4.1)$$

2) 粒子のサイズを音速で通過する時間の最小値

$$\Delta T2 = \text{FHCC} \times \min_{i=1, \dots, N} \left(\frac{h_i}{c_s(\mathbf{x}_i)} \right) \quad (3.4.2)$$

3) 粒子間隔を相対速度で過ぎる時間の最小値

$$\Delta T3 = \text{FRCV} \times \min_{i=1, \dots, N} \left(\frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}{|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j|} \right) \quad (3.4.3)$$

4) 粒子間隔を音速が通過する時間の最小値

$$\Delta T4 = \text{FHCV} \times \min_{i=1, \dots, N} \left(\frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}{c_s} \right) \quad (3.4.4)$$

以上の式で FFFL、FHCC、FRCV、FHCV は定数である。

これらの時間の最小値を計算して次のステップの時間間隔とする。しかし、時間間隔が前のステップの時間間隔と比較して大幅に増大することは避けるため増大率に歯止めをかける。新しい時間間隔 ΔT は、

$$\Delta T = \min[\Delta T1, \Delta T2, \Delta T3, \Delta T4, \text{DTGMAX} \times \text{PDT}] \quad (3.4.5)$$

で決定する。ここで DTGMAX と PDT は増大率の最大値と前のステップの時間間隔である。プログラムでは DTGMAX を 1.05 としている。

3.5 SPH 法の長所と短所

格子法と比較して SPH 法の長所と短所をまとめた。

SPH 法の長所

- 1) 本質的に 3 次元計算：1 次元 2 次元と比較して困難さはない
- 2) 流体の存在するところの精度が自然と良い
- 3) 数値不安定性がない
- 4) アルゴリズムが簡単
- 5) 境界条件の困難さがない：格子法では数値計算上、境界で特別な操作が必要

SPH 法の短所

- 1) 計算時間がかかる
- 2) 磁場などの場の量を粒子で追求するのは難しい
- 3) 密度揺らぎが内在する

4 SPH法と単純な多体粒子法との比較

ここではSPH法を用いてシミュレーションした場合と単純な多体法でシミュレーションした場合の比較を行う。2個の星が正面衝突して一つの星になるときモデルの違いによって挙動にどのような違いがあるかをみる。

4.1 初期条件

粒子数 $N = 400$ 、比熱比 $\gamma = \frac{4}{3}$ 、初期時間間隔 $dt = 0.01$ 、初期速度は各成分0
初期の粒子分布は原点を中心に半径 $R_0 = 1$ とした範囲内にランダムで分布後、半分を x 軸の正方向へ、残りを負方向へ $1.5R_0$ 移動させている。

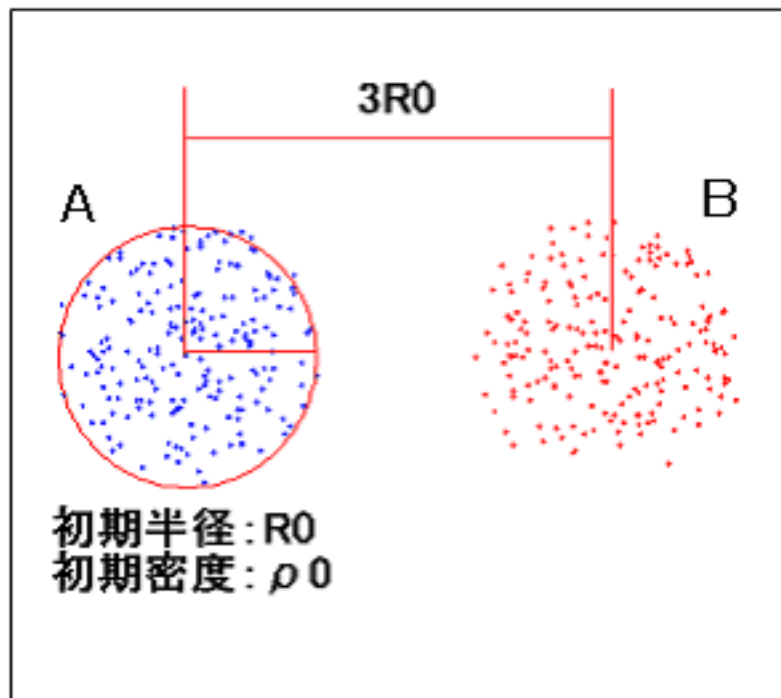


図 4.1.1 シミュレーションの初期状態

2個の星の距離を $3R_0$ としたのは、距離が近いと初期配置の粒子群 A, B がそれぞれ星としてまとまる前にもう一方の粒子群の影響を受けてしまい、2個の星が形成されないためである。また、あまり離しすぎると衝突するまでに必要な計算時間が無駄に多く掛かってしまうので今回のコードでは上記のように設定した。

4.2 シミュレーション結果

SPH法の場合、衝突後一つにまとまり揺らぎはあるものの一定の大きさを保つ。

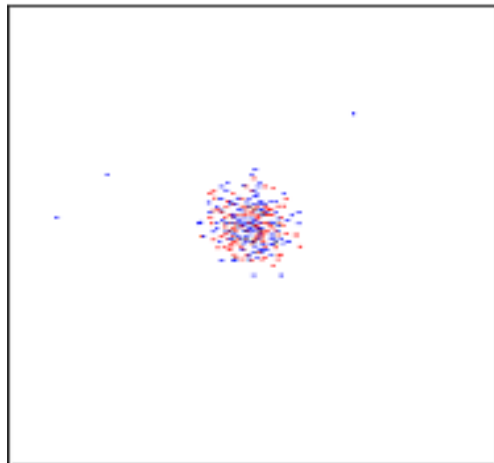


図 4.2.1 2個の星が衝突し一つにまとまった状態

単純な多体の場合、衝突後散らばっていき無限に広がってしまう。

その理由としては単純な多体では圧力を考えない点があげられる。圧力を考えない場合重力に釣合う斥力も存在しないので粒子同士が近づいた場合放物運動により広がっていくと考えられる。

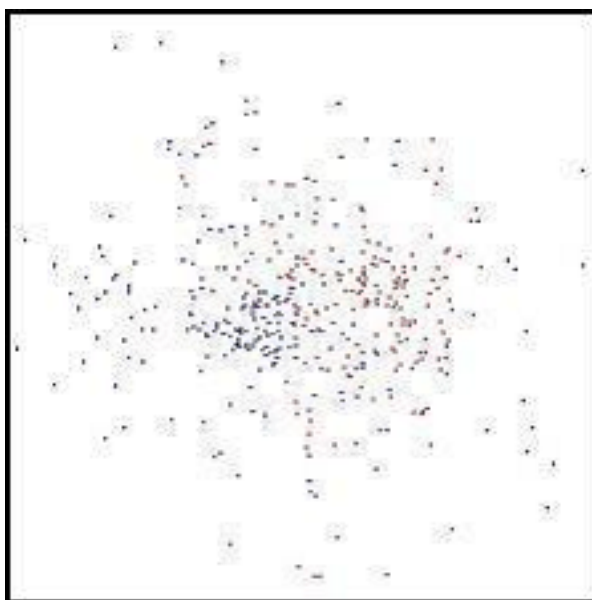


図 4.2.2 衝突後散らばっていく

以下に半径の推移を図に表す。ここでの半径は全粒子数の8割を含む範囲が星であるとしたときの中心座標からの半径である。

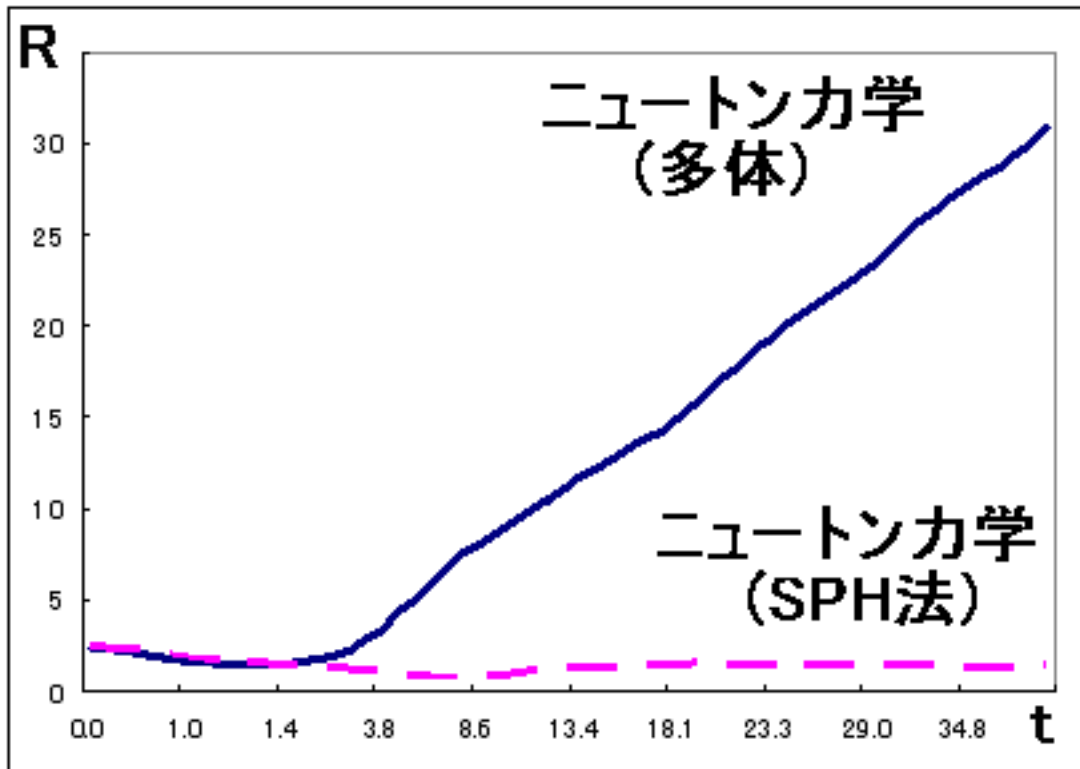


図 4.2.3 SPH 法を用いた場合と単純な多体の場合の半径の推移

図 4.2.3 より、SPH 法の場合粒子の半径がほぼ一定となって推移している。これは粒子が集まって星が形成されていると考えられる。単純な多体の場合は星が形成されること無く粒子は発散してしまった。

4.3 初期条件の変更

ここでは初期条件を様々に変化させたとき振る舞いがどのように変わるかシミュレーションを行った。

4.3.1 比熱比の変更

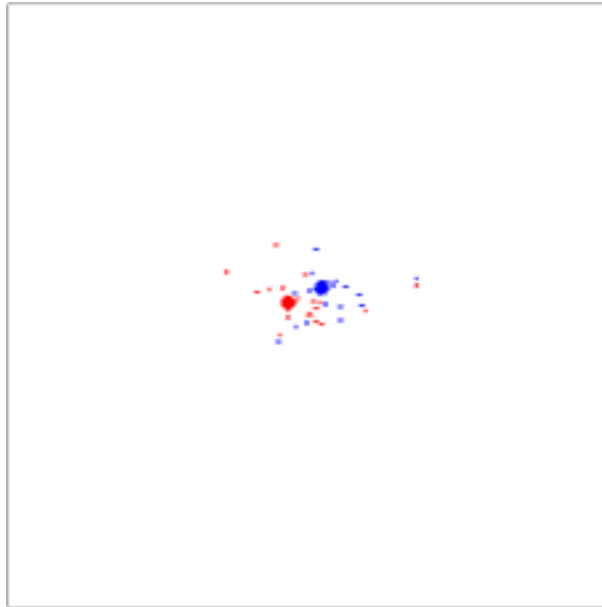


図 4.3.1.1 比熱比 $\gamma = 1$ の場合

小さく一点にまとまって一つの粒子であるかのように振る舞う。初速度0の場合うまく正面衝突しないことが多い。そのため、 $\gamma = 1$ の場合に限り、初速度 $vx = \pm 0.5$ を衝突する方向に与えている。

このように小さくまとまるのは比熱比が小さいことにより圧力勾配が大きくなり、重力に釣合う斥力が大きくなるためと考えられる。

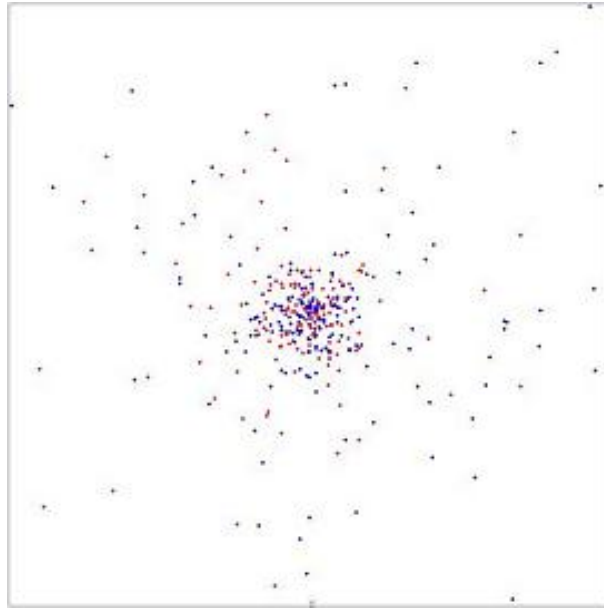


図 4.3.1.2 比熱比 $\gamma = \frac{5}{3}$ の場合

$\gamma = \frac{4}{3}$ のときと比べるとまとまりが悪いが、星になっているのは確認できる。

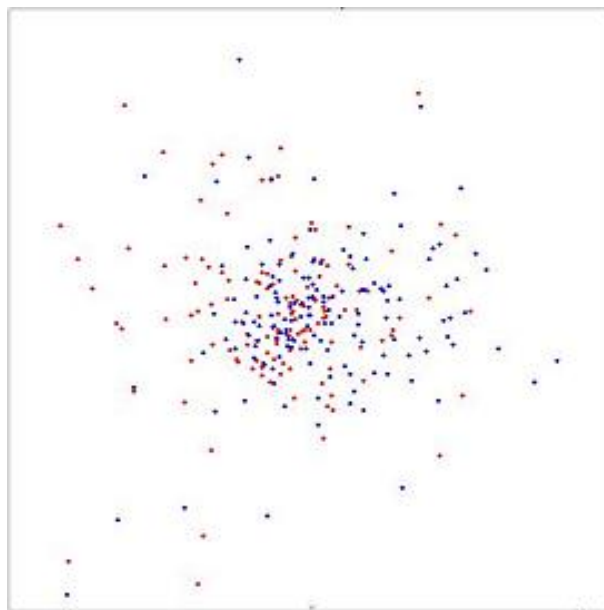


図 4.3.1.3 比熱比 $\gamma = 2$ の場合

2つの星も衝突後の星もまとまりが悪く、散らばる粒子の数が多くなる。

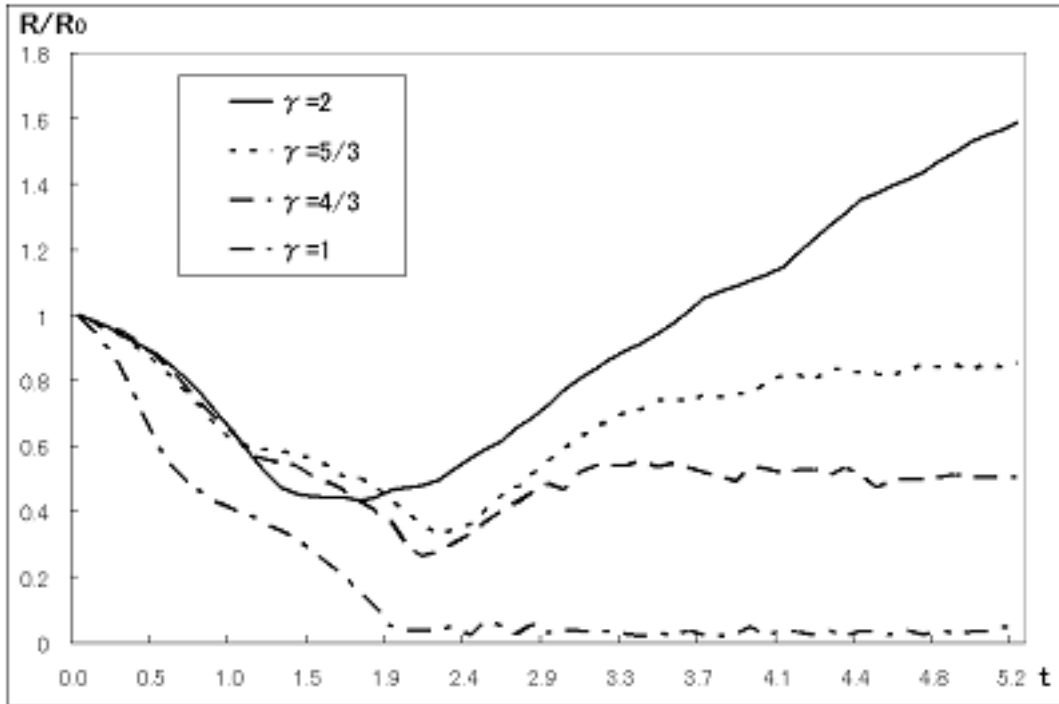


図 4.3.1.4 比熱比を変更した場合の半径の推移

図 4.3.1.4 は比熱比を変更した場合の星の半径の推移である。上から $\gamma = 2, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 1$ のときを表す。比熱比が小さくなるにつれて半径が一定でまとまるようになっているのが見て取れる。この図から状態方程式を変えることでできる星が変わってくるのがわかる。

4.4 まとめ

図 4.2.3 より、SPH 法の場合圧力勾配が働き、重力に拮抗する斥力が働いてつりあうので粒子が一定体積でまとまる可能性がある。つまり、星が形成されるモデルと考えられる。一方、単純な N 体コードの場合はそれが無いので粒子間で近接後放物運動により広がっていく。

比熱比を変更すると星の振る舞いが大きく変わることが確認できた。比熱比が大きくなるにつれて粒子のまとまりが悪くなる。その原因は (3.3.14) 式 (3.3.16) 式より、比熱比が大きくなると圧力勾配が小さくなり、重力に釣合うための斥力が小さくなるためと考えられる。

以上のように、作成したコードの示す定性的なふるまいは、物理的な解析と合致した。

5 一方の星を極端に重くした場合の潮汐力効果

重い星からの潮汐力効果で軽い星にどのような影響があるのかシミュレーションを行った。

5.1 初期条件

粒子数 $N = 400$ 、比熱比 $\gamma = \frac{4}{3}$ 、初期時間間隔 $dt = 0.01$ 、一点の重い星と粒子が集まった軽い星との重さの比は 100:1

初期の粒子分布は原点を中心に半径 $R_0 = 1$ とした範囲内に 399 個をランダムで分布後、 x 軸の正方向へ $4R_0$ 移動させている。重い星は $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ に粒子番号 1 として配置。他の粒子からの影響は考えないものとして固定している。また、重い星を表す左側の球は半径をシュヴァルツシルト半径で与えており、粒子がこの範囲に入った場合吸い込まれたものとしてそれ以降計算しないようにしている。

重い星からの距離 $4R_0$ はあまり近いと潮汐力の影響を十分確認できないまま重い星に吸い込まれてしまうので、それを避けるためにこのように設定した。

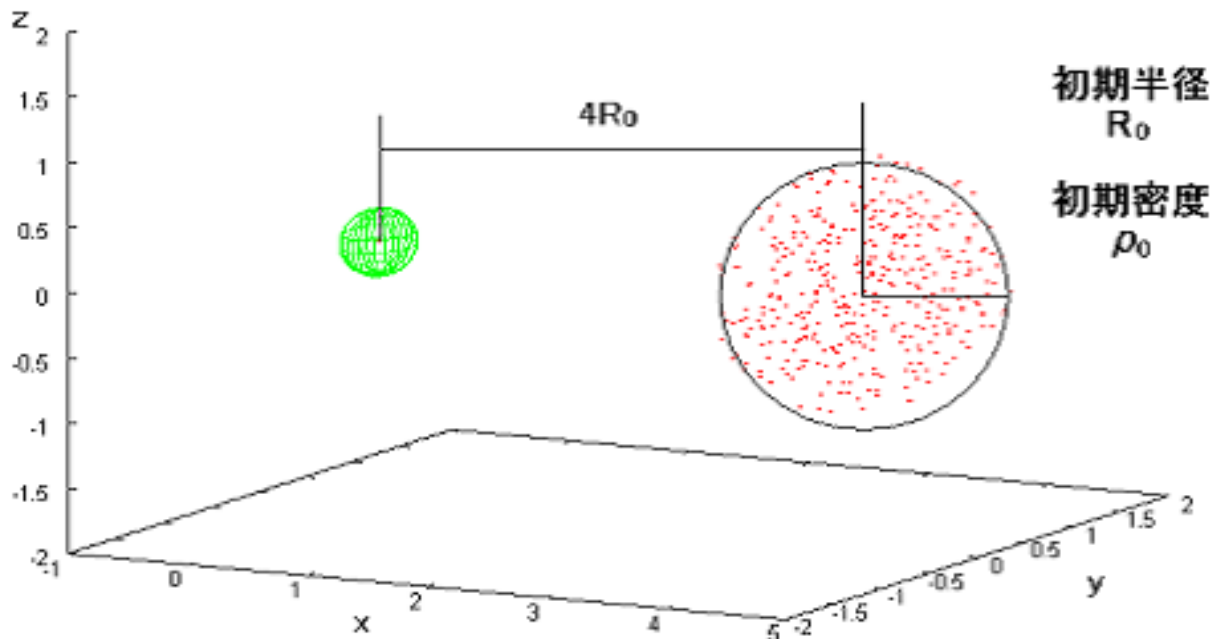


図 5.1.1 シミュレーションの初期状態

初期速度 x 成分 : 0 y 成分 : 0 z 成分 : 0

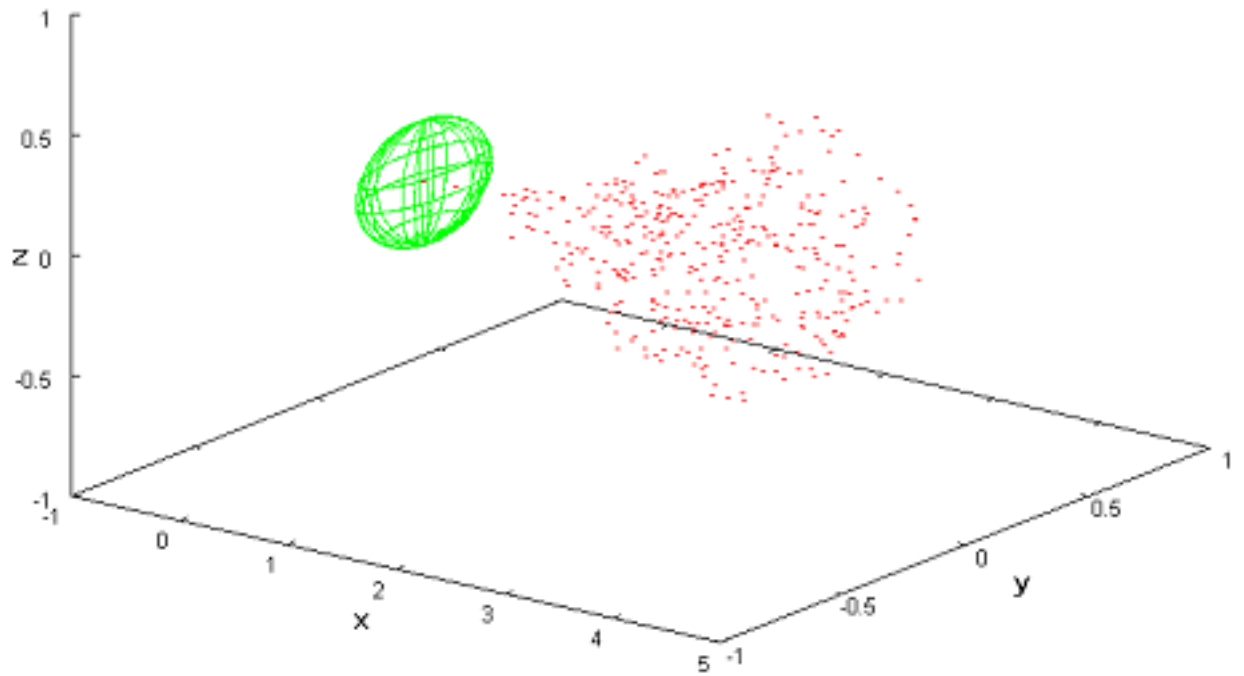


図 5.1.2 重い星に吸い込まれる

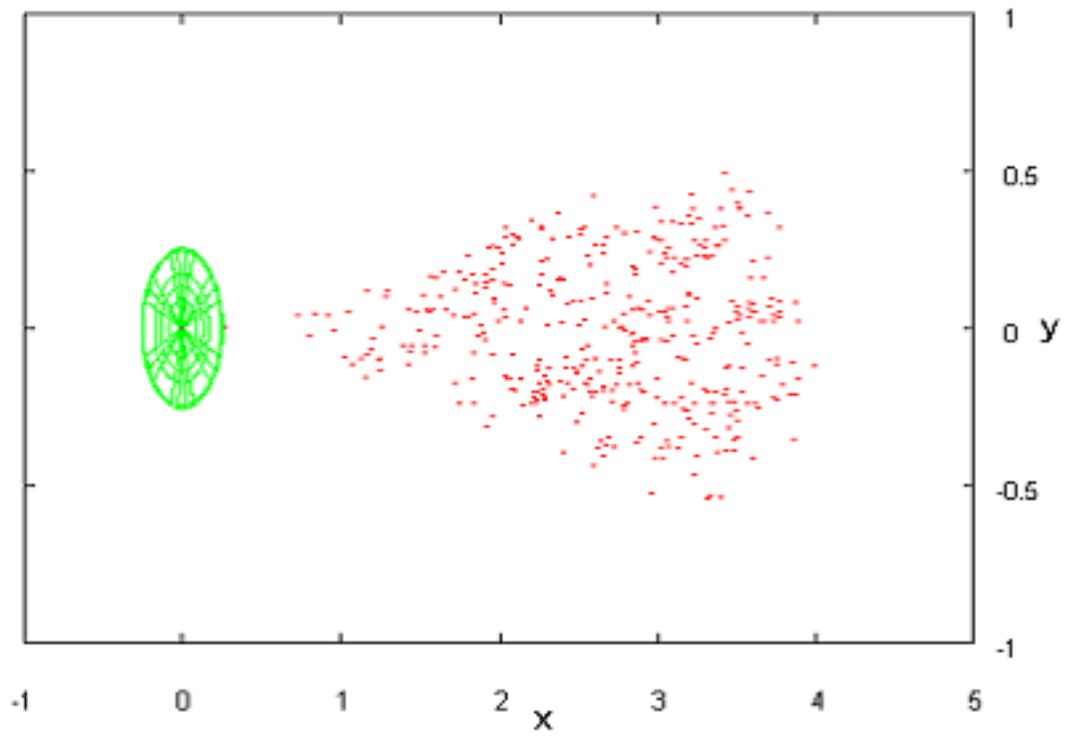


図 5.1.3 X-Y 座標

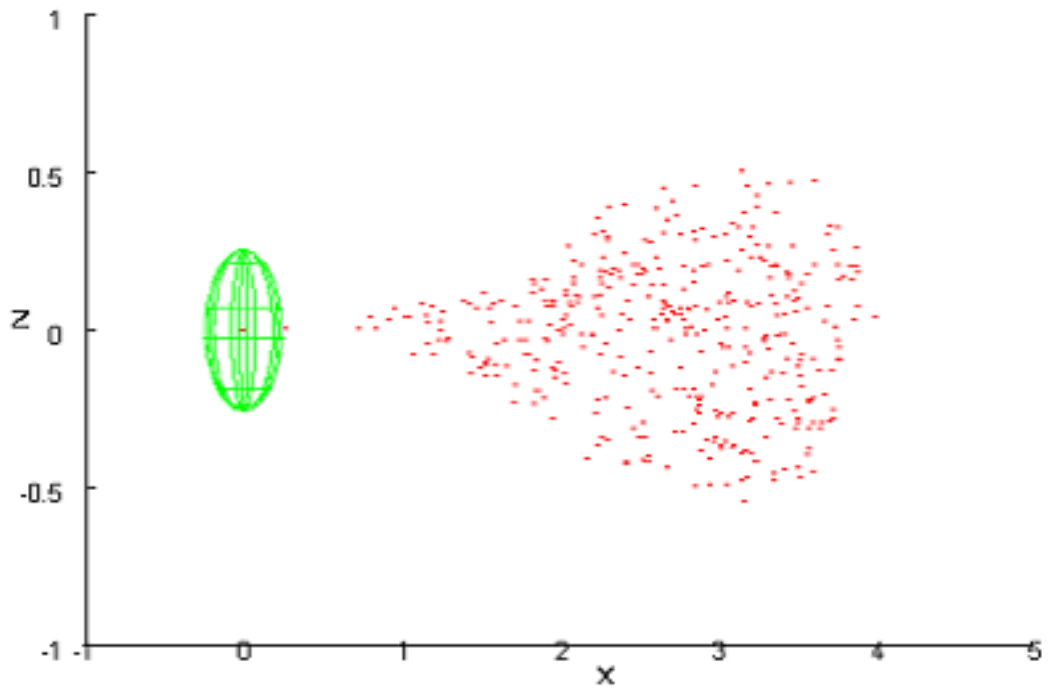


図 5.1.4 X-Z 座標

初期速度が 0 の場合すべての粒子が重い星に吸い込まれた。このとき、潮汐力効果により星が歪められて崩壊していくのが確認できる。

5.2 シミュレーション結果

5.2.1 初期速度の変更

初期速度 x 成分 : 0 y 成分 : 3 z 成分 : 0

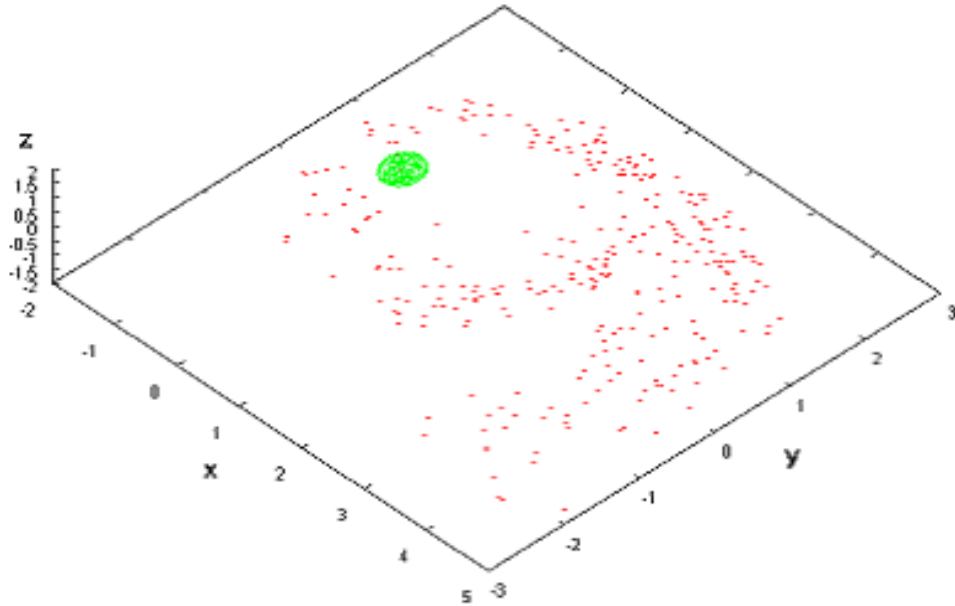


図 5.2.1.1 重い星の潮汐力により破壊される

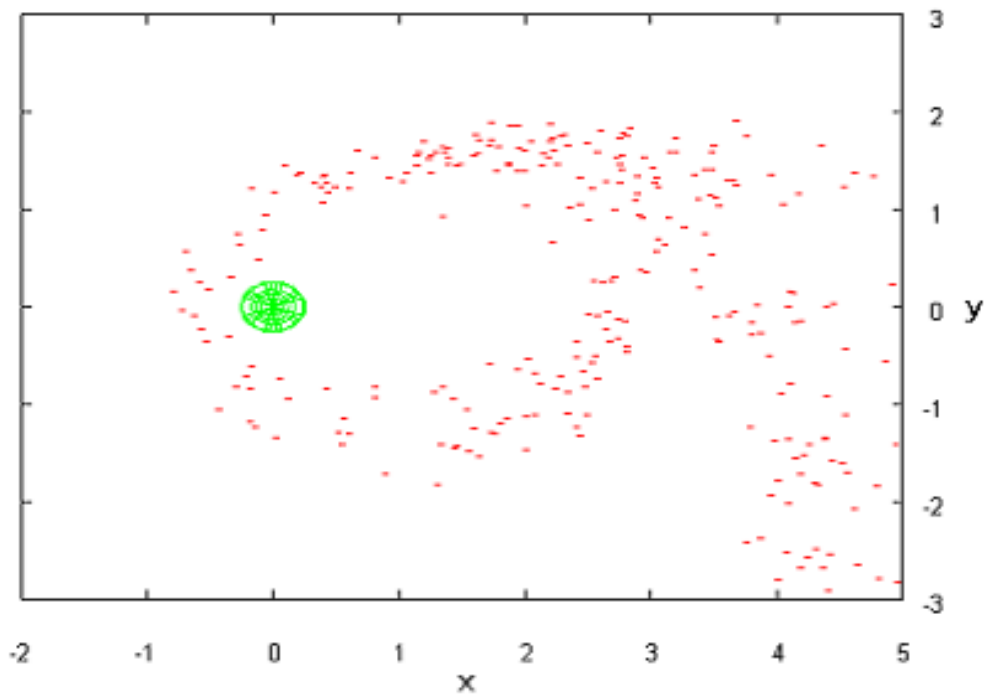


図 5.2.1.2 X-Y 座標

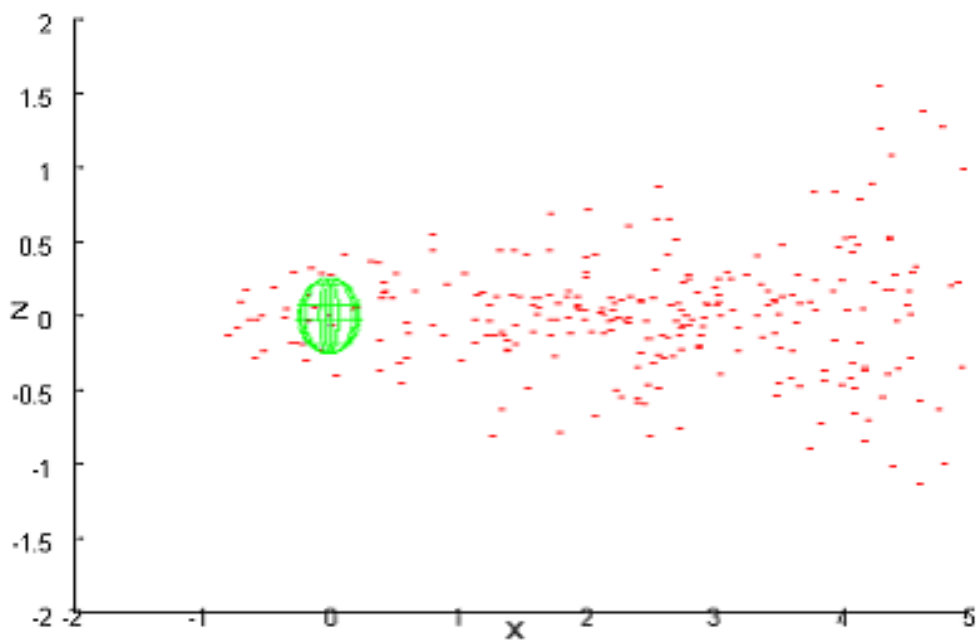


図 5.2.1.3 X-Z 座標

重い星の潮汐力効果で破壊された後、粒子は星の周りを回り続けた。
 これは、破壊された星の要素が小断片になり、互いに引き合う重力が弱まったと共に、角運動量を持つために中心星の周りをを回転し続けるためと考えられる。

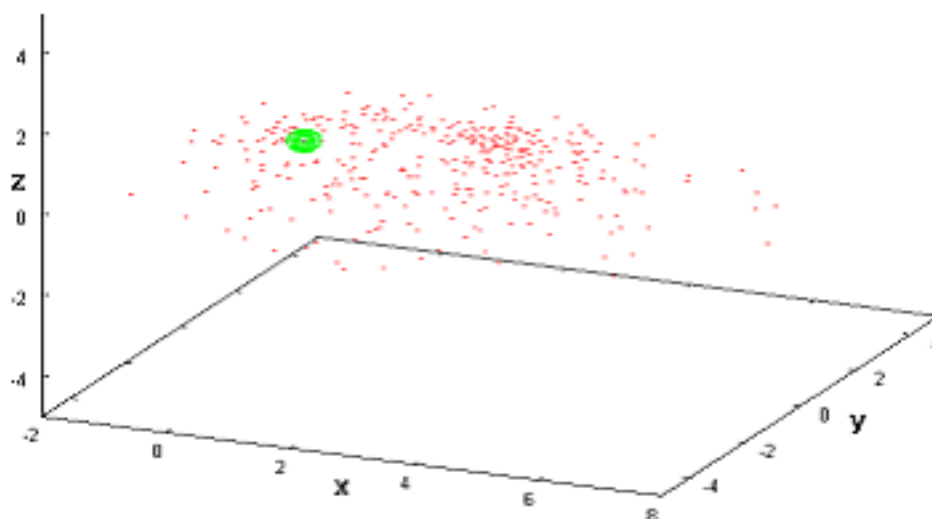


図 5.2.1.4 図 5.2.1.1 の $20t_{ff}$ 後

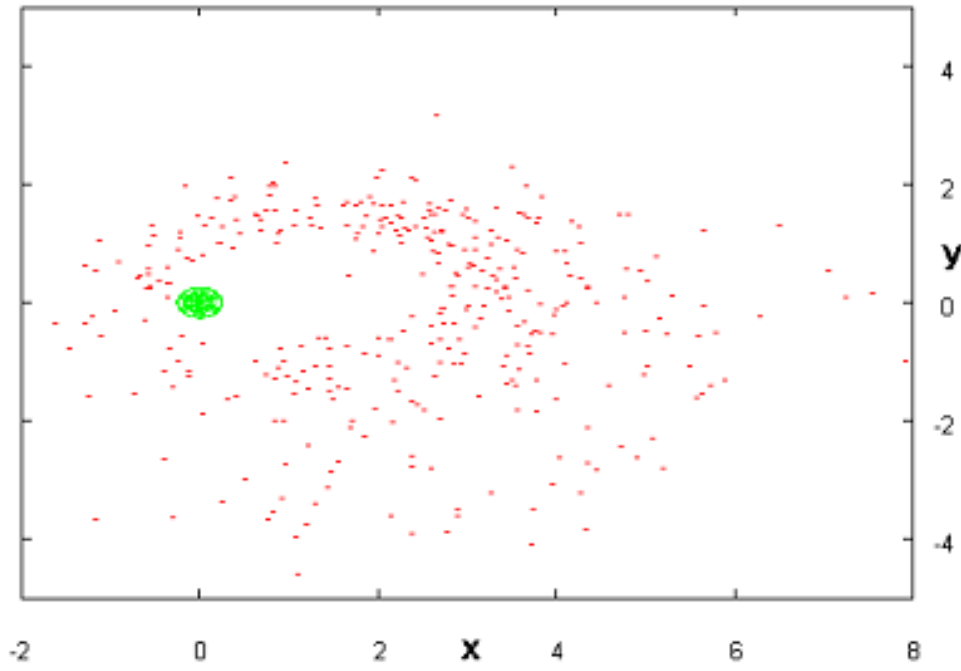


図 5.2.1.5 X-Y 座標

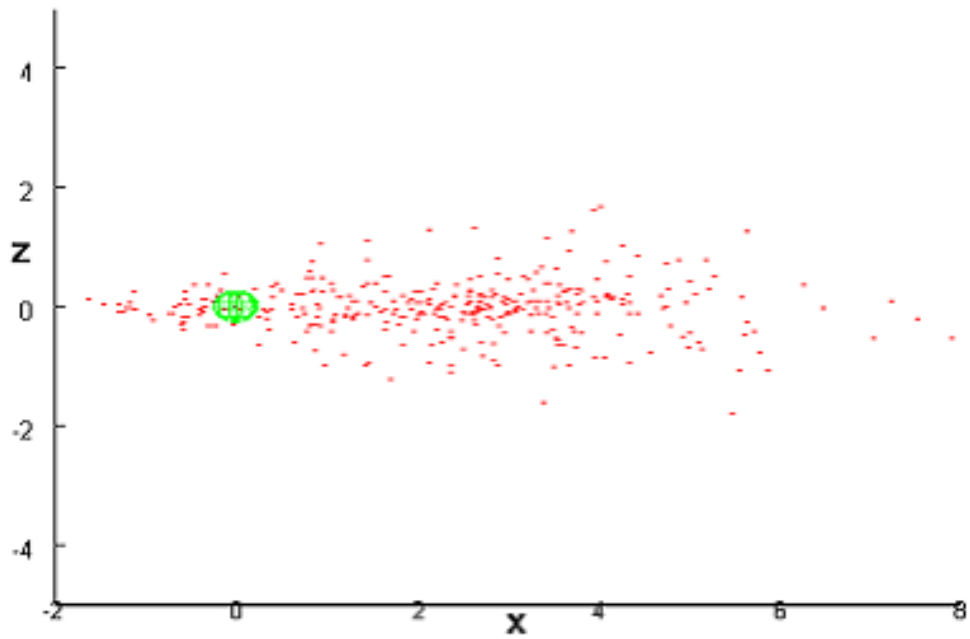


図 5.2.1.6 X-Z 座標

図 5.2.4 の状態からさらにシミュレーションを進めると図 5.2.7 のようになり、楕円のリング状に分布した粒子群が形成された。

初期速度 x 成分 : 0 y 成分 : 6 z 成分 : 0

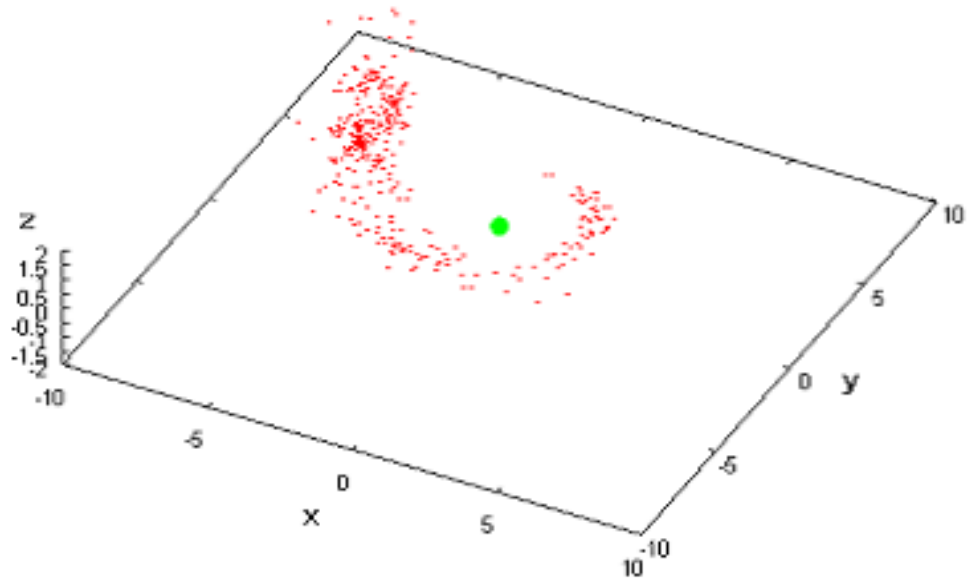


図 5.2.1.7 重い星の潮汐力により破壊される

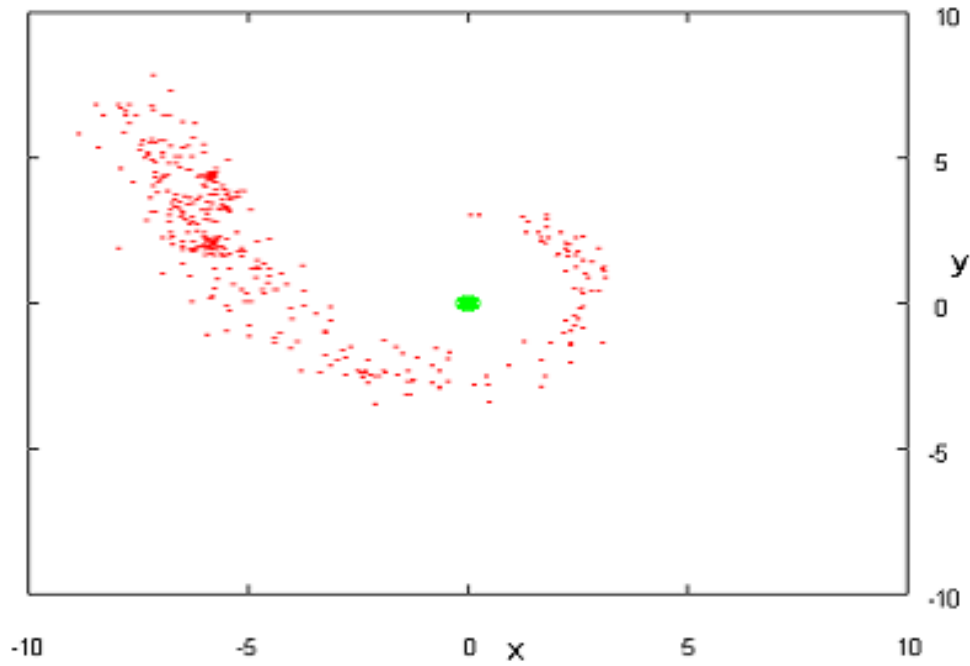


図 5.2.1.8 X-Y 座標

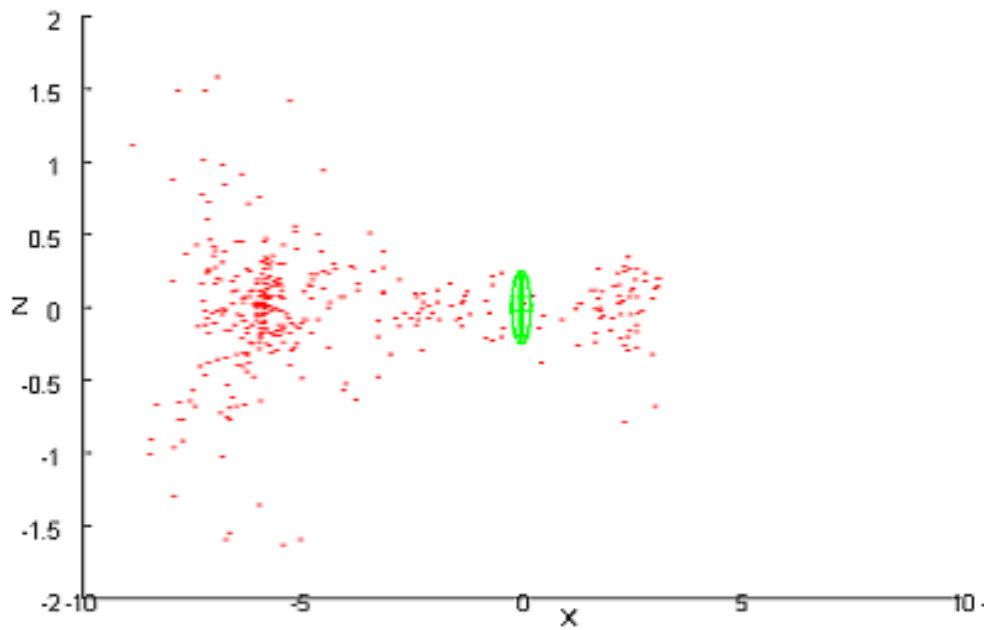


図 5.2.1.9 X-Z 座標

y 成分の速度 3 のときと比べて、大きく回りながら重い星の潮汐力効果で破壊された。その後は同様に粒子は星の周りを回り続けた。

初期速度 x 成分 : 0 y 成分 : 10 z 成分 : 0

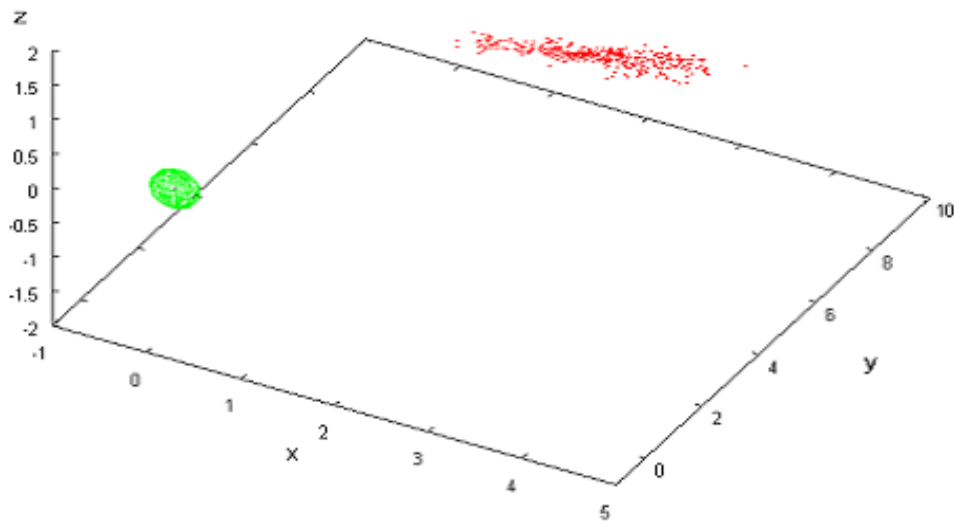


図 5.2.1.10 重い星の潮汐力により変形される

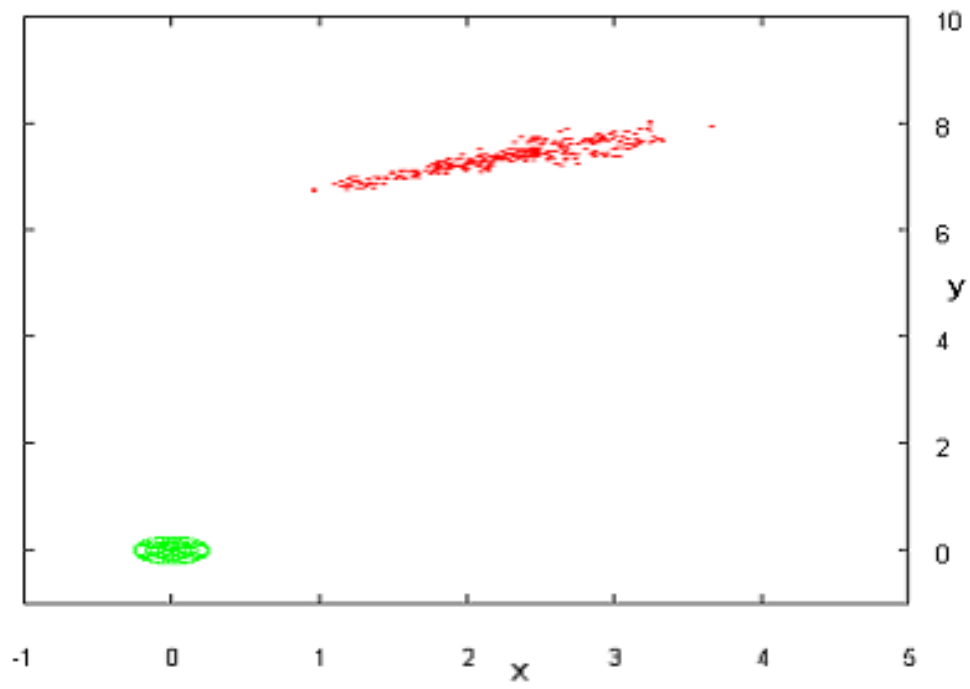


图 5.2.1.11 X-Y 座標

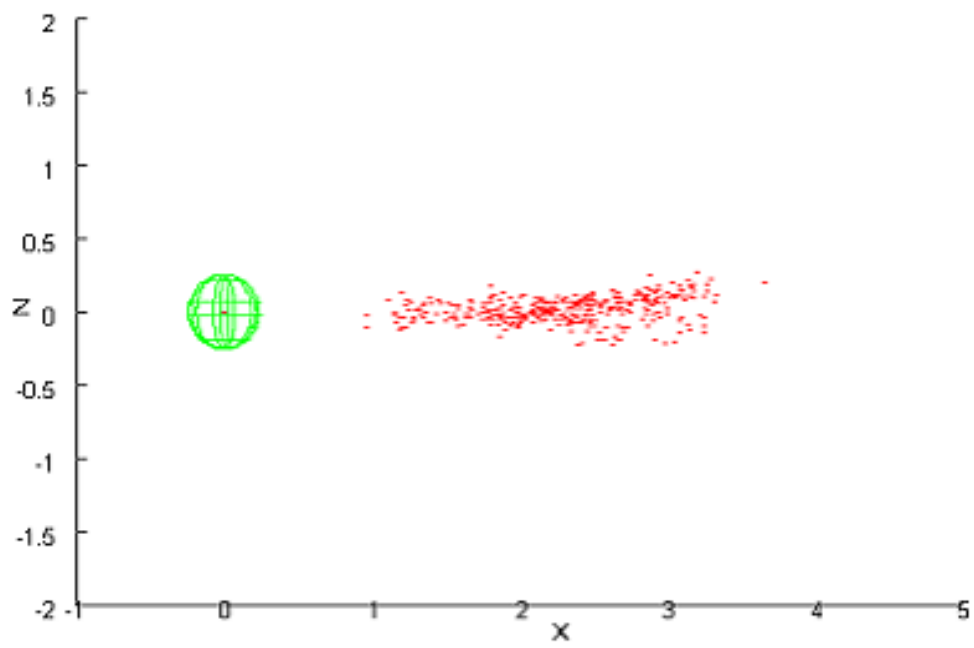


图 5.2.1.12 X-Z 座標

この条件のままさらにシミュレーションを進めていくと以下のようになった。

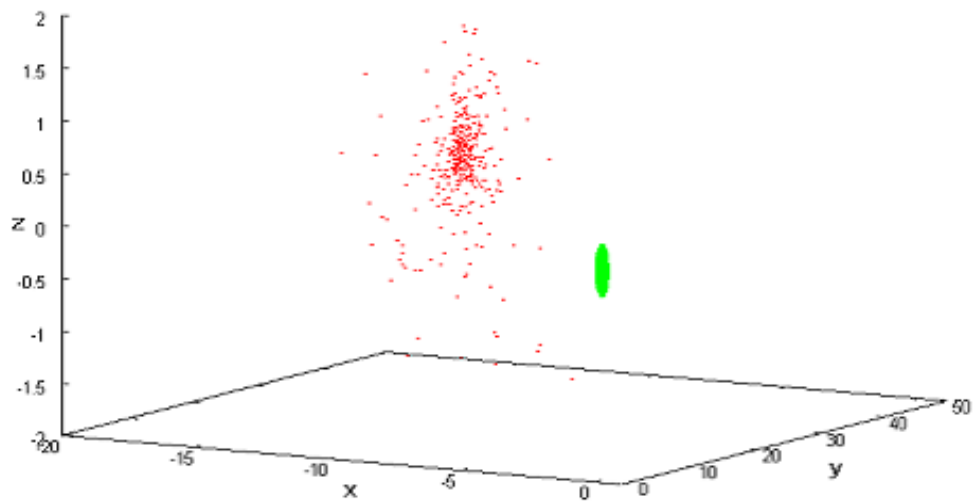


図 5.2.1.13 破壊されずに遠ざかっていく

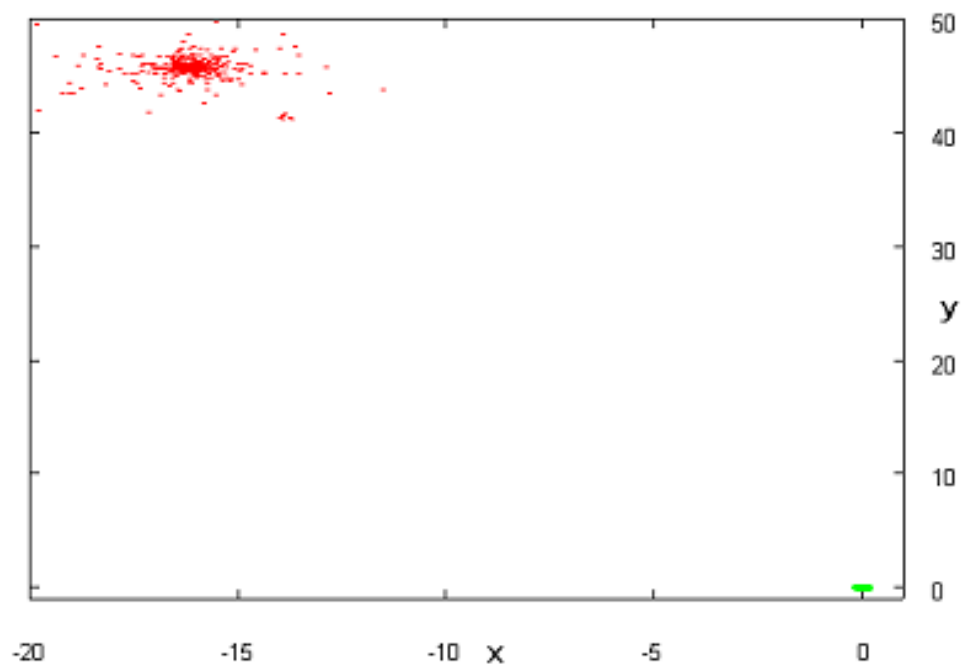


図 5.2.1.14 X-Y 座標

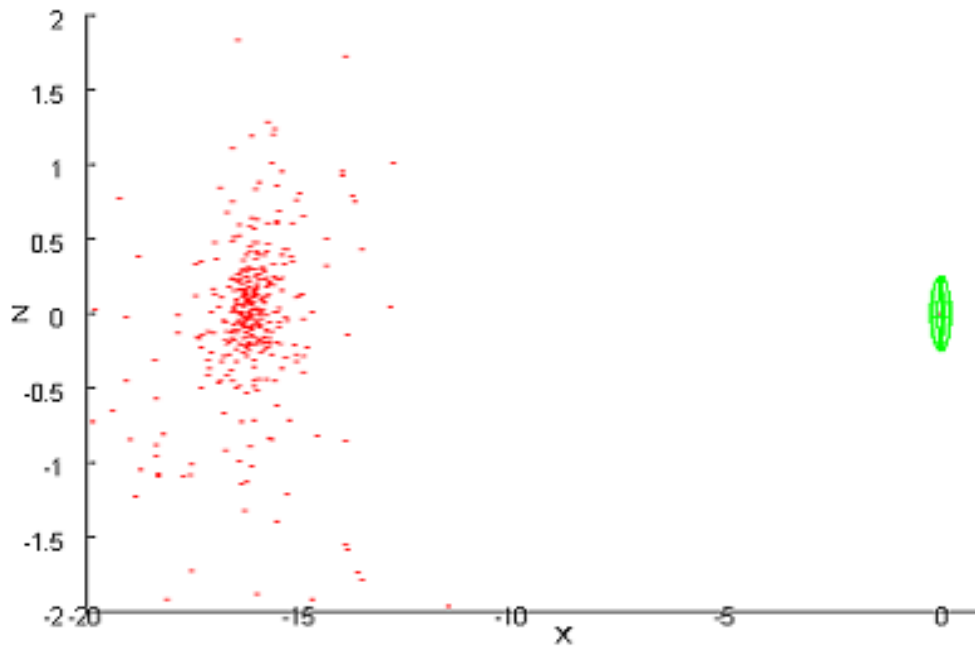


図 5.2.1.15 X-Z 座標

潮汐力によって図 5.2.1.10 のように形を歪められるが、破壊はされずに遠ざかっていった。重い星から遠ざかるにつれて図 5.2.1.13 のように歪みは無くなっていく。

これは、速度が速いことで重い星の重力圏から抜けたからだと考えられる。

5.3 まとめ

一方を重い星にした場合の重力の潮汐力効果を確認できた。

初期速度 0 の場合粒子は重い星に吸い込まれていくが、速度を変更すると潮汐力により破壊された後粒子が星の周りを回り続ける。

また、速度を十分に大きくすると、初めは重い星の潮汐力を受けて歪められるが、速度が速いために重い星に吸い寄せられることなく重力圏から抜け出して遠ざかっていく。

6 擬ニュートンポテンシャル

6.1 擬ニュートンポテンシャルとは

擬ニュートンポテンシャルとは [2]、球対称のシュヴァルツシルトブラックホールを模倣するもので、以下の式で表現される。

$$\psi_{PN} = -\frac{GM}{r-a} \quad (6.1.1)$$

ここでの a は、シュヴァルツシルト半径で、

$$a = \frac{2GM}{c^2} \quad (6.1.2)$$

で表せる。 G は万有引力定数、 c は光速。

擬ニュートンは球対称なシュヴァルツシルト時空をかなり良く模倣できる。ただし、シュヴァルツシルト半径に近づくと精度が悪くなってしまう。

今回のコードでは粒子がシュヴァルツシルト半径内に入った場合、ブラックホールに吸い込まれたものとして以後計算しないようにしている。そのため、他の粒子に対する影響は抑えられている。

6.2 擬ニュートンポテンシャルとニュートン力学の比較

ここでは擬ニュートンポテンシャルの場合とニュートン力学の場合で重い星に吸い込まれる粒子の数と吸い込まれる早さの違いを調べて比較を行った。

粒子数 $N = 400$ 、比熱比 $\gamma = \frac{4}{3}$ 、初期時間間隔 $dt = 0.01$ 、一点の重い星と粒子が集まった軽い星との重さの比は 100:1

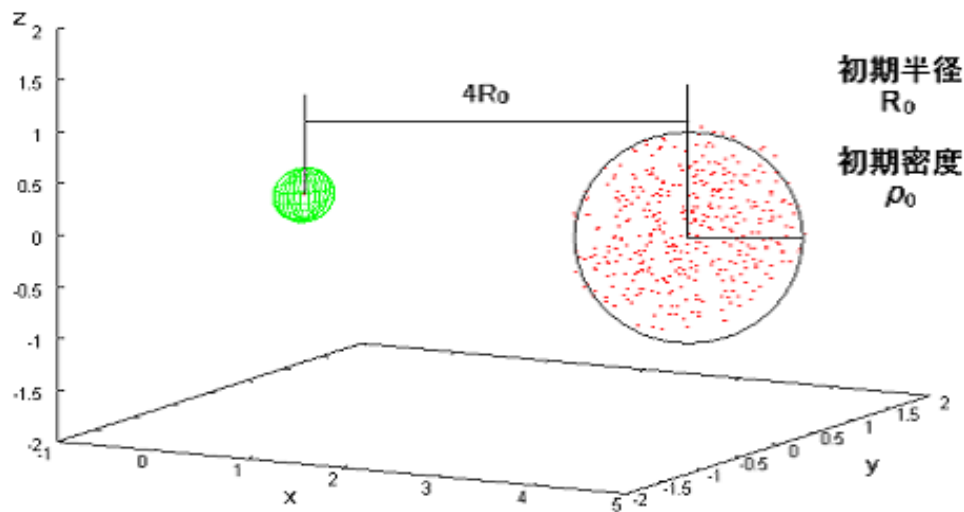


図 6.2.1 シミュレーションの初期状態

まず、各成分とも速度0としてシミュレーションを行った。

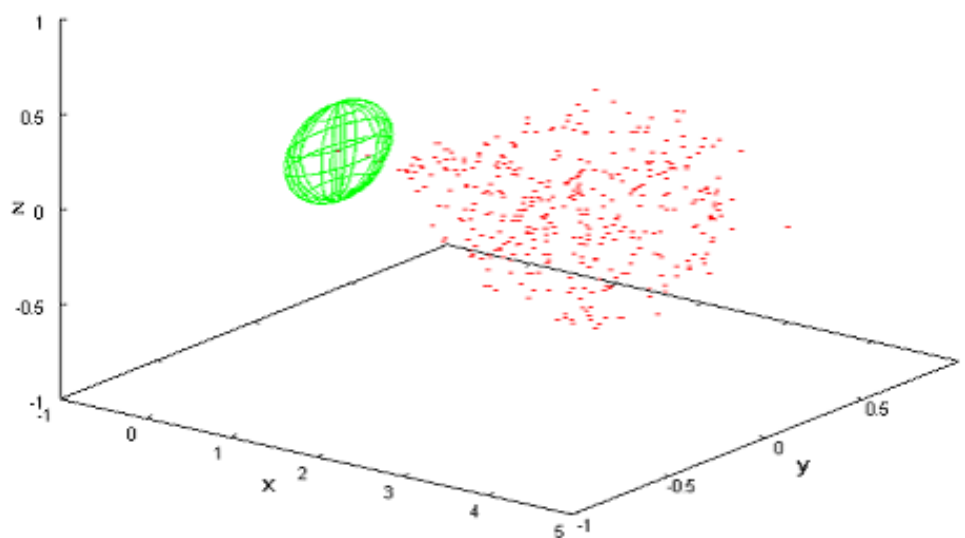


図 6.2.2 ブラックホールを模した重い星に吸い込まれる

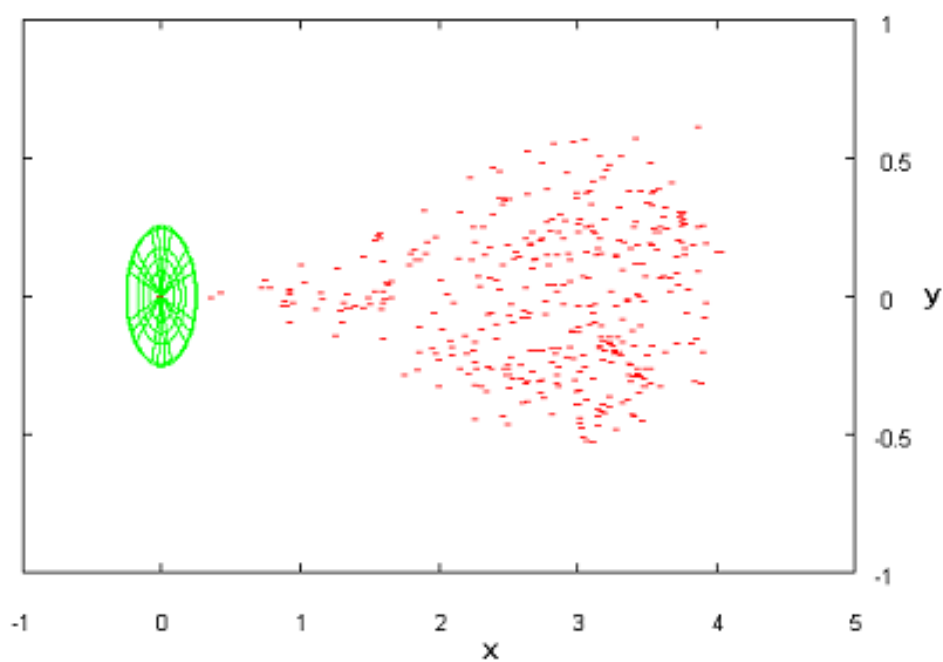


図 6.2.3 X-Y 座標

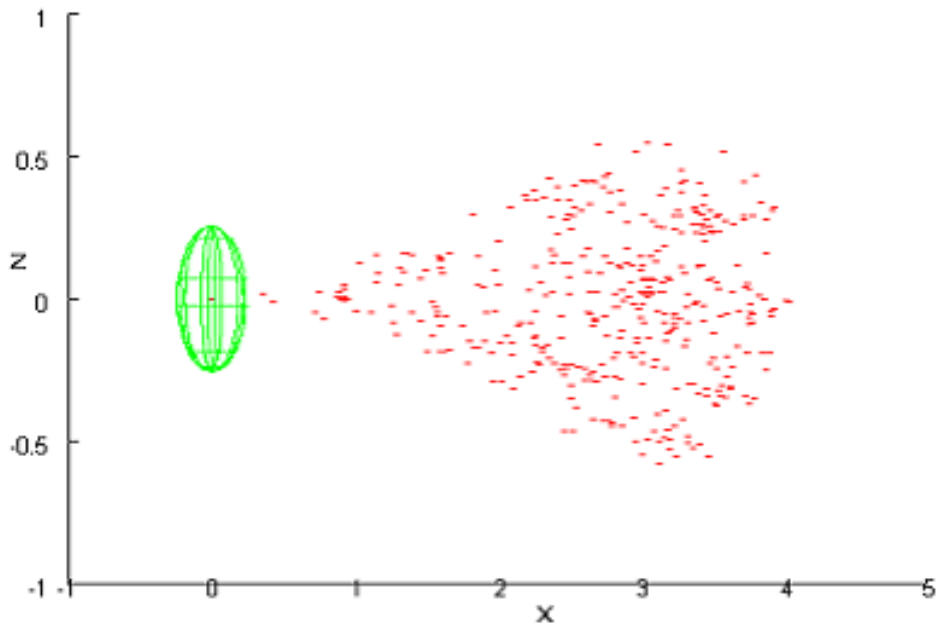


図 6.2.4 X-Z 座標

以上のように潮汐力効果は確認できたが、ニュートン力学のときに同じ初期条件でシミュレーションを行った図 5.2.1、図 5.2.2 との違いは確認しづらい。そこで重い星に引き寄せられる粒子の推移を見る。

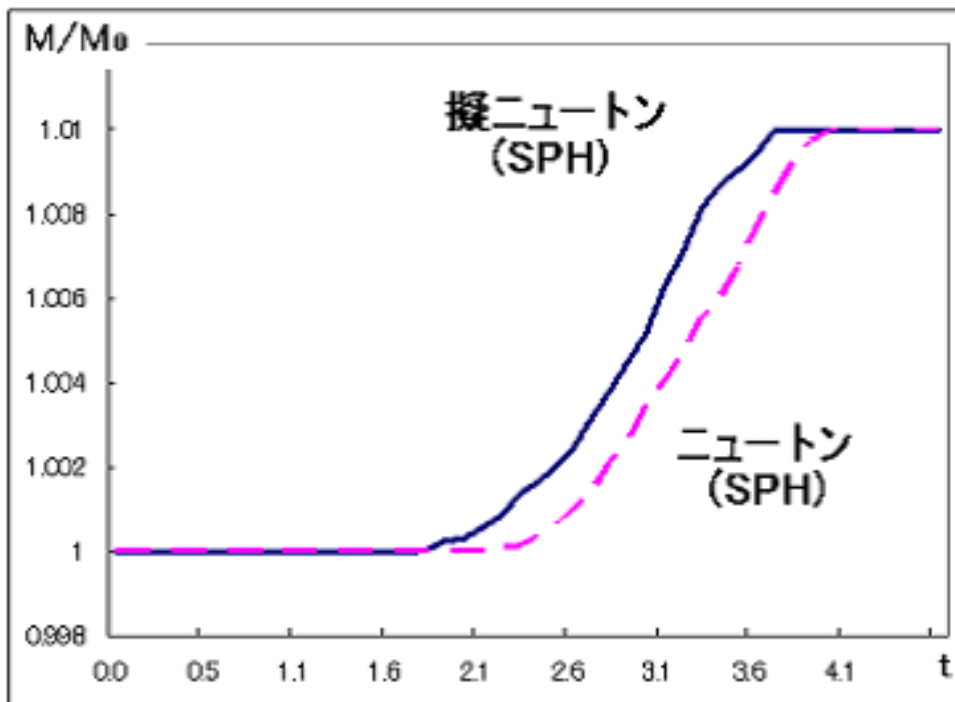


図 6.2.5 擬ニュートンとニュートンの比較

図 6.2.5 は粒子を捕らえた重い星の質量 M の時間変化を表す。ブラックホールを模した擬ニュートンのほうが引き付ける力が強いので、より早くすべての粒子を引きつけている。

6.3 シミュレーション結果

初期速度を変更してシミュレーションを行った。

初期速度 x 成分 : 0 y 成分 : 3 z 成分 : 0

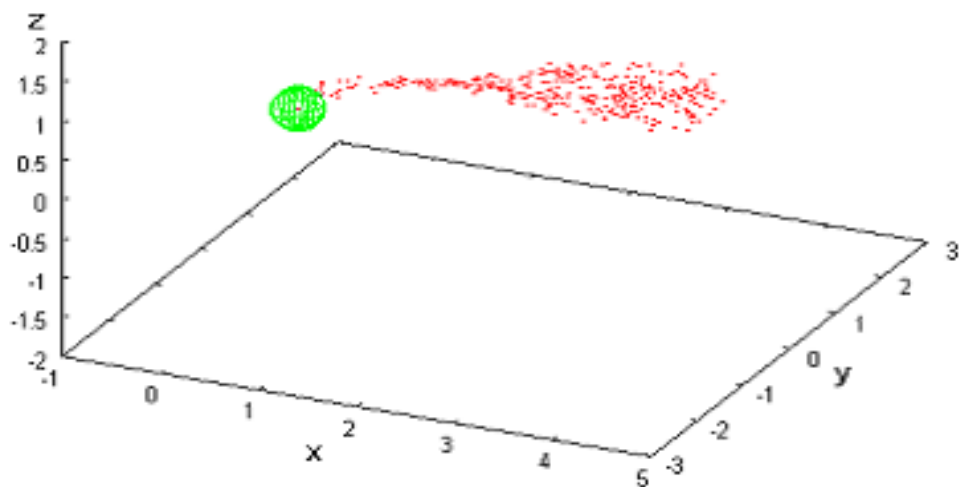


図 6.3.1 潮汐力で歪められながら吸い込まれていく

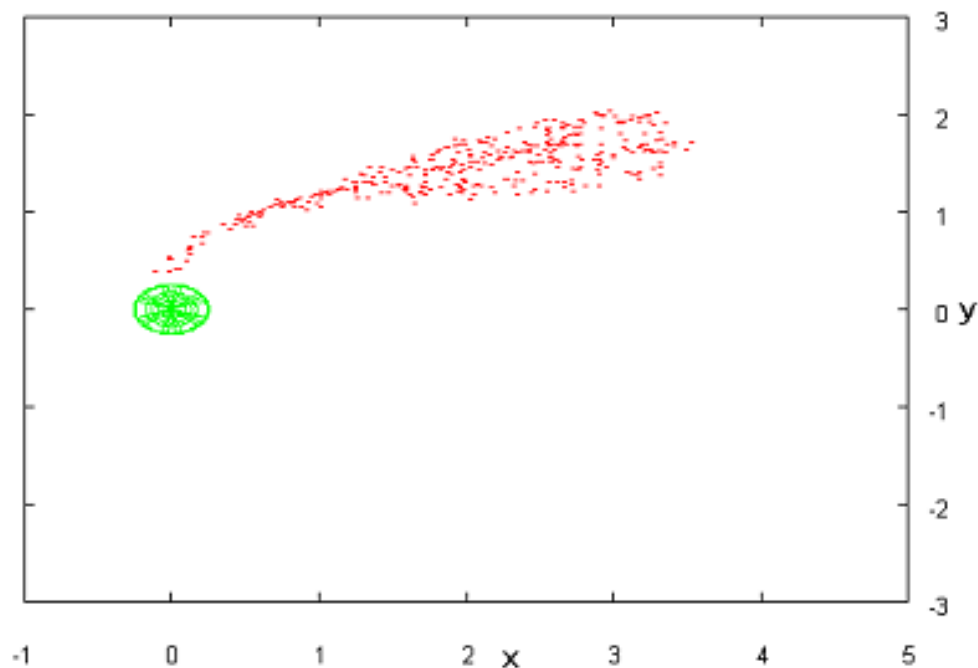


図 6.3.2 X-Y 座標

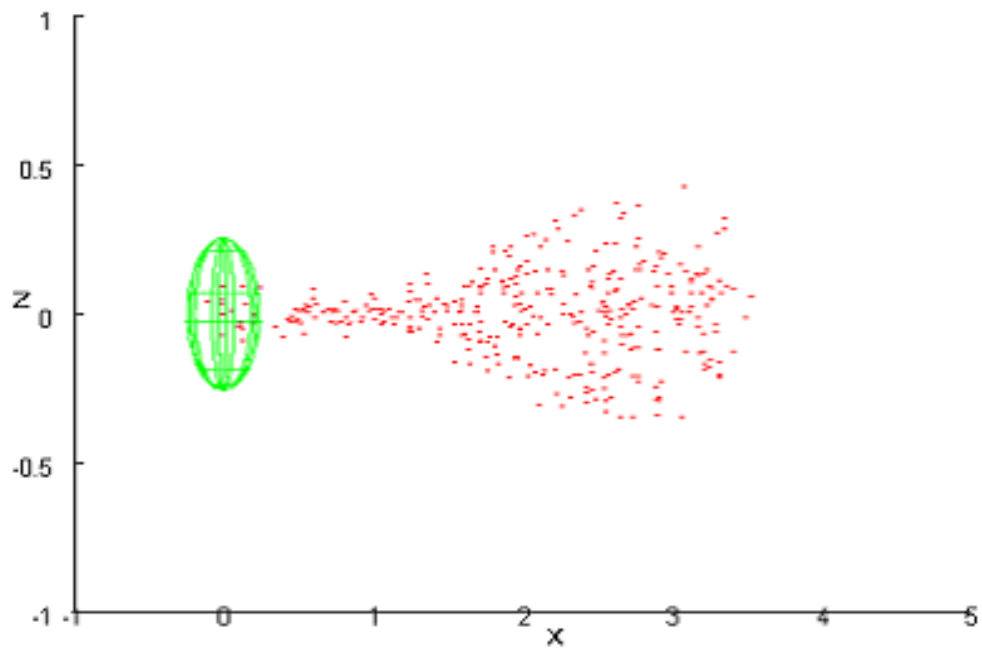


図 6.3.3 X-Z 座標

図 6.3.1 のように歪められながら全粒子が重い星に吸い込まれていく。
 ニュートンの場合、この条件の時にはすでに粒子が星の周りを回る動きをしていた。このことから、ブラックホールを模した擬ニュートンの方がひきつける力が強いことがわかる。

初期速度 x 成分 : 0 y 成分 : 6 z 成分 : 0

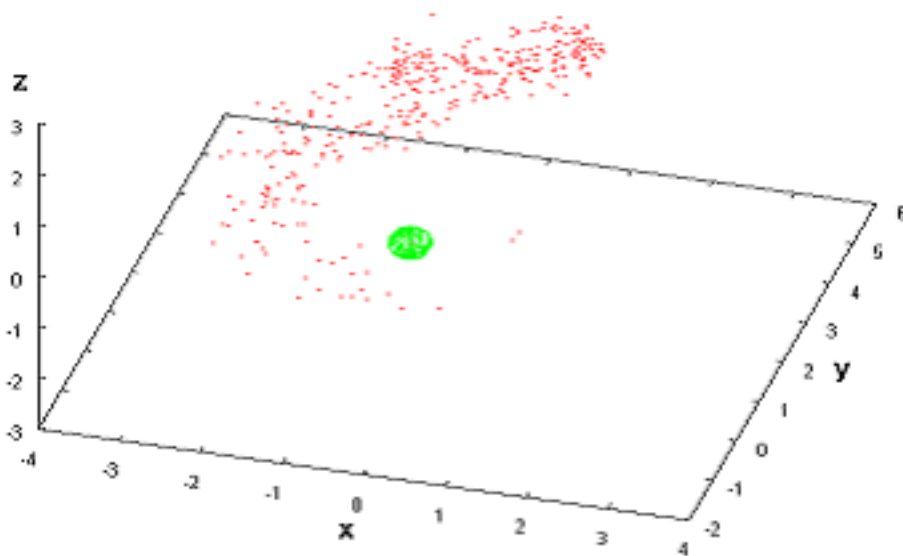


図 6.3.4 潮汐力により破壊される

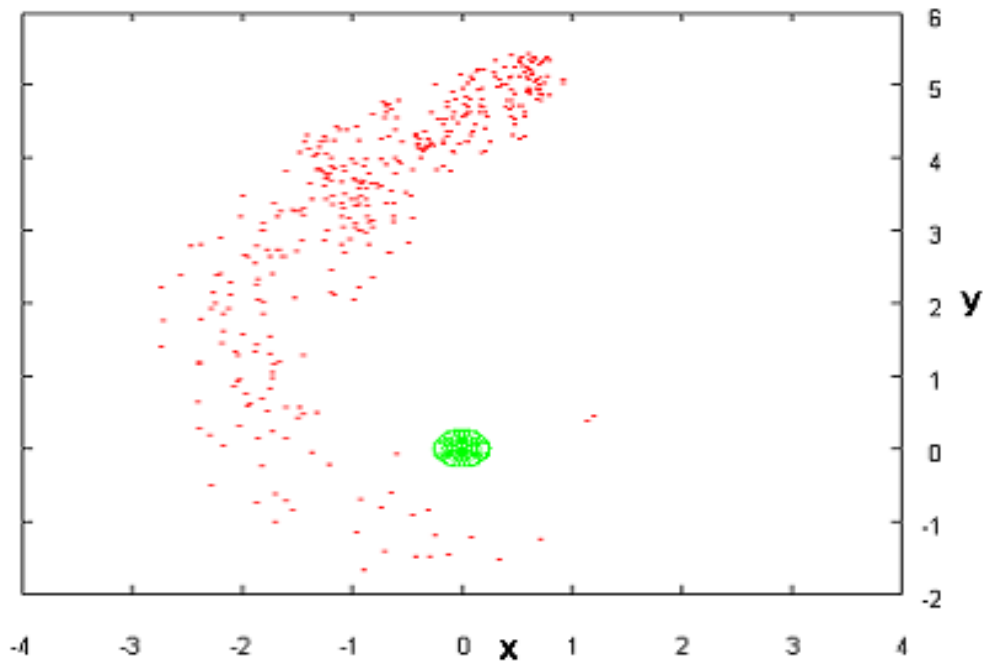


図 6.3.5 X-Y 座標

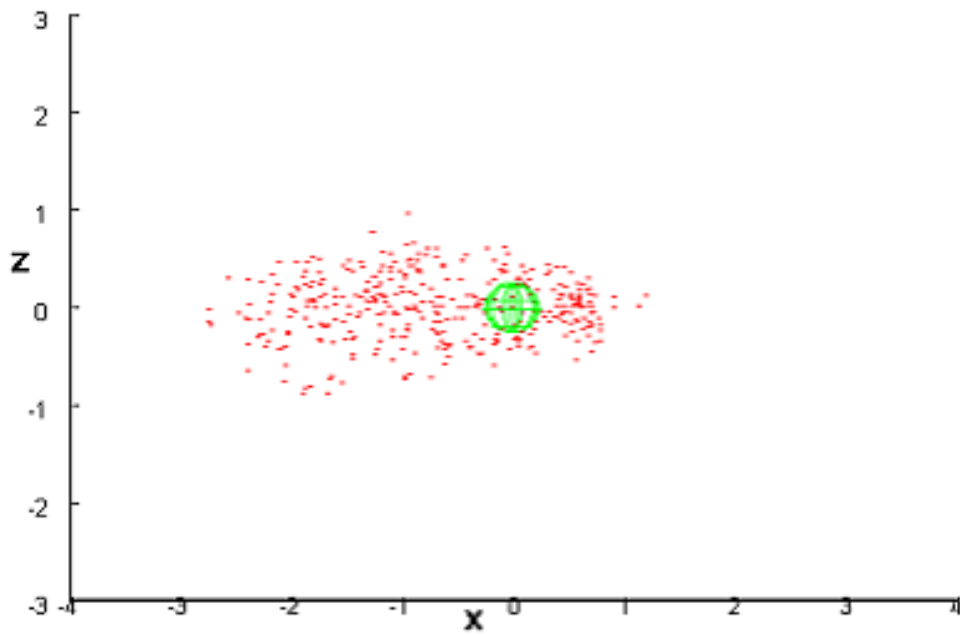


図 6.3.6 X-Z 座標

重い星の潮汐力により破壊された後、粒子は星の周囲を回り始めた。

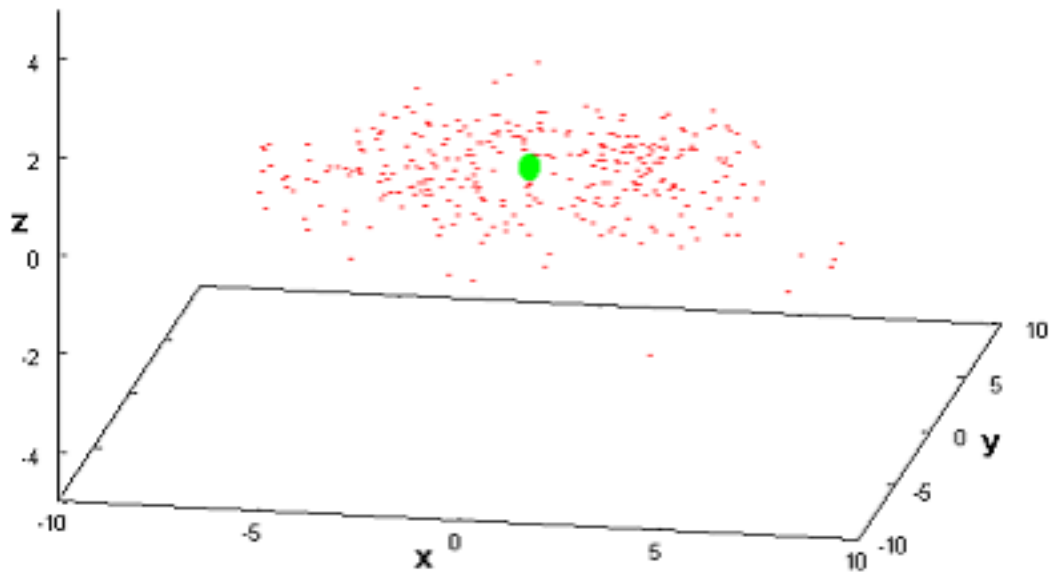


図 6.3.7 図 6.3.4 の $40t_{ff}$ 後

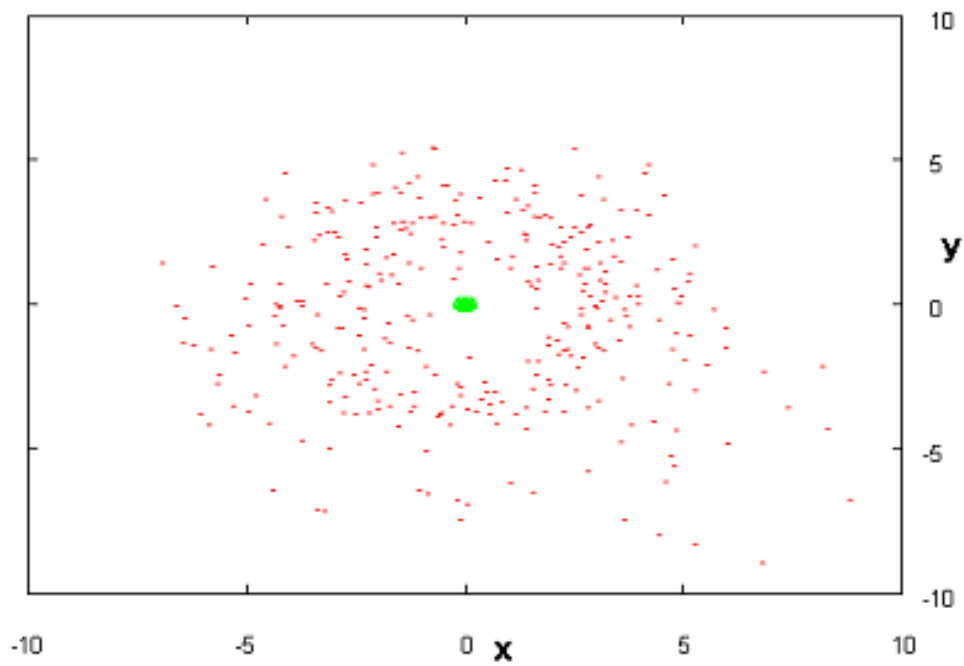


図 6.3.8 X-Y 座標

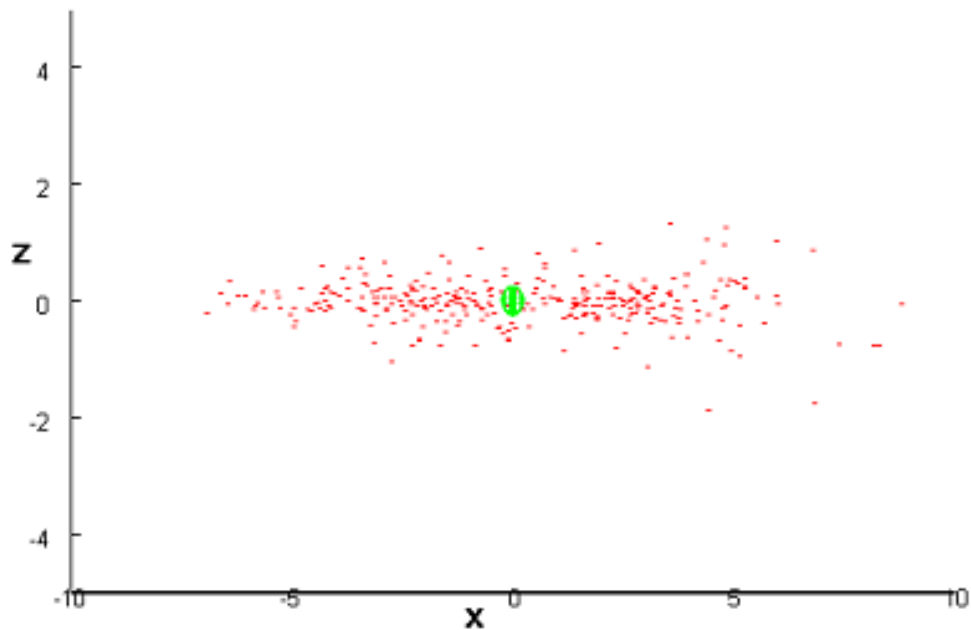


図 6.3.9 X-Z 座標

図 5.2.1.4 のときと同様に中心星の周りを粒子が回転してリング状の粒子群が形成された。しかし、図 5.2.1.4 の場合は楕円状になっていたが今回は円状になっている。これは擬ニュートンの方が引きつける力が強いためだと考えられる。

6.4 まとめ

擬ニュートンポテンシャルを用いた場合のブラックホール的な振る舞いと、それによる潮汐力効果を確認できた。

同じ初期条件のニュートン力学の場合と比較して擬ニュートンポテンシャルのほうが重い星からの力が大きくなることから、擬ニュートンはブラックホールの挙動を模しているといえる。しかし、シュヴァルツシルト半径付近では精度が悪くなるので厳密なブラックホールを解析する場合はシュヴァルツシルトの解を解く必要がある。

7 まとめ

SPH 法の場合圧力勾配が働き、重力に拮抗する斥力が働いてつりあうので粒子が一定体積でまとまる可能性がある。つまり、星が形成されるモデルと考えられる。一方、単純な N 体コードの場合はそれが無いので粒子間で近接後放物運動により広がっていく。このことから、圧力を考える星の形成などの問題の場合 SPH 法が適しているといえる。一方で、銀河系全体など圧力を用いない問題の場合は単純な多体のほうが適している。

一方の星を重くした場合、働く重力に擬ニュートンポテンシャルを用いた場合の潮汐力効果を確認できた。また、擬ニュートンポテンシャルのブラックホールを模した挙動も確認できた。6.1 項で述べたように擬ニュートンポテンシャルには精度の問題がある。シュヴァルツシルト半径周辺での厳密な動きを解析するような場合には利用できないが、今回のシミュレーションのように厳密なブラックホールではなく、ブラックホール的な挙動を確認する場合には十分利用できると考えられる。

参考文献

- [1] 矢部 孝, 観山 正見, 椋島 成治, パソコンによるシミュレーション物理, 朝倉書店 (1992)
- [2] 福江 純, らくらく相対論入門 その 1 -擬ニュートンポテンシャルの特徴-, 天文月報 第 98 巻 第 2 号, p75-82, 日本天文学会 (2005)