目次

1　序論

1.1　背景

　本研究では、プログラムによってエッシャー風タイリングの構成パーツを作成するツールを製作した。
エッシャーとはオランダの版画家である（M.C.Escher,1898-1972）
図形を敷き詰めてるような不思議で複雑な作品を多く残していてる。
図形を敷き詰めたような複雑な作品の中にある法則・パターンを利用してエッシャー風タイリングを作る。

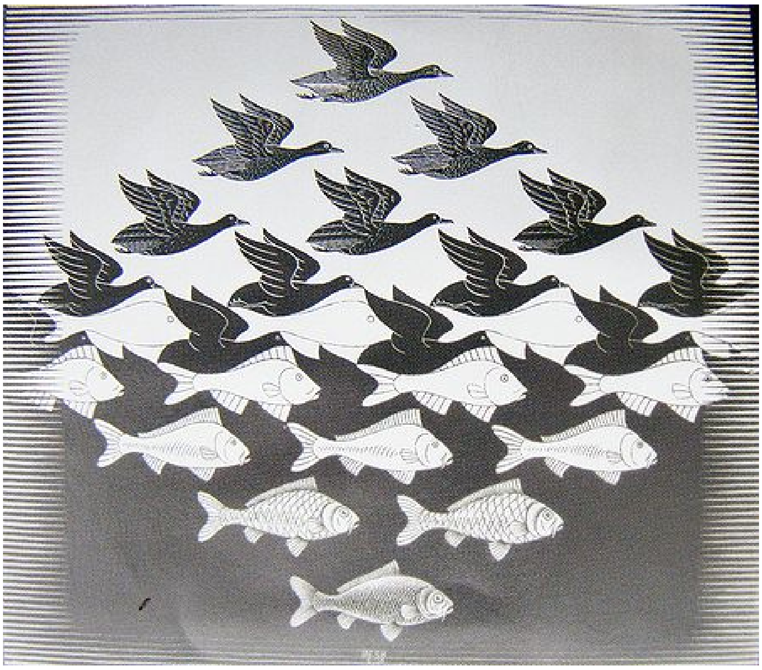

図１　エッシャーの代表作

1.2　研究の概略

　今回「エッシャー・マジック　だまし絵の世界を数理で解く」[1] の本をメインにエッシャーのタイリングについて調べ、理解を深め基礎知識を得た。
タイリングが持つ性質や法則を利用し、エッシャー風タイリング作成ツールの製作を行うことを目的とする。
作成ツールはユーザーが自由にタイリングを作成することができるツールとし、

・実際に線を引き自分の好きな形で作れること
・ボタンで簡単に様々なパターンがつくれること

これらからユーザーの自由度をあげたエッシャー風タイリング作成ツールの製作を行った。

2　基本のタイリングパターン

本章では [1] を参考にして、タイリングの一般論を紹介する。タイリングとは平面を有限種類の図形で重複も隙間もなく埋め尽くしていくパターンのことである。またタイリングの中でも一様なタイリングと、一様でないタイリングと分けられる。

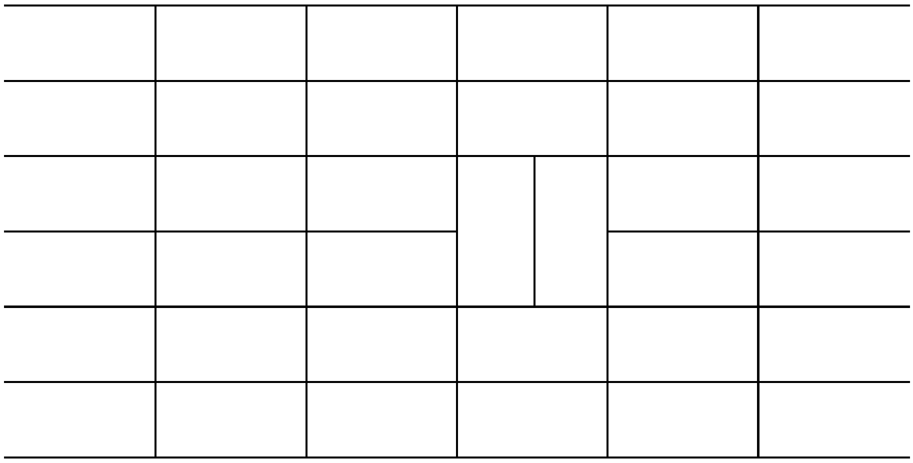

図 2　一様でないタイリング

一様なタイリングとはタイリング全体を平行移動によって動かしてタイル自身とピッタリ重なることができるタイリングのことを言う。一様でないタイリングは平面全体にどのように平行移動を施してももとのタイリングとぴったり重なることはない。[図 2]
この一様性という性質を持つタイリングについて考えていく。

2.1　正方形のタイリング

2.2　タイリングの考え方

　エッシャーの作品はさまざまなものがありとても複雑である。
まずはこれらを芸術面からでなく数理的に考えていく。
その第一歩としてまずもっとも単純なタイリングパターン、正方形のタイリングを考えていくこととする。
　１つの正方形のタイルがあり、このタイルのコピーが敷き詰められて平面を覆う条件を考える。
わかりやすいように正方形のタイルに表と裏、上下左右の区別がついているとする。
また、タイルに文字Ｆが書いてあるとする。こうすることによって、タイルが平行移動によって移されて敷き詰められたのか、回転して向きが変わっているのか、裏返しにして置かれているのか区別することが可能になる。

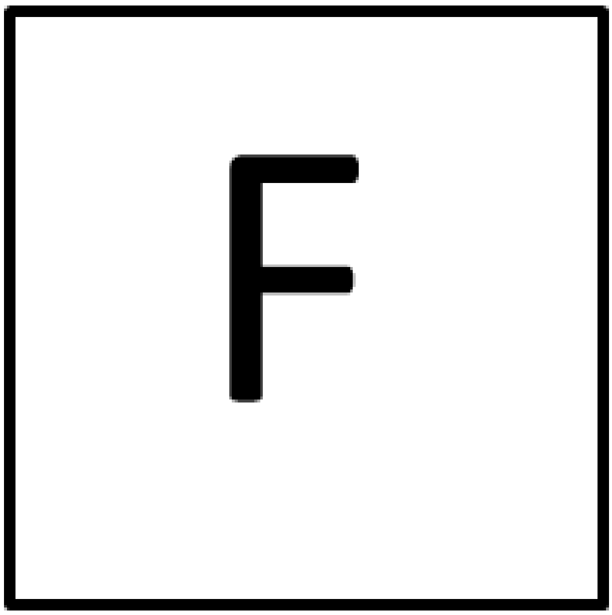

図３　タイルの図

　タイルの辺が移った先でどのように隣り合うかを分かりやすくするためにタイルの辺に反時計まわりの向きをつけ、順番に a,b,c,d とラベルを付ける。[図４]
タイルの辺同士の隣り合い方がわかると、タイリングの性質、隙間も重なりもなく平面を覆うという性質を保ったまま変形することができ、なおかつ法則を見いだすこともできる。

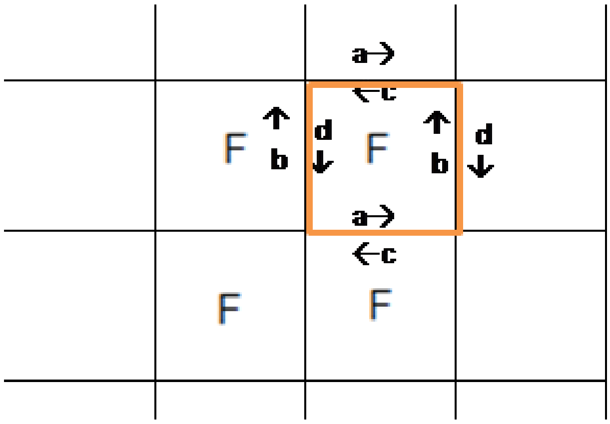

図 4　ラベルの図

2.3　写像

　一様なタイリングが満たすべき性質を明らかにし、それを満たす基本図形としてのタイルとそのタイルの置き方を調べるために「写像」と「群」の概念を理解する必要がある。
平面上の点全体がなす集合をRとしたとき、平面上の点全体は R×R の要素全体とみなすことができる。任意の点 $P \in R^2$ に対して、平面上の点 $f(P) \in R^2$ が対応するとき、f を R^2 から R^2 への写像といって、$f(P)$ を子の写像による P の像という。

任意の点 P,$Q \in R^2$ に対して、$P \neq$Q ならば $f(P) \neq f(Q)$ である、という性質が成り立つとき、f は単射であるという。 f が単射であるということは、異なる点の像はいつも異なることを意味する。
また、任意の点 $Q \in$R ^{2} に対して、$f(P) =$Q を満たす点 P が存在する、という性質が成り立つとき、f は全射であるという。 f が全射だと、平面上のどの点Qに対してもどの点Qに対してもそこへ移る点Pが存在していることを意味する。

タイリングでは基本図形を場所と向きを変えながら平面へ敷き詰めていく。
つまり、１つの基本図形から出発し、そのコピーを別の場所へと繰り返し置いていく作業の繰り返しと同じことだといえる。コピーを別の場所へ置いていくという作業はもとの基本図形であるタイル内の点を別のタイルの対応する点へ写像することとみなせる。
このことから、一様であるタイリングを行うのにに必要なのはタイルの形を変えない写像であることがわかる。

そしてこのタイルの形を変えないには写像は「等長」という性質がある。

２点 $P, Q \in \ R^2$ に対して、P の座標を (x_1, y_1),Q の座標を (x_2, y_2) とする。

P と Q の距離を $d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ と置く。
$d(P, Q)$ は P と Q のユークリッド距離と呼ばれ、任意の $P, Q \in \ R^2$ に対して、$d(P, Q) = d(f(P), f(Q))$ が成り立つとき、つまり写像 f が２点間の距離を不変に保つとき、f を等長写像という。

等長写像はどの２点間の距離も変えない。よって図形の形を変えない写像である。
そして等長写像の例に並進・鏡映・回転・並進鏡映がある。

2.4　並進

v を任意の２次元ベクトルとしたとき、$f_v(P) = P + v($ $P + v$ は点 P の位置ベクトルとベクトル v との和の位置ベクトル) で表される写像 f_v を等長写像であり、並進とよぶ。

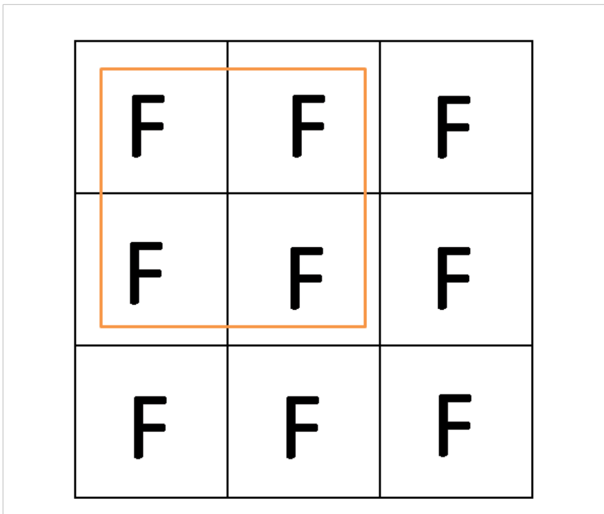

図５　並進の図

2.5　鏡映

鏡映とは線対称写像の事である。
平面上に直線 l があるとする。平面を l を軸として３次元空間で１８０度回転させると、もとの平面に一致する。これは R^2 から R^2 への全単射であり、等長写像でもある。

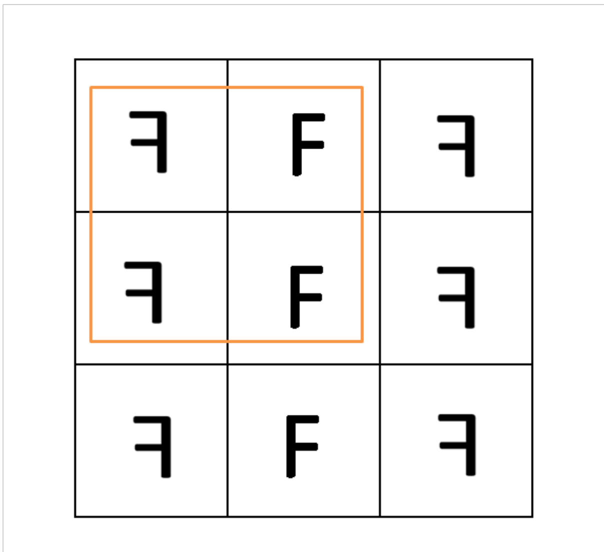

図 6　鏡映の図

2.6　回転

任意の実数 θ に対して,、平面 R^2 を点のまわりに反時計回りに角度 θ だけ回転させる変換を $f_{P,\ \theta}$ と置く。$f_{P,\ \theta}$ は P のまわりの角度 θ の回転という。
$f_{P,\ \theta}$ も全単射であり、等長写像でもある。

回転のうち、特に $\theta\ = 180$ 度のものを点対称写像という。

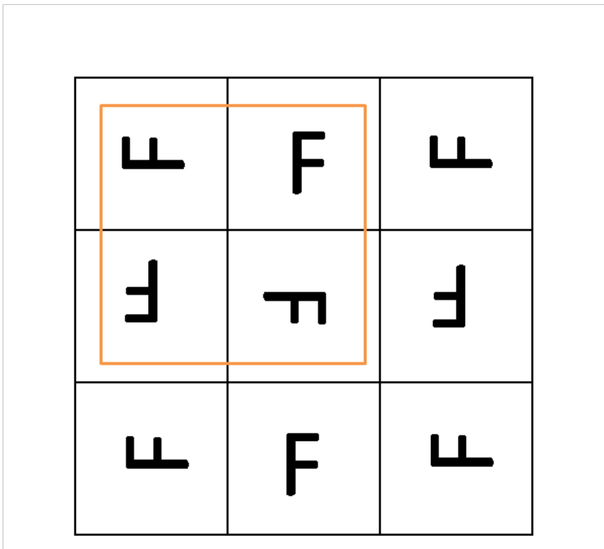

図 7　回転の図

2.7 並進鏡映

v を 2 次元ベクトルとし、l を v に平行な直線とする。
まず点に v で表される並進を行い、次に直線 l に対して鏡映をとることによって得られる写像を並進鏡映という。

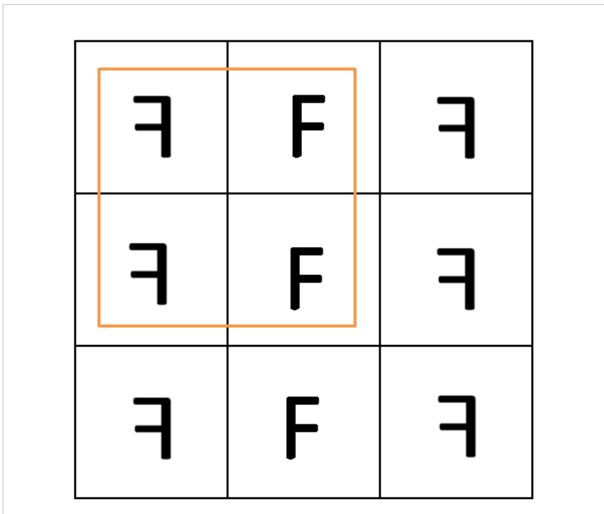

図 8 並進鏡映の図

2.8 写像の合成と群

1 つのタイルから等長写像を施していくことによってタイリングしていくことが分かったが、自由に等長写像を施してもタイルが重なったり隙間ができ、完璧なタイリングはできない。完璧なタイリングを行う方法として「群」を理解する必要がある。

集合を G としたとき、任意の要素 $x, y \in G$ に対して、G の要素 $x \circ y$ を作る演算 $\circ$ が定義されているとする。集合と演算の組 $(G, \circ)$ は下記の条件が満たされるとき群となる。

1, 任意の $x, y, z \in G$ に対して、$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ が成り立つ。

2, 任意の $x \in G$ に対して、$x \circ e = e \circ x = x$ を満たす、$e \in G$ が存在する。

3, 任意の $x \in G$ に対して、$x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$ を満たす $x^{-1} \in G$ が存在する。

条件 1 は 3 つある要素間の 2 つの演算は、どちらを優先させても同じ結果になるという意味になる。この性質は結合律という。

条件 2 は G の任意の要素 x と、特別な要素 e との間で演算を行った結果が x のままであるという意味になる。この e を単位元という。
単位元とは演算を行っても元の値を変えないことをいい、相手の値そのままを結果とする。

条件 3 の逆元 x^{-1} は x の逆元という。逆元とは、G の任意の要素 x に対して常に逆元 x^{-1} が存在し、x と x^{-1} に演算を行うと単位元となるという意味である。

f, g を R^2 から R^2 への等長写像とする。
点 $P \in R^2$ に写像 g を行い、その結果を写像 f に行うと、点 $f(g(P)) \in R^2$ が得られる。
このように、P に $f(g(P))$ を対応させることも R^2 から R^2 への等長写像となる。
この等長写像を f と g の合成といい、$f \circ g$ で表す。
次に等長写像の全体は群をなすことについて確認する。

まず条件 1 にあった結合律についてみる。

写像を考えるにあたって分かりやすいように板を重ねるようなイメージを持って写像を行うことにする。
f を回転と並進の合成からなる等長写像とする。
平面 R^2 の板に見立ててもとの平面を下側の板、写像を行ったあとの平面を上側の板と見立てて f によって点がどのように移動したかは上側の板と下側の板のずれによって表される。
写像を行う前では 2 枚の板は一致している。写像 f を行うと平面上の各点は別の点へ移り、行き先が表される。
条件 1 を満たす「任意の $x, y, z \in G$ に対して、$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ が成り立つ」という条件を考えるため f, g, h の 3 つを等長写像として考える。
下から順に A, B, C, D と名前をつけて 4 枚の板を重ねる。
そして写像 f を A と B のずれ、写像 g を B と C のずれ、写像 h を C と D のずれとする。
まずはじめに $(f \circ g) \circ h$ を考える。
これはまず f と g を先に行う。つまり、板 A と B、B と C をずらすことで $f \circ g$ が表される。その後写像 h である板 C と D をずらす事によって $(f \circ g) \circ h$ を得る事ができる。
一方、$f \circ (g \circ h)$ はまず g と h を先に行う。板 B と C、C と D をずらすことで $g \circ h$ が表される。その後写像 f である板 A、B をずらすことによって $f \circ (g \circ h)$ を得る事ができる。

この 2 つの結果である図 9 の (c) が一致していることが表されている。

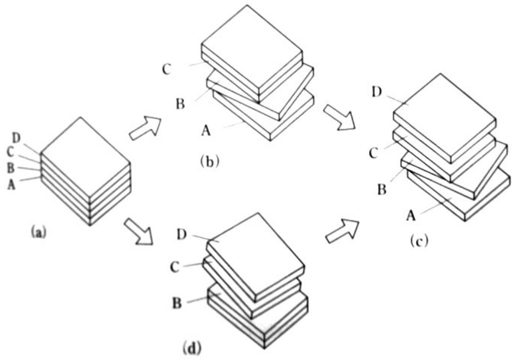

図 9　等長写像の合成と順序

したがって、条件 1 である $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ が成り立つ。

また任意の点 $P \in R^2$ を P 自身へ移す写像は恒等写像という。
恒等写像は等長写像で、これは合成に関する単位元である。したがって条件 2 である「任意の $x \in G$ に対して、$x \circ e = e \circ x = x$ を満たす、$e \in G$ が存在する。」が成り立つ。

等長写像 f は全単射であるから逆単射である f^{-1} が存在する。
写像 f を下の板を上の板へ動かすずれで表すとすると、逆写像 f^{-1} は上の板と下の板を交換することによって表すことができる。このことは図からも見れる。
よって、任意の f に対して逆写像 f^{-1} が存在するといえ、条件 3 である「任意の $x \in G$ に対して、$x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$ を満たす $x^{-1} \in G$ が存在する。」が成り立つ。
以上から等長写像の全体は群をなすことがわかる。

$(G, \circ)$ を群とする。G の部分集合 $G' \subset G$ に対して、$(G', \circ)$ が群をなすとき $(G', \circ)$ を $(G, \circ)$ の部分群という。

2.9　１７種類の周期的タイリング

G を等長写像がなす群の部分群とし、$P \in R^2$ を任意の点とする。G に属す写像によって P が移る先の全体を S とする。
つまり $S(P) = f(P)$ ｜ $f \in (G)$ となる。
正の数 d が存在するとした時 S に属すどの 2 点も距離が d 以上あるとき G は不連続であり、不連続な群を不連続群という。

一方ある固定点 O のまわりで θ だけ回転する写像 $f_{O,\theta}$ をすべての実数 $G" = f_{O,\theta}$ ｜ $\theta \in R$ とすると、θ はどれだけでも小さな正の値をとれるので、P とその像 $f_{O,\theta}(P)$ はどれだけでも接近する事ができる。
つまり P とその像 $f_{O,\theta}(P)$ で定まる $G"$ は不連続ではない。

G が不連続の時、点 P が移る先の全体 $S(P)$ は互いに離れた点となる。そこで、点 P のまわりに作られた領域を少しずつ拡大していくことを考える。これによって、G に属す写像による領域の像が互いに重ならない範囲で領域を広げ、互いの像が重なることなく平面を埋め尽くすことができる可能性がある。

平面 R^2 内の領域を D と定義する。
G に属する写像による D の像の全体が平面 R^2 を覆い、かつ D が性質をもったまま最少のときに D を基本領域という。
領域 D は無限遠方まで広がっていないときに有界であると言われる。
基本領域 D 有界で像の全体 $f(D)$ ｜ $f \in G$ が境界以外では点を共有しないとき、$f(D)$ ｜ $f \in G$ は D をタイルするタイリングとなる。

タイリングには互いに平行でない 2 つの方向の平行移動で、それぞれを行ったとき元のタイリングをぴったり一致するものがあるときによばれる周期的と、そうではない非周期的タイリングがある。
上記で述べられた方法で作られたタイリングは周期的タイリングとなる。

・１７種類の周期的タイリング

周期的なタイリングで本質的に異なるものになる等長写像群は１７種類しかないことが分かっている。

1, ２方向の並進

2, 並進と点対象変換の合成２組

3, 並進と２本の平行線による鏡映

4, 直行する２組の平行線対による鏡映

5, 並進鏡映と並進

6, 直行する２組の並進鏡映

7, 並進鏡映と２直線による鏡映

8, 鏡映と２種類の並進

9, 互いに直交する２つの軸による鏡映と２つの並進

10, ９０度回転と直交する並進

11, ４５度で交わる２組の鏡映

12, １２０度回転と並進

13, ６０度回転と並進

14, ９０度回転と並進鏡映

15, １２０度回転と鏡映と並進１

16, １２０度回転と鏡映と並進２

17, ６０度回転と鏡映と並進

これらのパターンを基本としエッシャーはタイリングを行って作品を作っていた。

3　タイリング・ツールの製作

タイルの敷き詰めを java のアプレットで表現する。
まず元となるタイルの敷き詰めをアプレットで表示させるために繰り返し文を用いてタイル状にする。

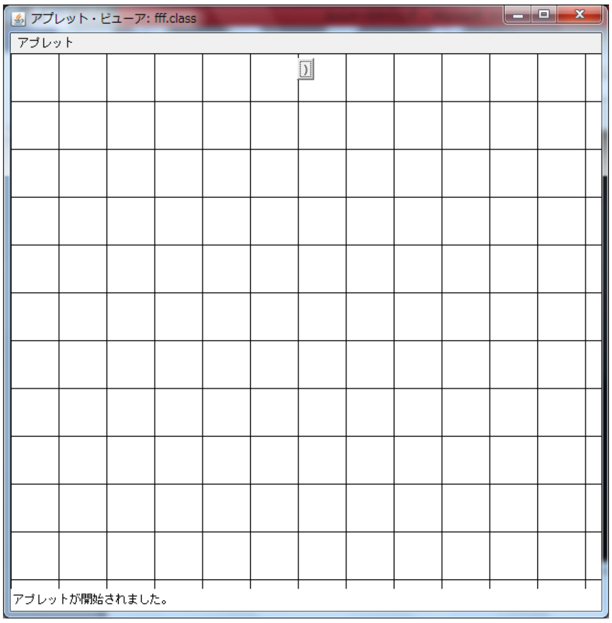

図 10　タイル

3.1　2 組の平行移動による正方形タイルの敷き詰め

1 番単純なタイルの横と縦に平行移動したものを考える。

ラベルは図 4 のようになる。この時に考えることはラベルの a と c、b と d が隣り合ってるということで、これによって a が変更されたときは c 、b が変更されたときは d が一緒に形が合うように変わるということがわかる。この法則にしたがって描画すると図 11 のようになる。

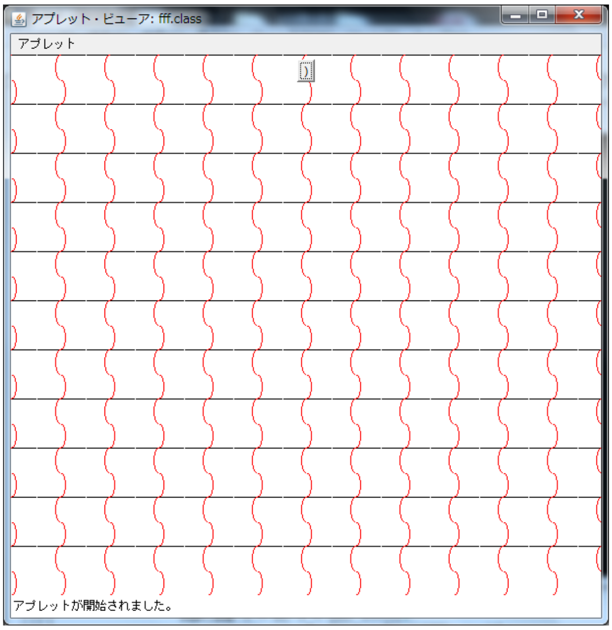

図 11　2 組の平行移動による正方形タイルの敷き詰め結果

3.2　90 度の回転と平行移動によるタイルの敷き詰め

今度は正方形を 90 度ずつ回転させて敷き詰めたものを考える。

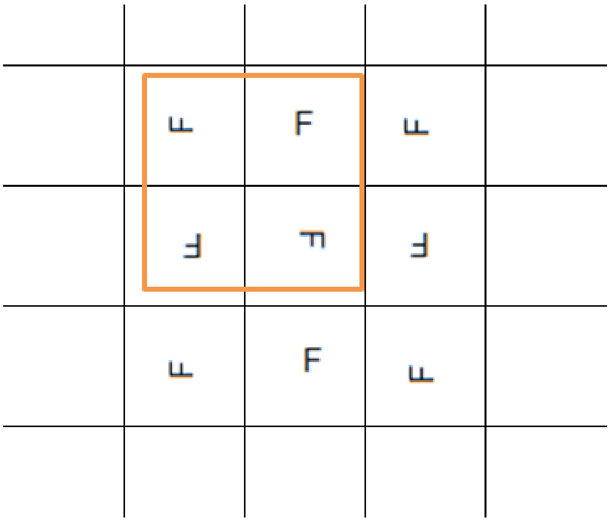

図 12　90 度回転

そして 90 度ずつ回転させて敷き詰めるとラベルは図 13 のようになる。

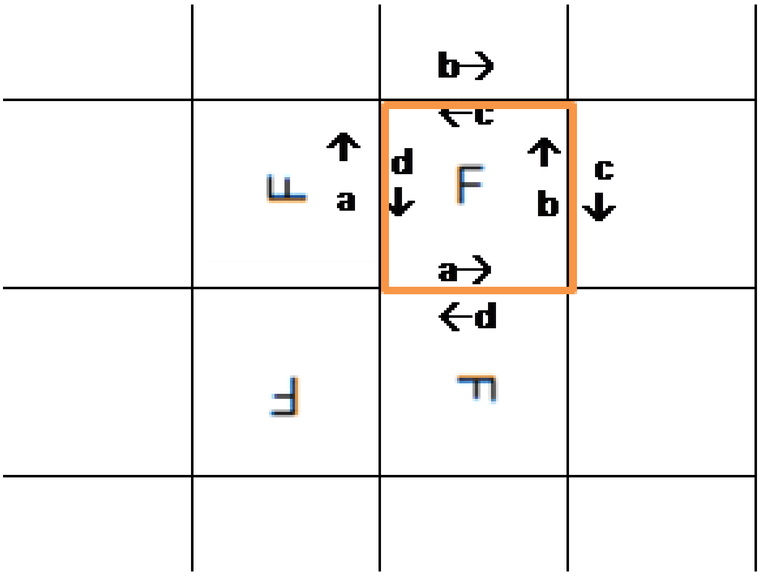

図 13　90 度回転のラベル

図より今度はラベルの a と d、b と c が隣り合ってるということで、これによって a が変更されたときは d 、b が変更されたときは c が一緒に形が合うように変わるということがわかる。
この法則に従って描画すると図 14,15 のようになる。

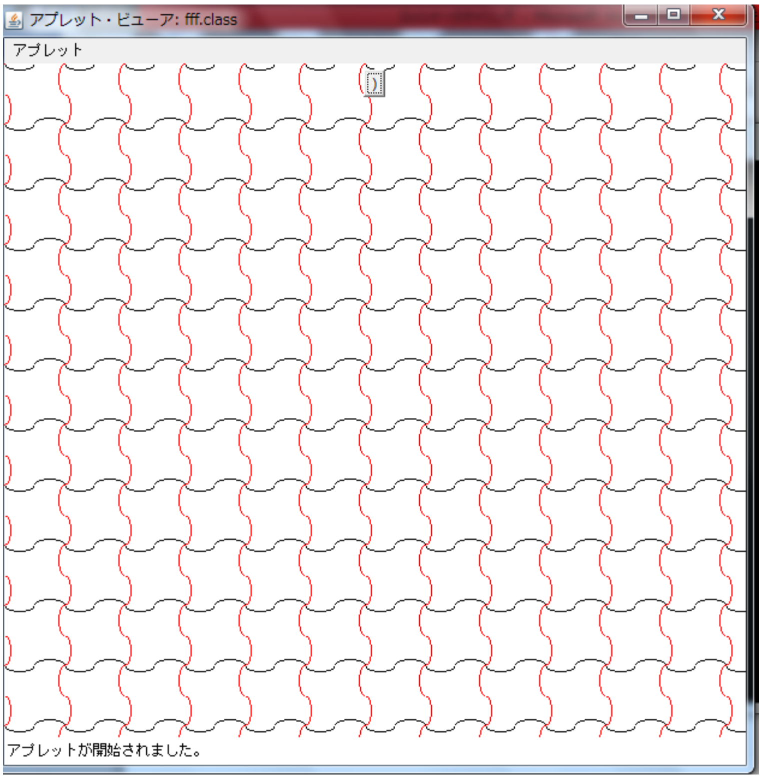

図 14　９０度の回転と平行移動によるタイルの敷き詰め結果１

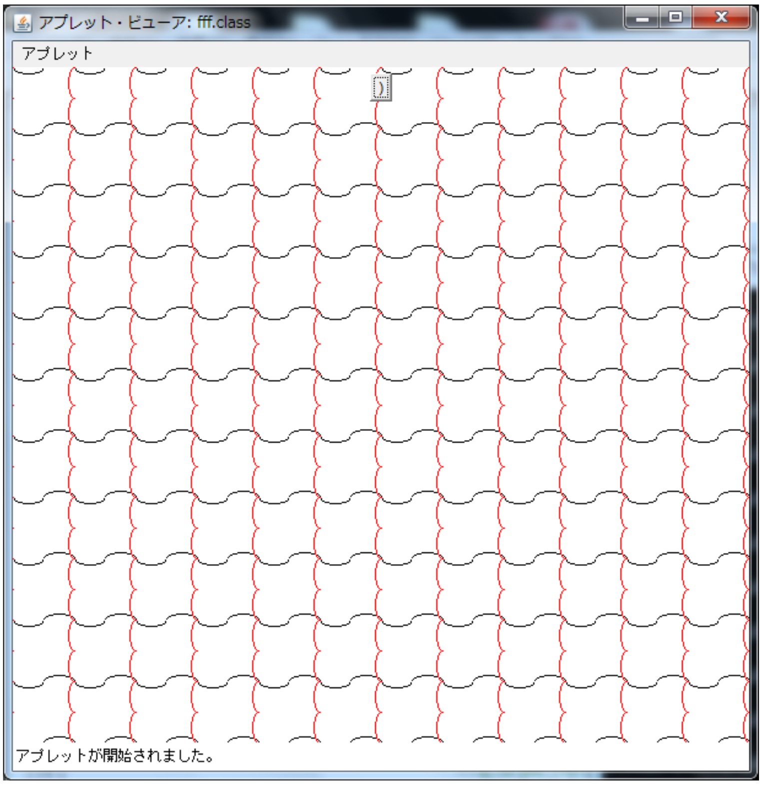

図 15　９０度の回転と平行移動によるタイルの敷き詰め結果２

4　エッシャー風タイル作成ツール

4.1　ツール概要

ツール開発の目的は、自分の好きな形のタイルを誰でも簡単に作れるようにすることである。

基本の正方形の一辺を使い、点をマウスで打ち、自由に辺を作ることができる。

その辺で、並進でのタイリング、９０度回転でのタイリング。鏡映でのタイリング作成できる。図 16 に操作画面を示す。画面構成として、辺を作成するところ、線を描き終った時に点を終着させるボタン、パターンを選ぶボタン、２辺目を描くためのボタン、そしてタイリングを行うボタン、すべてをリセットするボタンからなる

自分の好きな辺を作るための工夫として、正方形の１辺を使いマウスでクリックして描いていく方式にした。目で見て描くことができるので操作しやすいと考えた。

作成することのできるパターンは、１辺を変更したもの、２辺を変更したもの、およびそれぞれの平行移動と９０度回転と鏡映を行った図形を作成するものの６種である。

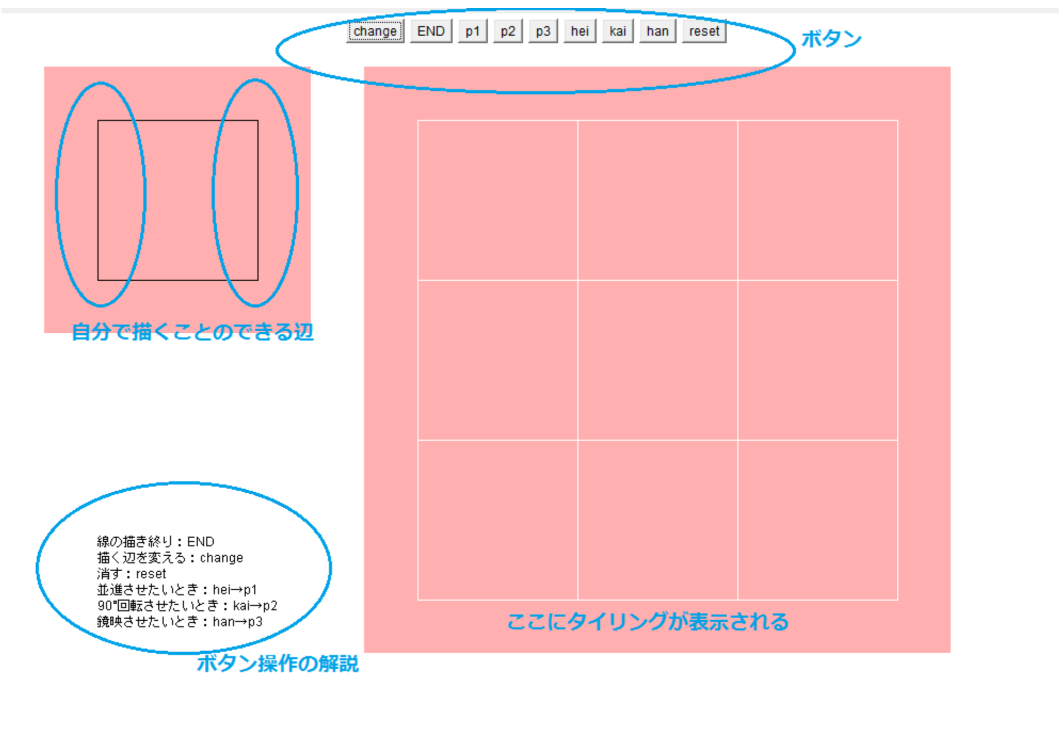

図 16　操作画面

4.2　解説

　このツールのプログラムについて解説する。

辺を描写する点は５０点打つことができ、この打った点と点の間に線を引き辺を作る。
点の始点は正方形の左上の頂点に決まっており、この点から打った点の位置まで線が引かれる。

また、正方形には色を付けた背景を描画しており、この範囲内でしか点を打てないように判定を行っている。
描きたい線を描き終ったのち、END ボタンを押すことで正方形の左下の頂点と線が引かれ、左の 1 辺が完成する。

そして次に押すボタンによって作りたいタイリングの形が分岐される。
並進させて作られたタイリングを作りたいときには hei ボタンを押してから p1 ボタン、９０度回転させて作られたタイリングを作りたいときは kai ボタンを押してから p2 ボタンを押すことでタイリングを表示することができる。

hei ボタンを押すことで左辺で打った点をコピーし移動、右の結果を描画する正方形に描画される。
kai ボタン、han ボタンでも同様にコピーと移動が行われ、それぞれ９０度回転された辺、鏡映された辺が描画される。
この段階を挟むことで辺がどのように変化したかわかる。
そして hei ボタンの後に p1 ボタンを押すと並進されたタイリングが表示され、kai ボタンの後に p2 ボタンを押すと回転されたタイリング、han ボタンの後に p3 ボタンを押すと鏡映されたタイリングが表示される。

これで自分で作成したオリジナルのタイリングが完成する。

２辺目を描画するときには 1 辺を描画し、END ボタンを押した後に change ボタンを押す。
すると正方形の右の辺に描画することができるようになる。
reset ボタンを押すと、すべて消える。

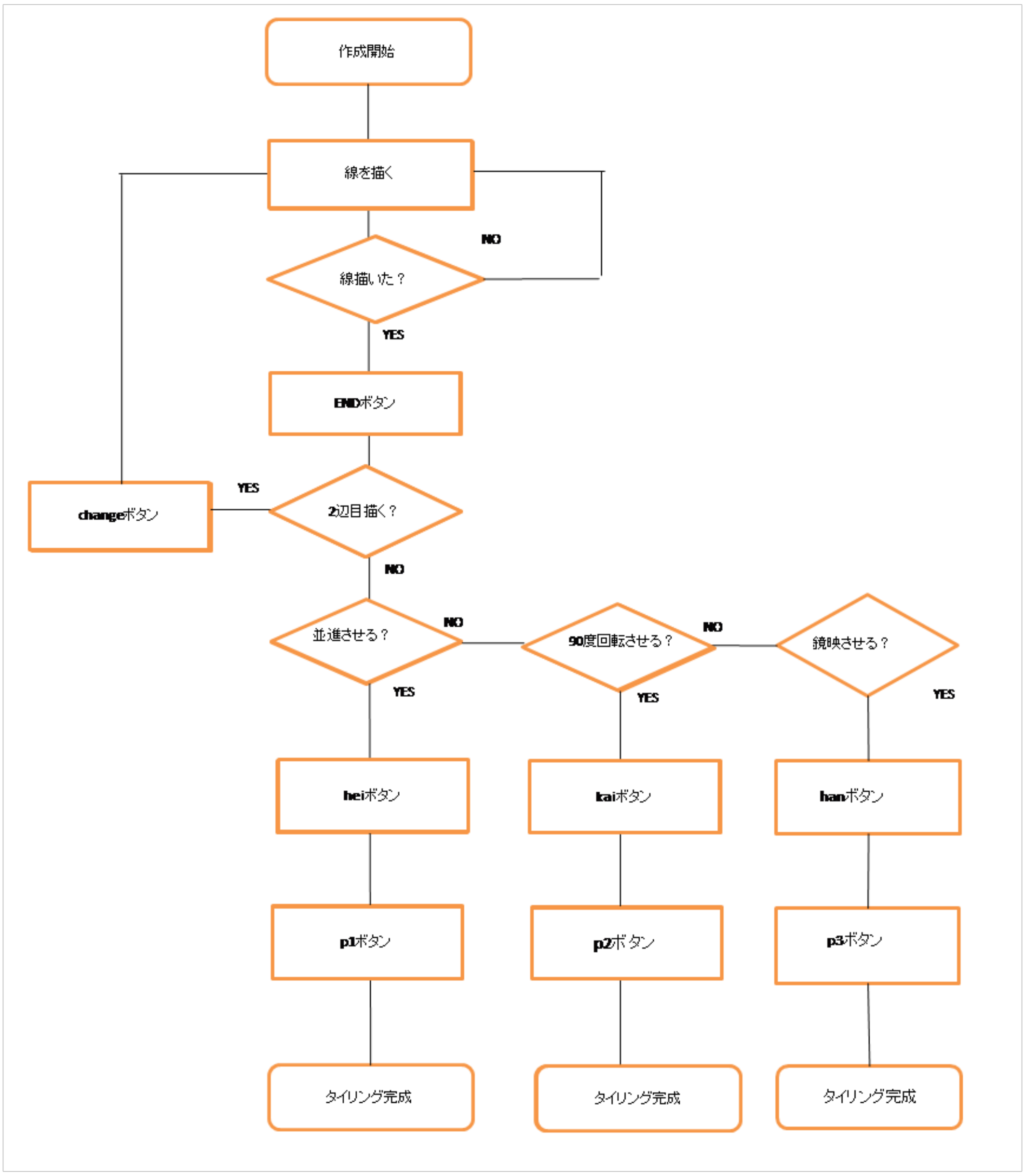

図 17　作成ツールのフローチャート

具体的な作品例を示す。

4.2.1　平行移動

まず初めにマウスで自由に辺を描き、END ボタンを押す。

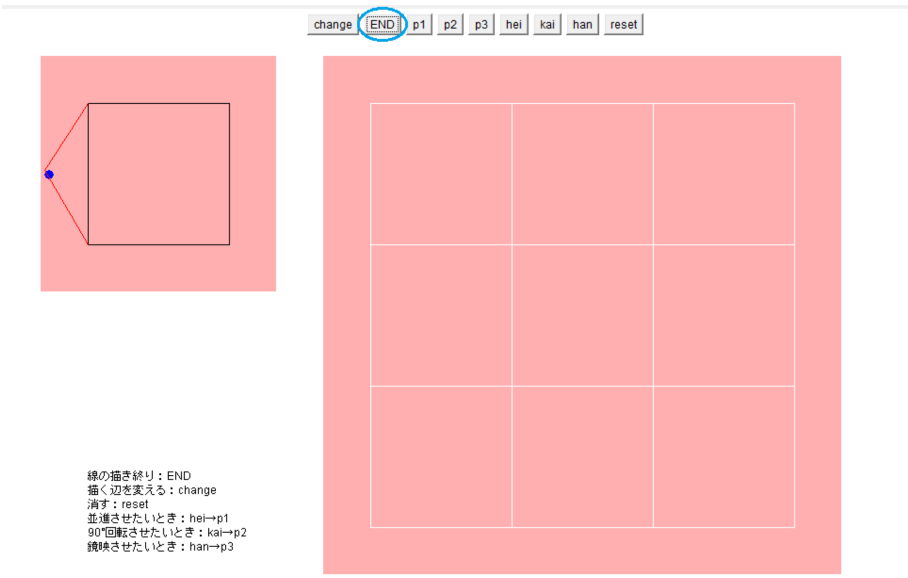

図 18　開始

次に hei ボタンを押し平行移動を行う。

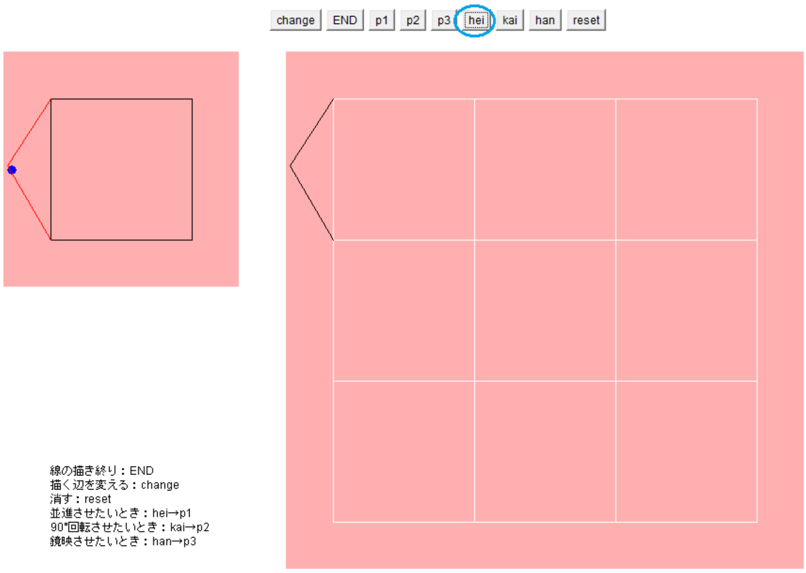

図 19　平行に移動

そして最後に p1 ボタンを押すと平行移動でのタイリングが作れる。

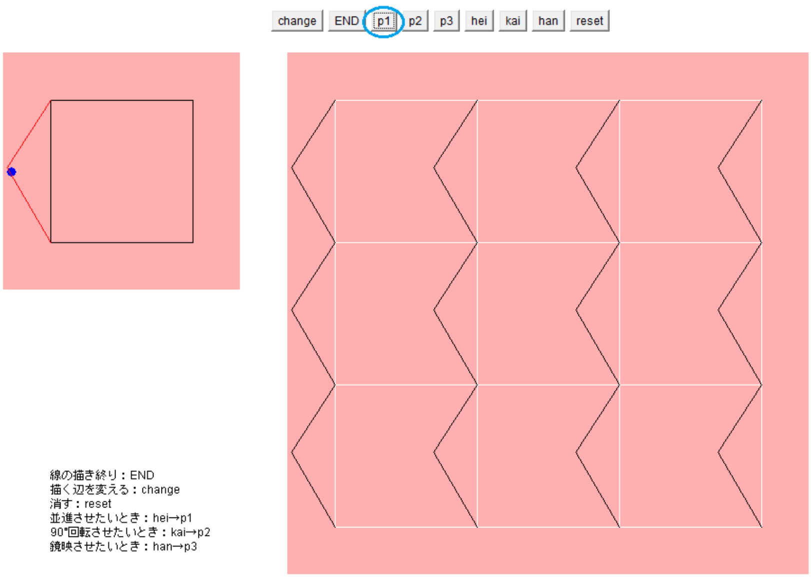

図 20　結果

4.2.2　９０度回転

初めにマウスで自由に辺を描き、END ボタンを押す。

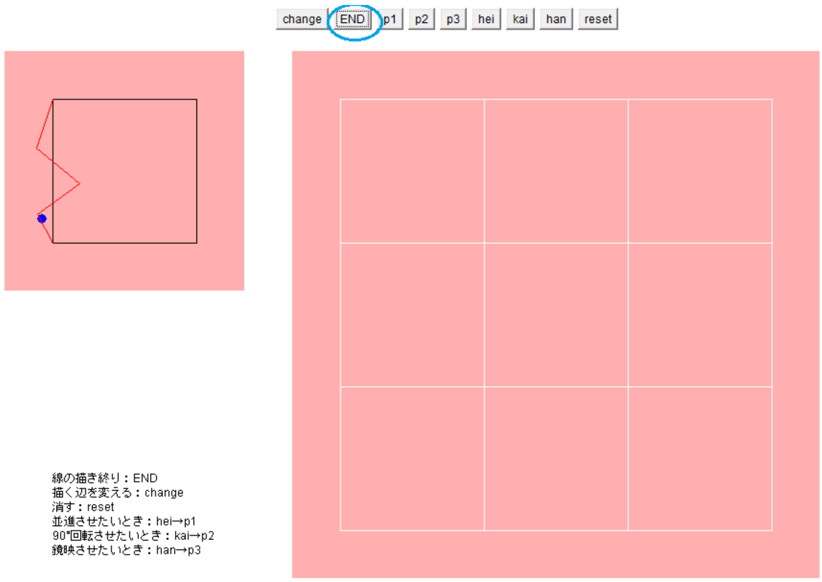

図 21　開始

次に kai ボタンを押し回転を行う。

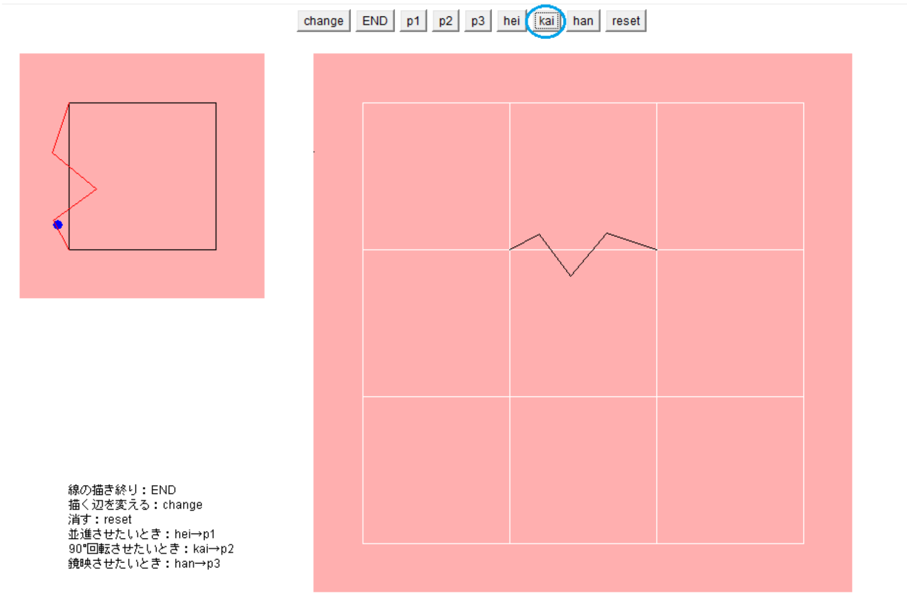

図 22　90 度に回転移動

そして最後に p2 ボタンを押すと回転でのタイリングが作れる。

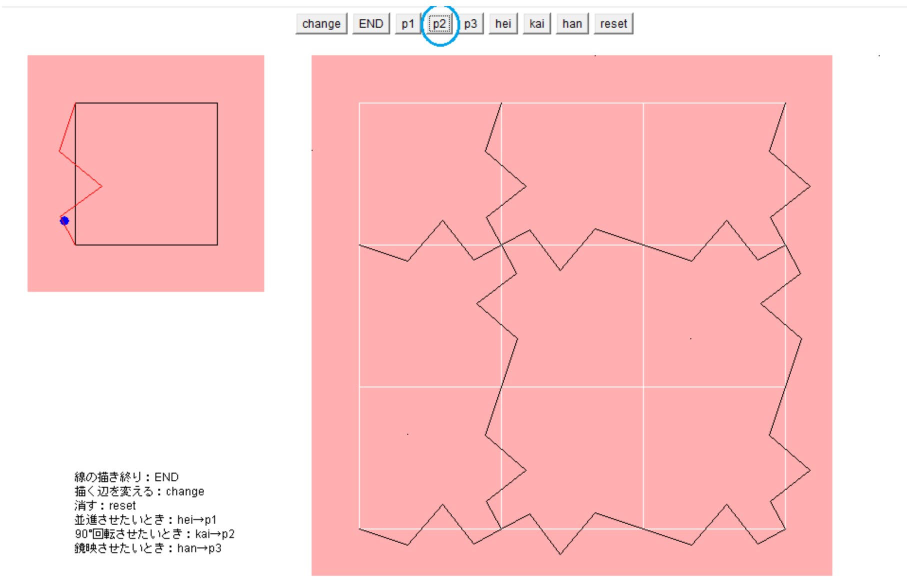

図 23　結果

4.2.3　鏡映

同じようにマウスで自由に辺を描き、END ボタンを押す。

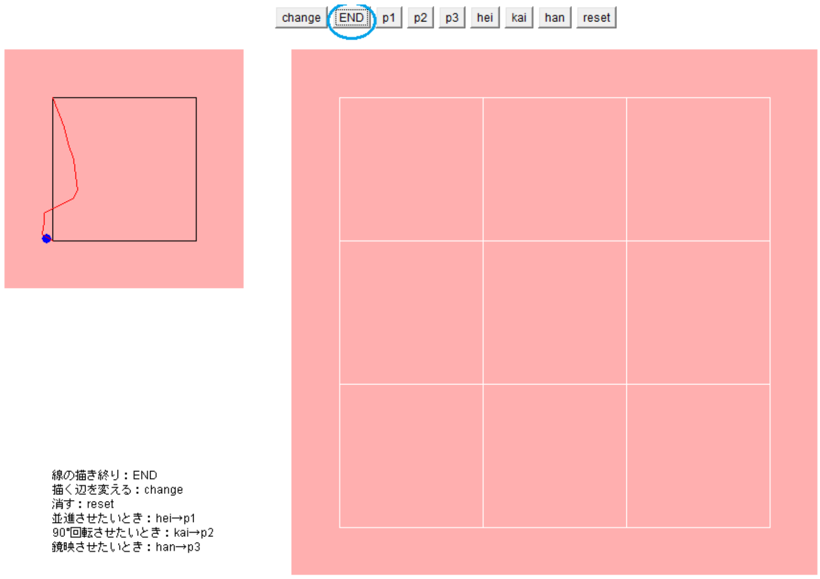

図 24　開始

次に han ボタンを押し鏡映を行う。

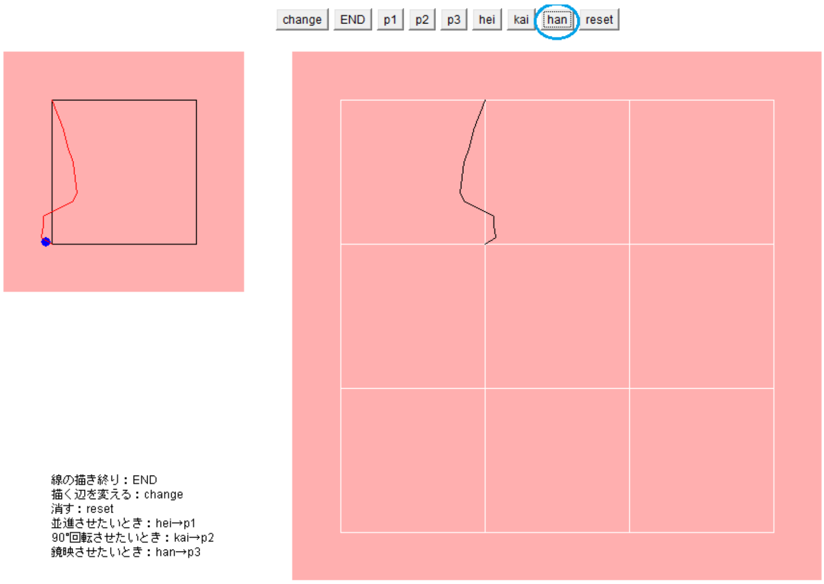

図 25　鏡映させ移動

そして最後に p3 ボタンを押すと鏡映でのタイリングが作れる。

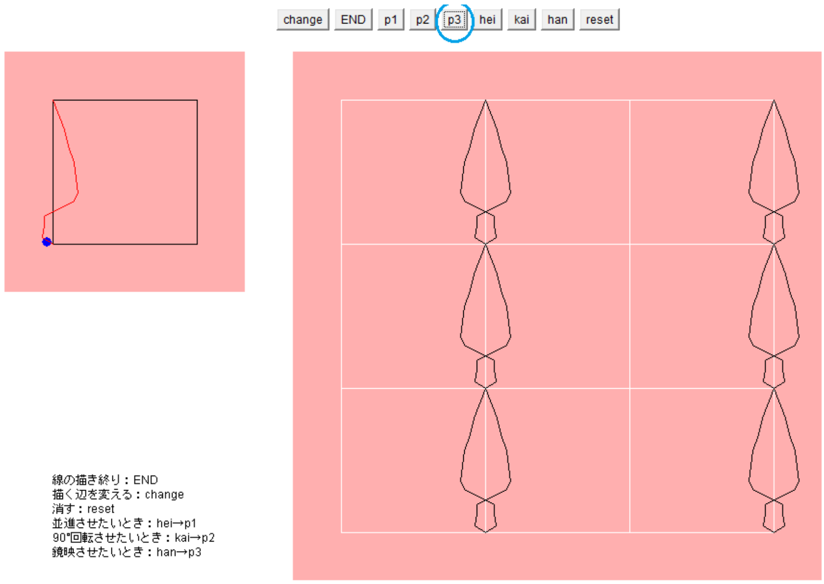

図 26　結果

これらの種類のタイリングを作成することができる
また change ボタンを押すことで右側の辺にも線を描くことができるようになっている。

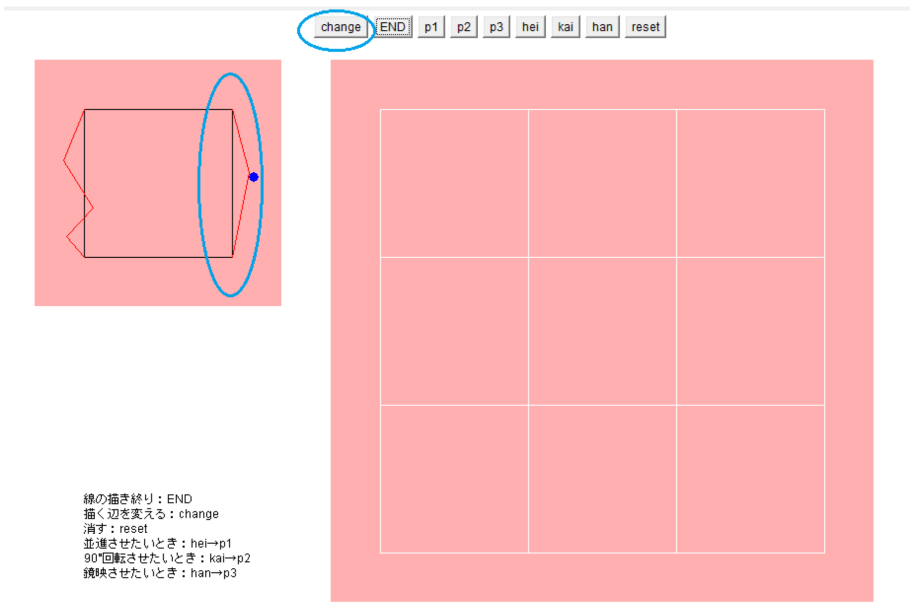

図 27　右辺

　これらの機能を使い並進と９０度回転と鏡映においてそれぞれ１辺を変更したもの、および２辺を変更したものの６種類のタイリングを作成することができる。

4.2.4　作品例

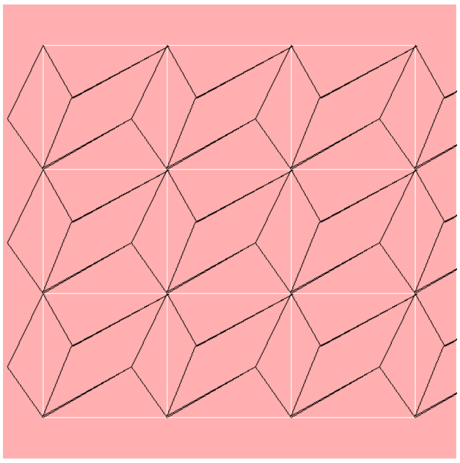

図 28　２辺を変更し、並進させたもの

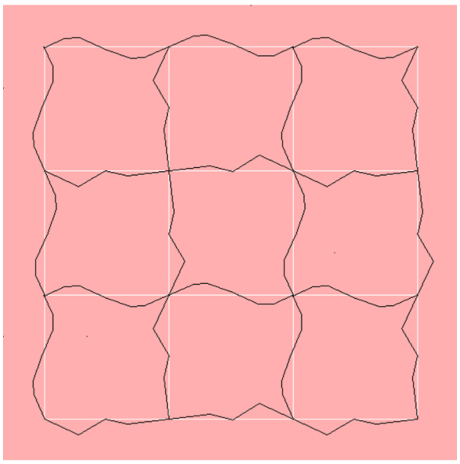

図 29　２辺を変更し、回転させたもの

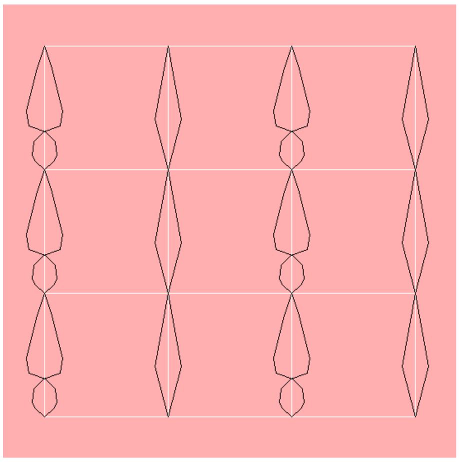

図 30　2 辺を変更し、鏡映させたもの

5　結論

今回エッシャーのタイリングからタイリングの基礎知識を学び、最終的に並進と９０度回転と鏡映においてそれぞれ 2 種類ずつの計 6 種類のタイリングを作る事ができるタイリング作成ツールを製作した。
この作成ツールを使うことによって、並進や回転、鏡映などの法則をボタンを押すだけで再現でき、誰にでも簡単に自分の好きな形のタイリングを作る事ができた。
今後の発展として、タイリングの色の着色や線の太さなどもっとユーザーの自由度を上げることが挙げられるだろう。

参考文献

[1] 杉原厚吉『[初版] エッシャー・マジック　だまし絵の世界を数理で読み解く』（東京大学出版会，2011 年）