

# 多数の泡の成長と合体

大阪工業大学 情報科学部 情報システム学科  
学生番号 B10-006  
氏名 井原 貴幸

2014年01月28日

## 目次

<b>1</b>	<b>序論</b>	<b>3</b>
1.1	背景	3
1.2	本研究の目的	3
1.3	論文の構成	3
<b>2</b>	<b>モデル1:ポロノイ図による泡の表現</b>	<b>4</b>
2.1	泡の構造	4
2.1.1	ドライフォーム	4
2.1.2	ウェットフォーム	4
2.2	ポロノイ図モデル	5
2.2.1	ポロノイ図	5
2.2.2	シミュレーション結果	5
2.2.3	モデル考察	6
<b>3</b>	<b>モデル2:気圧差変化を一定とする泡の膨張・収縮</b>	<b>7</b>
3.1	モデル概要	7
3.2	シミュレーション結果	8
3.3	モデル考察	8
<b>4</b>	<b>モデル3:泡の膨張収縮に運動方程式を適用</b>	<b>10</b>
4.1	圧力の押し合いのみのモデル	10
4.1.1	前進 Euler 法	10
4.1.2	モデル概要	10
4.1.3	シミュレーション結果	11
4.1.4	モデル考察	12
4.2	速度による抵抗を含むモデル	13
4.2.1	モデル概要	13
4.2.2	シミュレーション結果1	13
4.2.3	シミュレーション結果2	14
4.2.4	モデル考察	14
<b>5</b>	<b>モデル4:泡の収縮にポロノイ点を利用した泡どうしの接合</b>	<b>16</b>
5.1	モデル概要	16
5.2	ポロノイ点	17
5.3	シミュレーション結果	19
5.4	四角いシャボン玉のシミュレーションとその結果	20
5.4.1	四角いシャボン玉とは	20
5.4.2	条件の決定と結果	20
5.5	モデル考察	22
<b>6</b>	<b>モデル5:泡間の圧力差による境界の変化を考慮したモデル</b>	<b>23</b>
6.1	モデル概要	23
6.2	二分法	25
6.3	シミュレーション結果	25
6.4	モデル考察	27

7	まとめ	28
8	参考文献	29

# 1 序論

## 1.1 背景

石鹸の泡やビールの泡, シャボン玉などを初めとして, 我々は日常の中でよく「泡」を目にする. しかし, 一般に泡がどのように成し, どのように変化するかは, 「泡」の知名度に比べ一般的ではない. また泡がどのように変化, 形成, 分裂そして崩壊を成すかを知るすべも「泡」の知名度に比べ一般的ではない.

泡がどのような形の変化をするのか, そんなことがすぐに分かるようなものはないだろうか. あるならば, 泡の成り立ちは, より広く一般的なものとなる. 石鹸の泡やビールの泡が簡単に再現できるようなものはないだろうか. あるならば, 「よく泡立つ条件」や「逆にあわ立たない条件」などを調べることができる.



図 1: グラスに注がれたビール 引用 [1]

## 1.2 本研究の目的

泡の知名度に比べ, 泡を知る教材や泡を簡単にシミュレーションできるツールがない. そこで本研究では, さまざまな泡のモデルを作成し, よい泡のモデルを求めることを目的としている. またそれを用いて, 石鹸やビールの泡などを初めとした泡のシミュレータを作成も行う.

## 1.3 論文の構成

まず第 2 章では, 論文を元に泡の構造やモデルについて調べた内容を紹介する. また, 論文のモデルを簡単に作成したものの紹介も行う. 次に第 3 章, 4 章では, 自ら決定した条件からさまざまなモデルを作成しその結果と考察をあげていく. そして, 第 5 章では, 泡がくっついた場合にも対応できるように条件設定したモデルを用い, 現実世界の泡のシミュレーションを行う.

## 2 モデル1:ポロノイ図による泡の表現

ここでは、引用文献 [2] の内容を元に泡の二種類の構造とそのモデルを簡単に作成したものを紹介する。

### 2.1 泡の構造

泡の構造は、液体部分と気体部分によって構成されている。またそれらは、大きく分け以下の二種類に分けられており、液層<sup>1</sup>の量の違いによって分類されている。[2]

#### 2.1.1 ドライフォーム

ドライフォームは、液層 0.1 % 未満の泡の構造を指す。図 2 をみるとまず白い気体部分と黒い液層部分がある。また、ドライフォームは、その多くが白色の気体部分で構成されており、液層部分は殆ど存在しないことが分かる。このように、液層部分をほとんど持たない構造を持つ泡をドライフォームと言う。

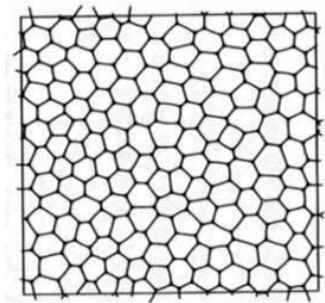


図 2: ドライフォームの構造 [2] より引用

#### 2.1.2 ウェットフォーム

一方、図 3 のような構造の泡をウェットフォームと言う。ドライフォームは図 2 のドライフォームとは大きく異なり、黒い斑点のような部分を多く有している。このように液層が 0.1 % 以上の泡の構造をウェットフォームと言う。

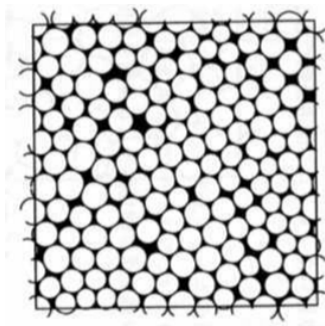


図 3: ウェットフォームの構造 [2] より引用

<sup>1</sup>液体状態の相のこと

## 2.2 ボロノイ図モデル

泡のシミュレーションにおいて、『ドライフォームは、一般にボロノイ図に近い構造をしている』ことが一般に知られている。また、ウェットフォームは、『泡の気体部分の圧力や液層の圧力などを考慮しなければならないために非常に複雑』であることも知られている（引用文献 [2]）そこで、まず簡単なドライフォームのシミュレーションについて取り扱うこととした。

### 2.2.1 ボロノイ図

ボロノイ図は、ある距離空間上の任意の位置に配置された複数個の点（母点）に対して、同一距離空間上の他の点がどの母点に近いかによって領域分けされた図4 のことである。任意位置の座標を  $(x, y)$  とし、複数個の母点内  $i$  番目の座標を  $(x_i, y_i)$  , その距離を  $r_i$  としたとき、その任意点は、式 (1) を満たす  $i$  番目の母点の領域内である。

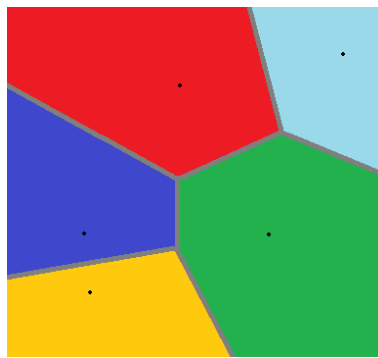


図 4: ボロノイ図

$$\begin{cases} \min r_i \\ r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \end{cases} \quad (1)$$

### 2.2.2 シミュレーション結果

ボロノイ図の定義を参考に、プログラムを作成しシミュレーションを行った。その際シミュレーションの条件として以下のとおりである。

- 任意の個数の母点を任意の場所にランダム決定する。
- 但し、母点どうしの位置はまったく同じものにならない。
- 母点は、任意のタイミングで追加できる。
- 母点の  $x, y$  座標はそれぞれ、式 (2) の条件を満たす。

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1000 \\ 0 \leq y \leq 1000 \end{cases} \quad (2)$$

以上の条件でシミュレーションを複数回行った結果のうちの一部の端末画面が図5,6である。このそれらの図の赤い線部分を液層部分, 白い空白部分気体部分とする。すると気泡と呼ばれる, 気体が液体で囲まれた状態の領域が複数個みられることがわかる。このことから, ドライフォームに見られる簡易的な泡構造をシミュレータで作成することができた。

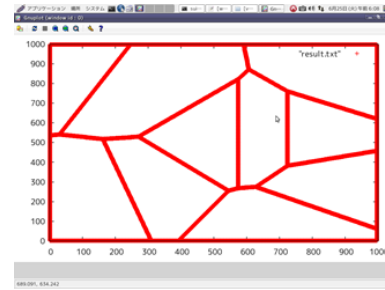
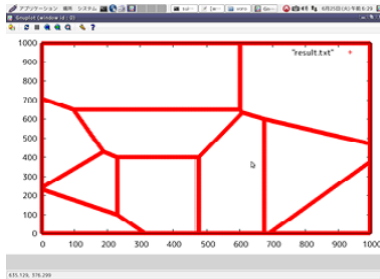


図 5: シミュレータによる母点10個置いた場合のボロノイ図の線画

図 6: 図5とは別の位置に同数の母点を置いた場合

### 2.2.3 モデル考察

シミュレータの結果より以下のことが言える。

- 実際の泡と比べると角ばっており泡特有の曲線が存在しない。
- ウェットフォームは, 表すことはできない。
- 気泡を母点の個数分だけ作成することができる。
- 7の赤破線部のように, ボロノイ図は泡の大まかな境界を分割することができる。

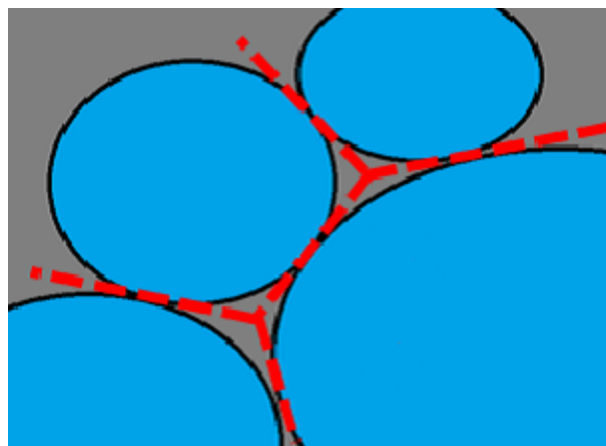


図 7: 泡と境界線

以上より本モデル, 本手法では, より現実的な泡の再現は難しいと考えた。またこのモデルをより理想のモデルにするためには, 複雑な条件を加えなければならない。ボロノイ図を用いたモデルでは, より簡単に理想のモデル作成は難しいと結論づけた。

### 3 モデル2:気圧差変化を一定とする泡の膨張・収縮

この章では, 前章での考察を踏まえて, 新しい簡単なシャボン玉のシミュレーションを考える. シャボン玉の半径が, 大気圧とシャボン玉内部の気圧で決まると考えモデルを作成しシミュレーションした.

#### 3.1 モデル概要

本章では以下の条件を持つモデルについて考える.

- 立体空間上におけるシャボン玉の状態を考える.
- シャボン玉は, 常に球状である.
- シャボン玉の半径  $r$  は, 大気圧  $P_0$  と内部の圧力  $P$  の力の大きさのつりあいのみで決定する. (図8)
- シャボン玉は, 内部の圧力  $P$  と体積  $V$  の積は, 大気圧  $P_0$  と  $V$  の積とつりあう式 (3).<sup>2</sup>
- シャボン玉の圧力は, 単位微小時間  $\Delta t$  あたり, 微小量  $\Delta P$  だけ変化する. 式 (4)
- 圧力変化による温度変化はないもの<sup>3</sup>とする.
- シャボン玉の液層までの半径を  $r$ , 液層を含めた半径を  $n$  としたとき,  $n - r < k$  ( $k = \text{定数}$ ) を満たせば, シャボン玉は, 破裂するとする.
- シャボン玉が破裂した際, 微小量  $\Delta P_0$  だけ大気圧が変化するとする.

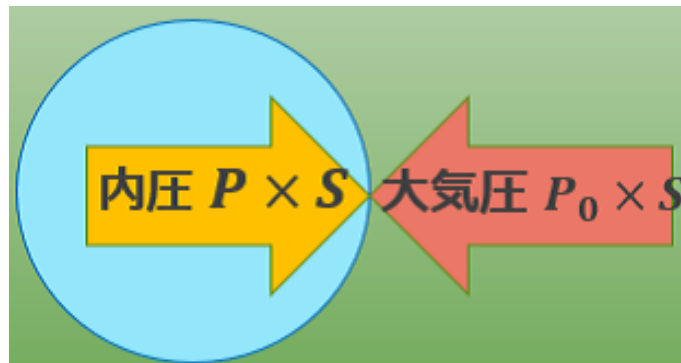


図 8: 圧力によるシャボン玉の膜の押し合い

$$P_0 V = PV (P_0 = \text{大気圧}, P = \text{内部の圧力}, V = \text{シャボン玉の体積}) \quad (3)$$

$$\begin{cases} P_{n+1} = P_n + \Delta P (P \leq P_0) \\ P_{n+1} = P_n - \Delta P (P > P_0) \end{cases} \quad (4)$$

この条件の上でシャボン玉の半径  $r$  は, 以下のように決定される. まず, 大気圧  $P_0$  と各々のシャボン玉において圧力の大小を比べる. その際大気圧の方が大きい場合シャボン玉の圧力を  $\Delta P$  だけ増加させる (大気圧の方が小さい場合シャボン玉の圧力を  $\Delta P$  だけ減少させる.) 次に, 圧力の変化が生じたため温度

<sup>2</sup>シャボン玉が圧力変化した際に面積ではなく体積計算を用いてシャボン玉の半径を求める.

<sup>3</sup>ボイルの法則  $PV = \text{Constant}$  が成り立つ.



一定の条件からボイルシャルルの法則式 (5) を適用し体積を求める. 求めた体積から新しいシャボン玉の半径を求める.

$$PV = Constant(P = \text{圧力}, V = \text{体積}, Constant = \text{定数}) \quad (5)$$

また, 半径の変化から液体部分の厚さを求めあらかじめ設定した定数をくらべその値より小さくなった場合, その泡を消去し大気圧を  $\Delta P$  だけ増加させる. 以上の工程を 1 ステップとし, シャボン玉ひとつひとつに同時に行う. またその際  $\Delta t$  の時間がかかるものとする. これを, 各々のシャボン玉の半径がある値に収束するまで行うのが本モデルである.

### 3.2 シミュレーション結果

前節 3.1 のモデルを用いて以下の条件の下シミュレーションを行った.

- シャボン玉の個数 1
- 大気圧  $P_0 = 1$
- シャボン玉の圧力  $P = 1.1$
- 半径  $r = 30$
- 微小時間  $dt = 0.1$
- 1000 ステップ

以上のような初期条件で泡の圧力の変化と半径の変化をシミュレーションした結果, 次の図 9, 及び図 10 のような図を得られた. また, その際のシミュレーション画面が図 11 である.

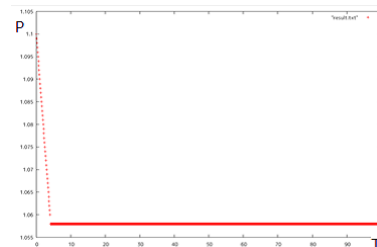
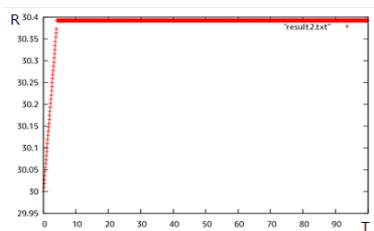


図 9: 時間  $T$  におけるシャボン玉の半径  $R$  の変化と平衡状態 1

図 10: 時間  $T$  におけるシャボン玉の圧力  $P$  の変化と平衡状態 1

### 3.3 モデル考察

3.2 より以下のことが言える.

- シャボン玉の概形の変化を視覚的に捉えることができる.
- シャボン玉の圧力と半径がどの値で落ち着き大気圧とつりあうかが分かる.
- シャボン玉同士が触れ合った際の概形変化が考慮されていない.

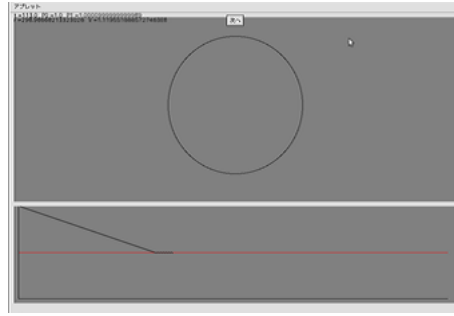


図 11: 気圧差シャボン玉モデルのシミュレーション画面. 画面上部の円は現在のシャボン玉の大きさ, 画面下部は圧力の変化のグラフを表している. (※赤い直線は, 大気圧の値)

- シャボン玉の圧力  $P$  の変化は, ある一定の微小な変化量  $\Delta P$  に依存しているため単調増加または単調減少になる.
- 大気圧より大きい圧力  $P$  を持った二つのシャボン玉の圧力を  $P_1, P_2$  としたとき,  $P_1 \leq P_2$  であっても時間毎の変化の量は一定である.

ポロノイモデルと違ってより現実のものに近いモデルを作成することができた. また, シャボン玉ひとつひとつの概形が時間で変化したり, 破裂したりするといった, ポロノイ図では出来なかった要素を加えることができた. しかし, 一方でシャボン玉の圧力変化を一定としてしまったため, 単調増減するという課題ができた.

## 4 モデル3:泡の膨張収縮に運動方程式を適用

この章では, 前章の気圧差モデルの半径変化を一定量ではなく, 速度によって変化するモデルを考える. 大気圧と圧力の押し合いの力  $F$  によって, 質量  $m$  のシャボン玉の半径が加速度  $a$  で変化すると考え運動方程式, 式 (6) を適用した.

$$F = ma (F = \text{力}, m = \text{質量}, a = \text{加速度}) \quad (6)$$

### 4.1 圧力の押し合いのみのモデル

#### 4.1.1 前進 Euler 法

微分方程式 (7) と初期値  $(x_0, y_0)$  が与えられたとき,  $x$  方向の増加を間隔  $\Delta x$  ごとに考えるとき, 点  $(x_n, y_n)$  から次の点  $(x_{n+1} = x_n + \Delta x)$  での関数値  $y_{n+1}$  を求める計算が式 (8) と考えられる. 引用 [5]

$$S = f(x, y) \quad (7)$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y f(x_n, y_n) \quad (8)$$

#### 4.1.2 モデル概要

本モデルは以下の条件に従う

- シャボン玉の半径は, 大気圧と内部の圧力の差によって定まり, ある速度を持って変化する.
- シャボン玉の半径の変化は微分方程式によって定まる.
- シャボン玉は常に球状である.
- 気温変化はないものとする.
- 前進オイラー法で微分方程式を解く.
- シャボン玉の液層までの半径を  $r$ , 液層を含めた半径を  $n$  としたとき,  $n - r < k$  ( $k = \text{定数}$ ) を満たせば, シャボン玉は, 破裂するとする.
- シャボン玉が破裂した際, 微小量  $dP_0$  だけ大気圧が変化するとする.

以上の条件を踏まえシャボン玉の半径を定める微分方程式を求める. まず, 運動方程式 (6) の左辺に気体の圧力の式 (9) を代入し  $a$  について解くと以下のようなになる.

$$F = PS - P_0S (F = \text{力}, P_1 = \text{気体の圧力}, P_0 = \text{大気圧}, S = \text{接触面積}) \quad (9)$$

式 (9) を  $a$  について解くと以下のように書き換えられる式 (10). この式から, シャボン玉の半径増加の加速度は, 圧力  $P_1$  と大気圧  $P_0$  の差で増減の方向が定まることが分かる.

$$a = \frac{(P_1 - P_0)S}{m} (a \text{ はシャボン玉が中心から外側に正}) \quad (10)$$

ここで,  $P_1$  に注目すると, 温度一定の条件からボイルの法則 (11) よりシャボン玉の初期の圧力を  $\bar{P}$ , 初期の体積を  $\bar{V}$ , 現在の体積を  $V$  とすると以下の等式 (12) がなりたつ.

$$PV = \text{Constant}(P = \text{圧力}, V = \text{体積}) \quad (11)$$

$$P_1V = \bar{P}\bar{V}(P_1 = \text{現在の圧力}, V = \text{現在の体積}, \bar{P} = \text{初期の圧力}, \bar{V} = \text{初期の体積}) \quad (12)$$

そしてこの等式を、 $P_1$  について解き、円の球の体積の式 (13) さらに現在の半径  $r$  及び、初期の半径  $\bar{r}$  を用いて表すと式 (14) になる。

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}(V = \text{体積}, \pi = \text{円周率}) \quad (13)$$

$$P_1 = \frac{r_0^3 \bar{P}}{r^3} \quad (14)$$

この式 (14) を式 (12) に代入し、 $t$  で微分したものがこのモデルのシャボン玉の半径とその増減速度を決定する微分方程式 (15) である。

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{4\pi r^2(\bar{r}^3 \bar{P} - P_0)}{M} \\ (r = \text{シャボン玉の半径}, t = \text{時間}, v = \text{シャボン玉の半径の増減速度}, \bar{P} = \text{シャボン玉の圧力の初期値}, \\ \bar{r} = \text{半径の初期値}, P_0 = \text{大気圧}, M = \text{シャボン玉の質量}) \end{cases} \quad (15)$$

#### 4.1.3 シミュレーション結果

前節 §4.1.2 の条件のモデルと本モデルの比較をするために、以下の条件（前節 §3.2 と同じ）の下シミュレーションを行った。

- シャボン玉の個数 1
- 大気圧  $P_0 = 1$
- シャボン玉の圧力  $P = 1.1$
- 半径  $r = 30$
- 初速度  $v_0 = 0$
- 微小時間  $dt = 0.1$
- 1000 ステップ

泡の圧力の変化と半径の変化をシミュレーションした結果、次の図 12, 及び図 13 のような結果を得ることができた。

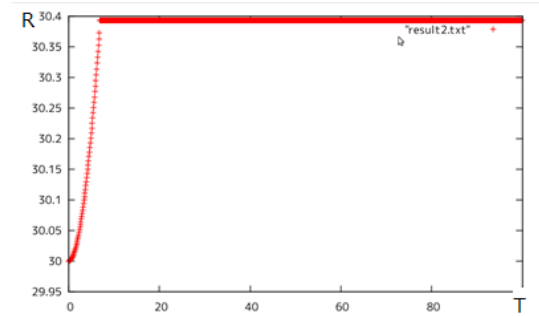
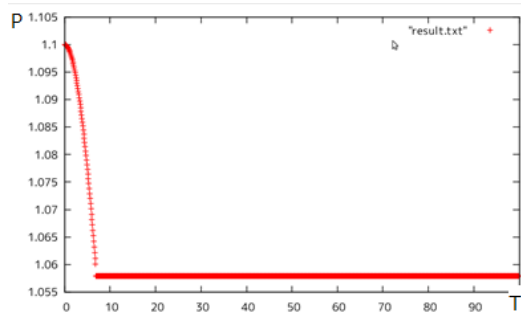


図 12: 時間  $T$  におけるシャボン玉の圧力  $P$  の変化 図 13: 時間  $T$  におけるシャボン玉の半径  $r$  の変化と  
と平衡状態 2 平衡状態 2

#### 4.1.4 モデル考察

§4.1.3 より以下のことが言える.

- 利点
  - シャボン玉の半径, 圧力は, 速度によって変化するため単調増加または単調現象でなくなった.
  - シャボン玉の圧力差によって膨らむスピードに変化が出てきた.
- 欠点
  - シャボン玉同士が触れ合った際の概形変化が考慮されていない.
  - 精度が悪いため, シャボン玉は一度速度を持つと減速せずに安定する平衡値まで達したのち変化を停止する.

以上から, より現実の挙動に近いシャボン玉になったといえる. 速度変化により, シャボン玉間の圧力の違いで, 早く膨らむもの, すぐにしぼむものといった, 違いが出てきた. しかし, 一方で精度が悪いため, 平衡値になったとたんに増減が止まってしまう結果となった.

## 4.2 速度による抵抗を含むモデル

ここでは、式 (15) に速度によって受ける力を加えた新たな微分方程式、(式 16) を 2 階の差分法で解いたモデルについてとりあげる。

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{4\pi r^2(\bar{r}^3 \bar{P} - P_0)}{M} - kv \end{cases}$$

( $r$  = シャボン玉の半径,  $t$  = 時間,  $v$  = シャボン玉の半径の増減速度,  $\bar{P}$  = シャボン玉の圧力の初期値,  $\bar{r}$  = 半径の初期値,  $P_0$  = 大気圧,  $M$  = シャボン玉の質量,  $k$  = 定数)

(16)

### 4.2.1 モデル概要

本モデルは §4.1.2 のモデルと条件はほぼ変わらないが、大きく以下の 2 点について変更をしている。

- 微分方程式を 2 階の差分法で解く
- 解く微分方程式に、速度によって受ける力を考慮する。(式 16)
- シャボン玉は内膜 (中心から液体までの半径) と外膜 (中心から液体の外までの半径) を持ち、その差が一定以下になると破裂するものとする。

### 4.2.2 シミュレーション結果 1

前節 4.2.1 の条件のモデルと本モデルの比較をするために、以下の条件 (前節 §4.1.3 と同じ) の下シミュレーションを行った。

- シャボン玉の個数 1
- 大気圧  $P_0 = 1$
- シャボン玉の圧力  $P = 1.2$
- 半径  $r = 30$
- 初速度  $v_0 = 0$
- 微小時間  $dt = 0.1$
- 1500 ステップ

この初期条件で泡の圧力の変化と半径の変化をシミュレーションした結果、次の図 14, 及び図 15 のような結果を得ることができた。

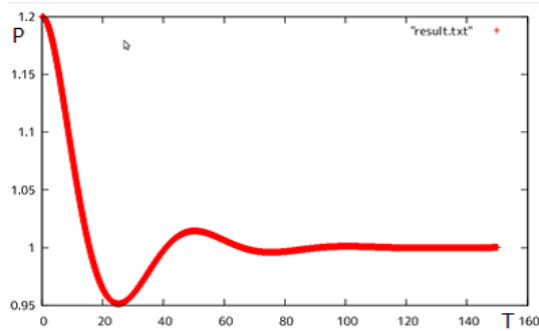


図 14: シャボン玉の圧力変化

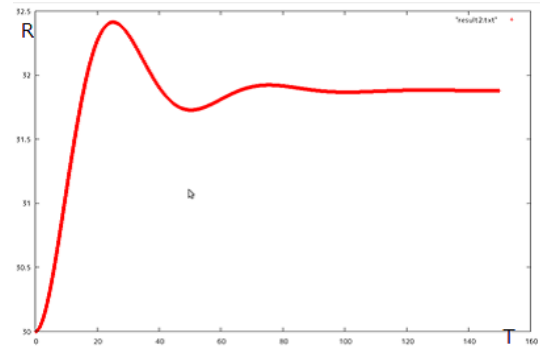


図 15: シャボン玉の半径変化

#### 4.2.3 シミュレーション結果2

前節 §4.2.1 のモデルと破裂を考慮した本モデルにおいて, どのような圧力や半径の違いが生じるか, 以下のようなシミュレーションを行った.

- 破裂する条件を加えた場合
  - シャボン玉の個数 3
  - 大気圧  $P_0 = 1$
  - シャボン玉の圧力  $P_{1\sim3} = 1.0, 1.2, 1.4$
  - 内膜半径  $r_{1\sim3} = 10$
  - 膜の厚さ = 5(一律)
  - 初速度  $v_{1\sim3} = 0$
  - 微小時間  $dt = 0.1$
  - 1500 ステップ
- 破裂する条件を加えない場合
  - シャボン玉の個数 3
  - 大気圧  $P_0 = 1$
  - シャボン玉の圧力  $P_{1\sim3} = 1.0, 1.2, 1.4$
  - 半径  $r_{1\sim3} = 10$
  - 初速度  $v_{1\sim3} = 0$
  - 微小時間  $dt = 0.1$
  - 1500 ステップ

この初期条件で泡の圧力の変化と半径の変化をシミュレーションした結果, 次の図 16, 及び図 17 のような結果を得ることができた.

#### 4.2.4 モデル考察

4.2.2 及び, 4.2.3 より以下のことが言える.

- モデル 4.1.2 の利点を継承している.

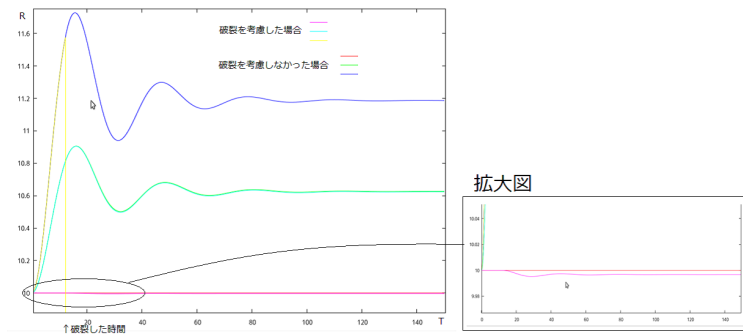


図 16: 破裂の有無の半径変化の違い. 破裂を考慮した場合, 大気圧と同じ圧力を持つ泡の半径が変化をする.

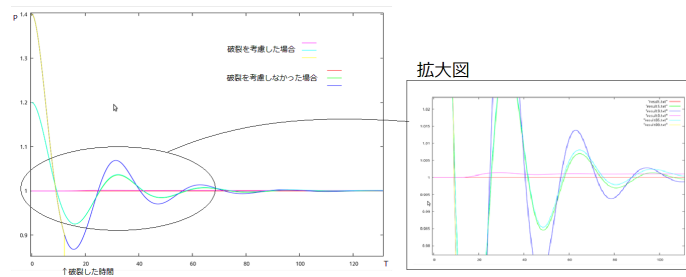


図 17: 破裂の有無の圧力変化の違い. 破裂を考慮した場合, いずれの泡も大きく振動していることが分かる.

- シャボン玉の圧力, 半径の変化がゆるやかに収束する結果が得られた.
- 速度変化をもったことによるシャボン玉の不安定性も再現できている.
- シャボン玉が破裂した際に他のシャボン玉の圧力半径に変化が生じる.
- シャボン玉同士が接したときどのような概形になるかを考慮できていない.
- あるシャボン玉が破裂した場合, 他の安定状態のシャボン玉が, 圧力, 半径変化をするため, 収束までの計算数が増えた.

以上から, さらに現実の挙動に近いシャボン玉になったといえる. より精度の高い方法で微分方程式を解いたため, ゆっくりとした圧力, 半径変化をしている結果を得ることが出来た. しかし, 一方でまだシャボン玉同士が接した場合の概形変化の問題もある.



## 5 モデル4:泡の収縮にポロノイ点を利用した泡どうしの接合

この章では、前章4.2のモデルをベースに、泡同士が衝突した場合の泡の変形を考慮したモデルについて考える。泡が衝突した際の様子を第2章のポロノイ図モデルを元に考える。

### 5.1 モデル概要

本モデルは以下の条件に従う

- 泡が衝突していない場合、圧力変化による半径の変化は §4.2 のモデルに従う。
- 2つの泡のみが衝突している部分は、その泡の概形の交点を結ぶ点を境界とする。
- 3つ以上の泡が衝突した際、3つの泡以上の泡を含む領域を持つ場合ポロノイ図状になるとする。(図21)
- 3つ以上の泡の境界は、式(17)によって定まる。
- 泡同士が衝突しても泡の中心は、その場所を離れない。
- 泡同士がぶつかっていない場合、泡の概形は球状であるものとした。

上記の条件でまず、2つの泡のぶつかりを考える。このとき図18のように泡の交点を基準とする。この交点を結ぶ直線を泡の境界とする。

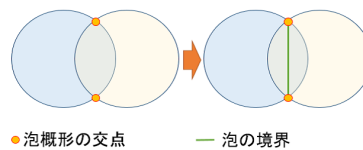


図 18: 2つの泡のぶつかり 1

次に3つの泡のぶつかりを考える。このとき、3つ以上の泡の接合は主に以下の図19のように2パターンに分けられる。

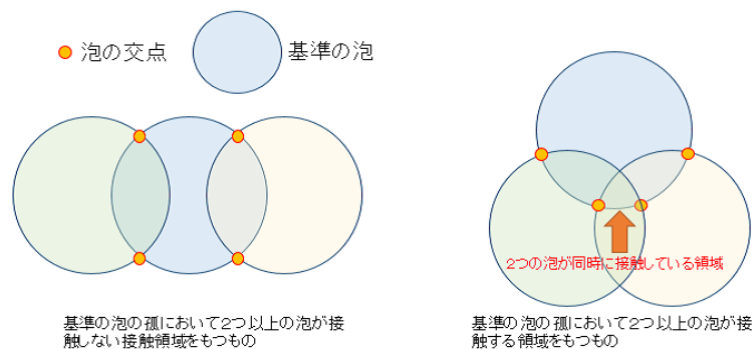


図 19: 2つの泡のぶつかり 2

図19の左のようなものの場合、前文の2つの泡のぶつかりと同様のものと考え、各泡の概形の交点を、それらの境界とするものとした。一方で、右のような2つ以上の泡が同じ領域でぶつかっている場合は、図20と、図21のような手法をとるものとした。

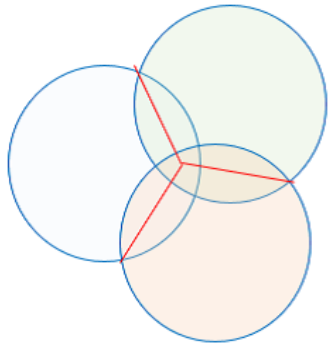


図 20: ポロノイ点を基準とした泡の境界 1

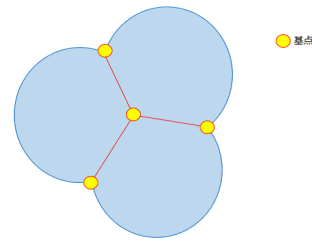


図 21: ポロノイ点を基準とした泡の境界 2

以上の要素をまとめると、各泡の概形は以下の式 (17) に従う。

$$\left\{ \begin{array}{l}
 K1_n = \text{ある } n \text{ 番目母点を持つシャボン玉の交点 1} \\
 K2_n = \text{ある } n \text{ 番目母点を持つシャボン玉の交点 2} \\
 \textit{Pattern1} \text{ 球状 (円)} (K1_n - K2_n = 0) \\
 \textit{Pattern2} \text{ シャボン玉の概形の交点 (円の交点) とする直線 } (K1_n - K2_n = 1) \\
 \textit{Pattern3} \text{ ポロノイ点と円の交点を基点とする直線 } (K1_n - K2_n = 2) \\
 \textit{Pattern4} \text{ ポロノイ点と別のポロノイ点を基点とする直線 } (K1_n - K2_n \leq 3) \\
 (K_n - K_{n+1} = \text{2つの交点をむすぶ円の弧状において他の円がいくつ接触しているか})
 \end{array} \right. \quad (17)$$

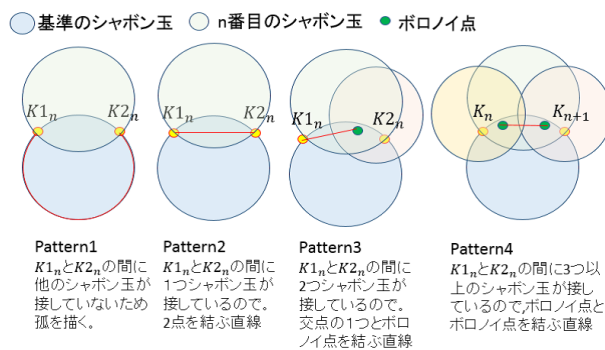


図 22: 式 (17) の補足

## 5.2 ポロノイ点

ここで、ポロノイ点の探索方法についても述べておく。ポロノイ点は、名前のとおりポロノイ図 (§2.2.1 参照) における基点のことである。ポロノイ図は、これらの基点をつなぐことにより完成する。この点は、以下の式 (18) によって定まる。

$$\begin{aligned}
 & E \in i, j, k, l \\
 & i, j, k \notin l \\
 & N_{i,j,k} = \begin{cases} \text{ポロノイ点である.} & (R < \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}) \\ \text{ポロノイ点ではない.} & (R > \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}) \end{cases} \quad (18)
 \end{aligned}$$

( $E$  = 母点の集合,  $N = ijk$  の外接円,  $R$  外接円  $N$  の半径,  $xy$  = 外接円の座標)

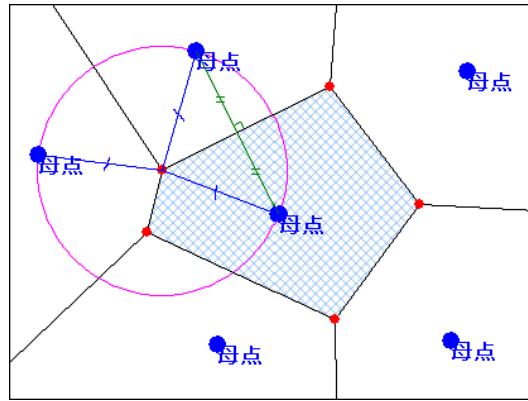


図 23: 母点の外接円とボロノイ点 ([7] より引用)

式 (18) は, 他の母点を外接円の中心に持たない外接円の中心が, 一般にボロノイ点と呼ばれる点であるということである. ([2] より引用) ボロノイ点は, このような式によって定めることができる.

### 5.3 シミュレーション結果

前節 §5.1 のモデルを用いた泡の動作を確認するため、以下の条件でシミュレーションを行った。

- シャボン玉の個数 30 (同じ圧力を持つものを5つずつ)
- 大気圧  $P_0 = 1$
- シャボン玉の圧力  $1.0 \leq P \leq 1.5$  (0.1 刻み)
- 半径  $r = 100$  (一律)
- 初速度  $v = 0$  (一律)
- 微小時間  $dt = 0.1$
- 配置 = ランダム.

この条件を元に、泡の圧力変化や半径変化、泡の概形及び大気圧の変化をシミュレーションした結果が、次の図 24 及び図 25、図 26 である。

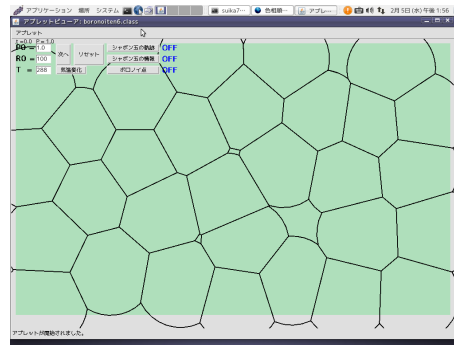


図 24: 時刻  $t=0.0$  における各泡の概形. 無数の泡が連なった場合の概形が分かる.

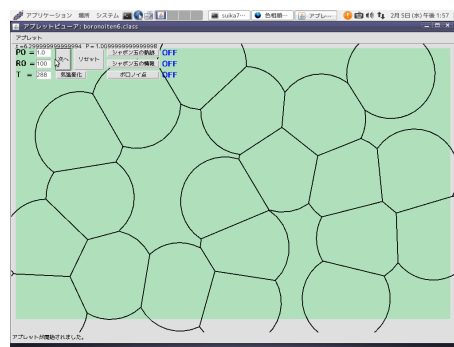


図 25: 時刻  $t=6.2$  における各泡の概形. いくつかのシャボン玉が破裂し、他のシャボン玉の概形が変化している.

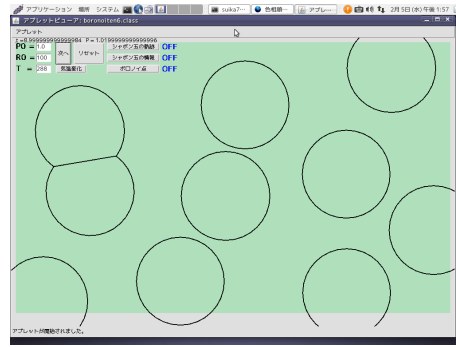


図 26: 時刻  $t=8.9$  における各泡の概形. 大気圧の急激な変化により, 圧力が 1.0 と 1.1 のシャボン玉のみが残った.

## 5.4 四角いシャボン玉のシミュレーションとその結果

前節 §5.1 のモデルを用いて四角いシャボン玉を生成できるのではないかを考え, 条件を考えた.

### 5.4.1 四角いシャボン玉とは

四角いシャボン玉とは文字どおり, 立方体上のシャボン玉のことである. 普通の環境では作成することはできないが, 特別な器具 (図 27) を用いることで, 作成することができる.



図 27: 特別な器具 ([8] より引用)

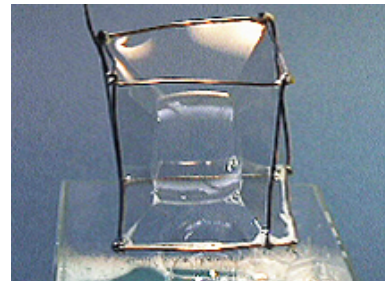


図 28: 四角いシャボン玉 ([8] より引用), 面積最小となる面の形になろうとする.

### 5.4.2 条件の決定と結果

四角いシャボン玉は, ひとつの面で大気圧とシャボン玉の圧力がつりあって成り立っている. そこで, 図 29 のように, 大気圧と同じ圧力を持つシャボン玉が各面に接合しているものと考えれば同じ状況ができるのではないかと考えた.

このことを考慮した結果, 以下のような条件を設定した.

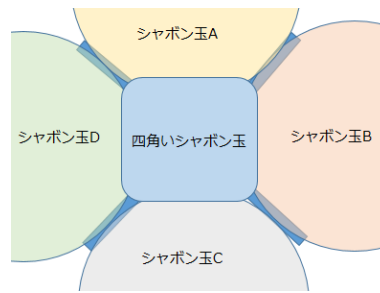


図 29: このように, ひとつのシャボン玉を別のシャボン玉で押しているものと考えられる.

- シャボン玉の個数 5
- 大気圧  $P_0 = 1$
- シャボン玉の圧力  $P = 1.0$  のシャボン玉が 1 と  $P = 1.2$  のシャボン玉が 4 つ
- 半径  $r = 100$  (一律)
- 初速度  $v = 0$  (一律)
- 微小時間  $dt = 0.1$
- 配置 = 1.0 のシャボン玉を 1.2 のシャボン玉で囲うように配置する.

以上の条件により, 以下の図のような結果を得ることができた.

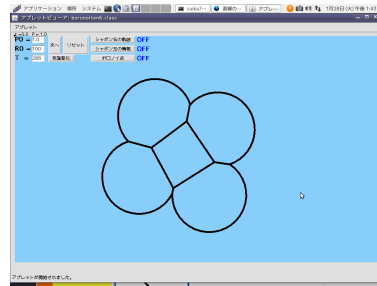


図 30: 四角いシャボン玉のシミュレーション. 現実に近い条件を与えてやることで, 四角い泡を再現できた

## 5.5 モデル考察

前節 §5.3 より以下のことが言える.

- 利点
  - 多数のシャボン玉の接触による概形の変化を捉えることができる.
  - 概形の変化が富んだことで, 四角いシャボン玉を再現することができる.
  - シャボン玉の破裂によって, 他のシャボン玉にどのような概形の変化があったかが分かる.
  - 石鹸やビールなどの泡同士が多数密着しているような泡のシミュレーションを行える.
- 欠点
  - 領域の計算やボロノイ点の計算などより多くの要素を取り入れたことで計算が複雑になった.
  - ボロノイ点を用いたことで, 角ばった泡が生じてしまう.

## 6 モデル5:泡間の圧力差による境界の変化を考慮したモデル

この章では、前章 §5 のモデルをベースに、泡どうしが接触した場合の境界線を圧力差によって定めるモデルについて考える。その際、泡どうしの境界線の形状は、圧力差で決定するものとする。

### 6.1 モデル概要

本モデルは以下の条件に従う。

- 泡が衝突した際に生じる境界線の引き方以外の条件は、§5 のモデルに従う。
- 境界線の形状は圧力差によって定まる。
- 境界線の決定は §5 のモデルの境界点を中心に考える。
- 泡の境界線は、孤状であるか、直線状であるかのどちらかであるとする。<sup>4</sup>

上記の条件において、本モデルは以下のような方法で境界を決定する。まず、初めに、§5 のモデルより、境界線の基点を定める。境界の基点の取り方は以下の図 31 の 3 パターンである。

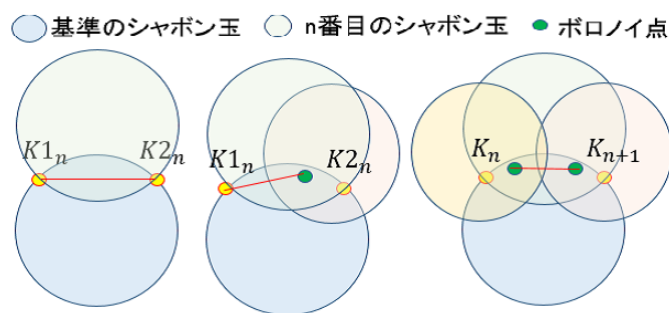


図 31: 境界の取り方、交点同士、交点とポロノイ点、ポロノイ点どうしの 3 パターンである。

次に、接している 2 つの泡の圧力を考える。2 つの接する泡の圧力をそれぞれ  $P_1, P_2$  とする。2 つのシャボン玉は、式 19 のようにつりあうように境界が変化するとする。このとき、2 つの圧力がちょうどつりあうようになる圧力になるとき元の体積からの変化量を  $\Delta d$  とする。このときボイルの法則を用いるとそれぞれの圧力は、式 (20) のようになる。

$$P_1 S = P_2 S (P_1 = \text{ある泡の圧力}, P_2 = \text{接している泡の圧力}, S = \text{接触面の面積}) \quad (19)$$

$$\begin{cases} P'_1 S = P'_2 S \\ P'_1 (V + \Delta V) = P_1 V_1 = C_1 \\ P'_2 (V - \Delta V) = P_2 V_2 = C_2 \\ (P'_1 = P_1 \text{の新しい圧力}, P'_2 = P_2 \text{の新しい圧力}, V_1 = \text{圧力 } P_1 \text{の泡の体積}, V_2 = \text{圧力 } P_2 \text{の泡の体積}, \\ \Delta V = \text{体積の変化量}, C_1 = \text{圧力 } P_1 \text{の泡の一定値}, C_2 = \text{圧力 } P_2 \text{の泡の一定値}) \end{cases} \quad (20)$$

式 (20) を用いて 2 つのシャボン玉の圧力と一定値から  $\Delta V$  を求めた後、次はその値を用いて新たに境界線となる孤の中心と半径を求める。孤の半径は以下の図 33 で考える。

<sup>4</sup>境界線は歪まない



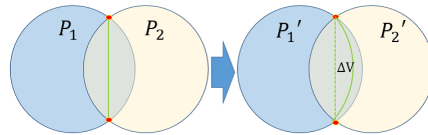


図 32: 上記の式の模式図. 黄緑色で囲まれた部分の球の体積が  $\Delta V$  である.

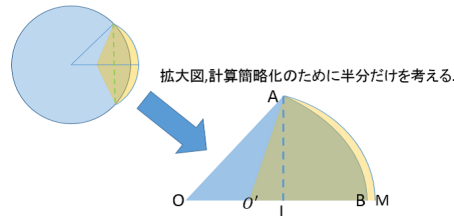


図 33:  $\Delta V$  から弧の半径を求める方法の説明図.

求めたい長さは, 点  $O'$  - 点  $A$  の円弧の半径である. この半径を  $R_2$  とする. 先ほど求めた  $\Delta V$  は, 領域  $A, L, M$  の体積だから, 領域  $A, L, O$  の面積を,  $S$  とすると, 以下の式 (21) の関係が成り立つ.

$$S = \Delta V / 4\pi \quad (21)$$

次に, この図形の面積の求め方を 2 通り上げる. 1 つ目は, 三角形  $O, A, L$  と領域  $A, L, M$  の面積の和で求める方法である式 (22).

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(R_1 \cos \alpha) \cdot L + S \\ (L = \text{辺 } A, L \text{ の長さ}, R_1 = \text{元の泡の半径}, \alpha = \angle AOB \text{ の角度}, S = \text{領域 } A, L, O \text{ の面積}) \end{cases} \quad (22)$$

一方, 2 つ目の求め方は, 三角形  $O, A, O'$  と弧  $A, O', M$  の和で求める方法である式 (23).

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(R_1 \cos \alpha - R_2 \cos \beta)L + (R_2)^2 \pi \frac{\beta}{2\pi} \\ (L = \text{辺 } A, L \text{ の長さ}, R_1 = \text{元の泡の半径}, \alpha = \angle AOB \text{ の角度}, \\ R_2 = \text{境界線の弧の半径}, \beta = \angle AO'M \text{ の角度}) \end{cases} \quad (23)$$

また辺  $A, L$  の長さ  $L$  は,  $R_1$  と  $\alpha$  及び,  $R_2$  と  $\beta$  を用いて表すことができる式 (24).

$$R_1 \sin \alpha = R_2 \sin \beta = L \quad (24)$$

これらの 3 つの式 (21, 22, 24) の 3 式を用いることで,  $\beta$  を求めることができる. 式 (25) を求めることができる.

$$L(R_1 \cos \alpha - L \frac{\cos \beta}{\sin \beta}) + \beta \frac{L^2}{\sin^2 \beta} = LR_1 \cos \alpha + 2S \quad (25)$$

この式 (25) は, 二分法によって  $\beta$  を求めることが可能である. また,  $\beta$  を式 (24) に代入することで, 境界線の弧の半径を求めることができる.

## 6.2 二分法

数値解析における二分法)は、解を含む区間の中間点を求める操作を繰り返すことによって方程式を解く求根アルゴリズムである. ([10] より引用)

ロジックは, $f(x) = 0$ となる $x$ を求める際に、初期値を2つ定める. その際、初期値2つを $a, b$ としたとき、 $f(a) > 0, f(b) < 0$ もしくは、 $f(a) < 0, f(b) > 0$ となるような2点を定義する. (この際 $f(x)$ は連続であり, $a, b$ 間に $f(x) = 0$ となる $x$ が2点以上ないものとする.)

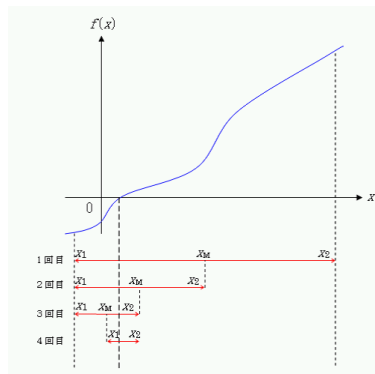


図 34: 二分法で  $f(x) = 0$  となる  $x$  を求める. [10] から引用

図 33 のように、まず  $a, b$  の中間値を  $c$  を定める. このとき  $f(a)$  と  $f(c)$  の符号が同じになる場合、 $a$  に  $c$  を代入し、逆にそれ以外であれば、 $b$  に  $c$  を代入する. 代入した後、もう一度、中間値を求め、符号の判定を行う.

このような処理をすることで、 $f(x) = 0$  となる値に近づけることができる.

## 6.3 シミュレーション結果

§6.1 のモデルを用いた泡の動作を確認し、また全章の §5.4.2 のモデルと比較するために、四角いシャボン玉をいろいろな圧力で作成した.

- 中心のシャボン玉の圧力が周りのシャボン玉の圧力より大きい場合
  - シャボン玉の個数 5
  - 大気圧  $P_0 = 1$
  - シャボン玉の圧力 1.1 のシャボン玉が 1 つ、残りは 1.0
  - 半径  $r = 100$  (一律)
  - 初速度  $v = 0$  (一律)
  - 微小時間  $dt = 0.1$
  - 圧力の大きいシャボン玉を中心に四方に配置
- 中心のシャボン玉の圧力が周りのシャボン玉の圧力とほぼ同じ場合
  - シャボン玉の個数 5
  - 大気圧  $P_0 = 1$
  - シャボン玉の圧力 1.00000001 のシャボン玉が 1 つ、残りは 1.0

- 半径  $r = 100$  (一律)
  - 初速度  $v = 0$  (一律)
  - 微小時間  $dt = 0.1$
  - 圧力の大きいシャボン玉を中心に四方に配置
- 中心のシャボン玉の圧力が周りのシャボン玉の圧力より小さい場合
    - シャボン玉の個数 5
    - 大気圧  $P_0 = 1$
    - シャボン玉の圧力 1.0 のシャボン玉が 1 つ, 残りは 0.9
    - 半径  $r = 100$  (一律)
    - 初速度  $v = 0$  (一律)
    - 微小時間  $dt = 0.1$
    - 圧力の小さいシャボン玉を中心に四方に配置

以上の条件でシミュレーションを行った結果, 以下の図 35,36,37 のような結果を得ることができた.

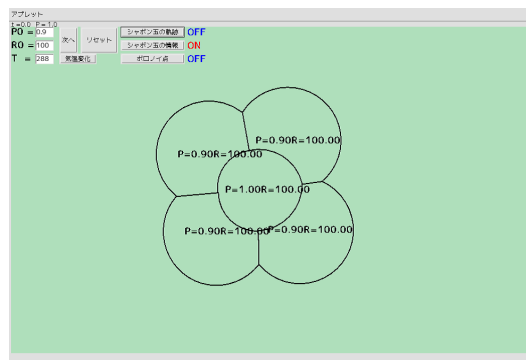


図 35: 中心のシャボン玉の圧力が高い場合

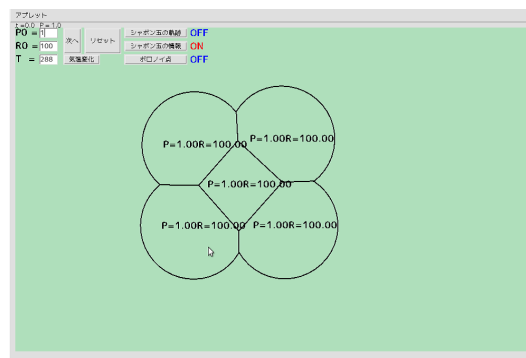


図 36: 中心のシャボン玉の圧力が他のシャボン玉とほぼ同じ場合

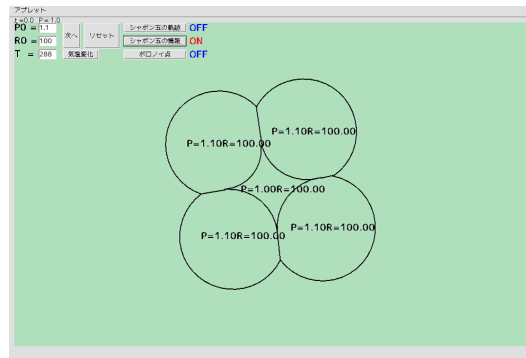


図 37: 中心のシャボン玉の圧力が低い場合

#### 6.4 モデル考察

前節 §6.3 より以下のことが言える.

- 利点
  - 多数のシャボン玉の接触による圧力差も考慮した概形の変化を捉えることができる.
  - 概形の変化が富んだことで, 現実に近い四角いシャボン玉を再現することができる.
  - 泡どうしの圧力差を考慮したことにより, より複雑な概形を再現できる.
- 欠点
  - これまでのモデルの中で最も多くの要素を取り入れたことで計算が複雑になった.
  - 泡同士の圧力によって奇妙な概形をした泡ができる.

## 7 まとめ

本研究では、圧力差による半径の膨張と運動方程式、ボロノイ点等を用いた5つの泡のモデルを作成した。

まず5つの泡のモデルについて共通して言えることは、どのモデルも液体部分で気体をつつみ気泡状態を作成できる点である。さらにどのモデルも、どの位置を泡の中心にするかという母点を、定義しなければ泡が成立しないという点では共通している。

また、気圧差変化を一定とするモデルと運動方程式を適用したモデルにおいては、泡のふくらみが単調現象ではなくなるモデル:2のほうが、伸縮する泡の性質をよく捕らえている。また、§4.2節において運動方程式に新たな項を追加することで、全く違った結果が得られることも分かった。このことから、表面張力や、ナビエ-ストークス方程式<sup>5</sup>などを運動方程式の項として取り入れることでより精度の高い計算ができる。しかし現段階では、圧力差と速度抵抗を用いた式であるため、それらの適用は今後の課題でもある。

また、複数の泡が接触した際にどのような概形になるかということ、第5.1章の式16の形で示すことができた。この式を適用することで、四角いシャボン玉などの特殊な泡や、ビールや石鹸などの無数の細かい泡の概形を再現することができた。(図24及び図30) またこの条件式は、泡の膨張や圧力の変化等の条件式が変わっても適用できるため、前文で述べた計算においても応用が利く点には注目したい。

さらに、第6章では、より現実に近い四角いシャボン玉を再現することができた。このモデルを活用することでより多くの状態の泡をシミュレーションすることができるようになった。

また、5つのモデルは、ボロノイ図、ボイルの法則、運動方程式といった内容を取り入れている。このことを利用して結果の算出に用いたシミュレータは、これらボロノイ図、ボイルの法則、運動方程式の教材としての教材としても利用できる。java言語を用いた、アプレットを使用しているため、マウスクリックやキーボード入力といった直観的な操作で、物理現象を体験することができる。本研究の副産物は、今後こういった面での応用に期待が高まる。

<sup>5</sup>流体の運動を記述する2階非線型偏微分方程式 ([9] より引用)

## 8 参考文献

### 参考文献

- [1] wikipedia , 「Weizenbier-ukko.jpg」 ,Ukko.de  
<http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%95%E3%82%A1%E3%82%A4%E3%83%AB:Weizenbier-ukko.jpg>
- [2] 泡の物理・大塚正久, 佐藤英一, 北菌幸一 (内田老鶴圃,2004)
- [3] wikipedia, 「ボロノイ図」 (2014/01/31 現在) <http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%9C%E3%83%AD%E3%83%8E%E3%82%A4%E5%9B%B3>
- [4] 「徹底攻略微分積分改訂版」・真貝寿明
- [5] 「徹底攻略常微分方程式」・真貝寿明
- [6] Maltiscale Modeling of Membrane Rearrangement, Drainage, and Rupture in Evolving Foams · Robert I.Sye and James A. Sethian
- [7] MPCOM WORLD (2014/01/31 現在) <http://www.mapcom.co.jp/support/hint/vector/hint61.htm>
- [8] 東北電力”電気と科学の広場おもしろ実験工房” (2014/01/31 現在) [http://www.tohoku-epco.co.jp/new\\_naze/koubou/oneday/jikken/10.html](http://www.tohoku-epco.co.jp/new_naze/koubou/oneday/jikken/10.html)
- [9] wikipedia, 「ナビエ-ストークスの方程式」 (2014/01/31 現在) <http://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%8A%E3%83%93%E3%82%A8-%E3%82%B9%E3%83%88%E3%83%BC%E3%82%AF%E3%82%B9%E6%96%B9%E7%A8%8B%E5%BC%8F>
- [10] wikipedia, 「二分法」 (2014/02/11 現在) <http://ja.wikipedia.org/wiki/%E4%BA%8C%E5%88%86%E6%B3%95>