

目次

1	序論	2
1.1	数理生物学	2
1.2	非線形性	3
1.3	非線形とカオス	3
1.4	本研究の目的	3
2	カオス	4
2.1	カオスの定義	4
2.2	Logistic 写像	4
2.3	カオスと数理生物学の関係	6
2.4	安定性	6
2.5	Lyapunov 指数	6
3	Lotka-Volterra モデル	8
3.1	2次元モデル	8
3.1.1	具体例と2次元モデルの方程式	8
3.1.2	平衡点	8
3.1.3	Runge-Kutta 法	9
3.1.4	2次元モデルのシミュレート	9
3.1.5	外的要因による影響	11
3.1.6	2次元モデルの Lyapunov 指数	12
3.2	4次元モデルにおけるカオスの確認	13
3.2.1	方程式の応用化	13
3.2.2	解の用意と個体数の挙動	14
3.2.3	3D プロットによる比較	15
3.2.4	正四面体による4次元座標表示	16
3.2.5	4次元モデルの Lyapunov 指数	19
3.2.6	Vano モデルの一般性	20
4	結論	24
4.1	正四面体座標系について	24
4.2	カオスと Lyapunov 指数の関係	24

1 序論

1.1 数理生物学

数理生物学は、生命科学・生物学の基本概念を数理モデルとして定式化し、その解析やシミュレーションによって生命現象を把握するという数理的アプローチが展開されており、『理論生物学』とも呼ばれる学問である [1]。具体的には、生物に関する諸現象（個体数の増減、体組織のパターン形成など）を常微分方程式や偏微分方程式などの計算を用い、数値的に解析して一般化された数式やグラフなどで表現していくものである。この学問は近年、生物現象を解明する上で着実に重要性を増している [2]。

しかし、実際の生物現象は単に数字で扱うには非常に複雑である。そのため、現時点では取り扱う数式は簡易な式にしたものが主流であり、基本的な振る舞いなどの基礎的研究が中心である。扱う現象を踏まえて妥当なレベルの仮定を置くことで数式やグラフなどでの表現を可能としている。

以下に、数理生物学のメカニズムを簡単な図にしたものを示す。

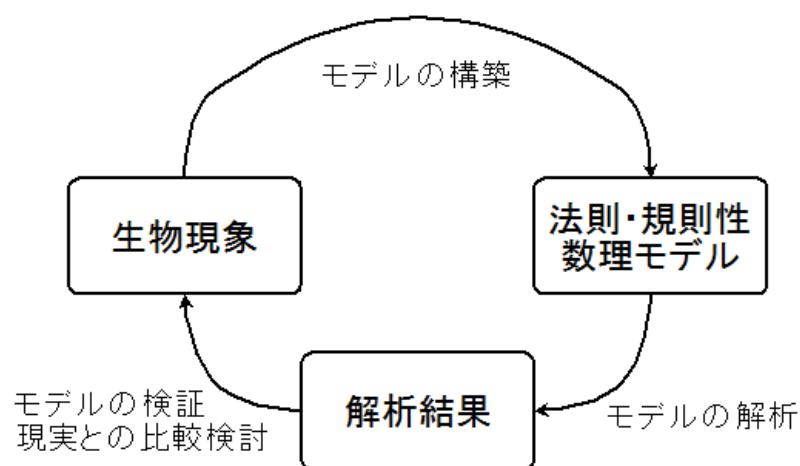


図1 数理生物学のメカニズム ([8] 参照)

生物現象には複雑な部分や解明されていない部分が多いため、様々な観点での研究が可能である。そのため、数理生物学は歴史が浅いにも関わらず、近年において飛躍的な発展を遂げている。なので、今後も多くの数理モデルが発表されるだろうと考えられる。

1.2 非線形性

線形性の定義としては、

- 加法性 . . . 変数 x, y に対して, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ が成り立つ.
- 斉次性 . . . 変数 x , 定数 a に対して, $f(ax) = af(x)$ が成り立つ.

の2つが同時に成り立つ演算を指す。一番簡単な例としては原点を通る一次関数（例えば $y = 2x$ ）が挙げられる。線形の式は、時間に対して解が比例増加するだけなので、初期値からの解の予測が非常に単純である。

非線形性とは、文字通り線形性のないことを指す。日常の中で現れるほとんどの数式は非線形であり、初期値からの解の増減が飛躍的に変化するなど、解の振る舞いが線形性に比べて圧倒的に複雑化される。

なお、線形の式であっても、限界を超えると非線形となる。例えば、力 F ・ばね定数 k ・ばねの伸び x から、

$$F = kx \tag{1}$$

が成り立つとする（これを線形ばねという）。この式は線形性の定義に沿っているので線形であるが、ばねの伸び幅の限界を超えて伸ばすと、伸びきって戻らなくなったり、力の加え方によってはねじ切れたりもするだろう。途端にこのばねは線形性が失われてしまう。

1.3 非線形とカオス

本研究では、カオスと呼ばれる非線形の数理モデルに現れる現象に注目する。

非線形の式は前述の通り解の振る舞いが複雑であり、比例した値や足し合わせでは成立しないものが多くを占めている。複雑であるが故に、予期しない解の振る舞いなどが発生することがある。振る舞いを予測できない現象がカオスであり、非線形性にカオスの存在は常に付き従う問題である。（カオスについては後述で詳しく触れる。）

1.4 本研究の目的

Lotka-Volterra モデルと呼ばれる数理生物学の具体的なモデルを取り扱い、そのモデルの特徴の理解を深めるとともに、実際の生物現象との具体的な関連付ける。また、非線形であるこのモデルの式からカオス現象が導き出せるかを調べる。

J.A.Vano ら [5] は「4種の生物種モデルにおいてカオスが出現する」と述べているが、このモデルの一般性を調べることも目的の1つとした。

2 カオス

2.1 カオスの定義

カオス (chaos) とは、初期値のほんの僅かな違いで解軌道や収束する値が、極めてランダムな挙動を示す現象を指す。この特徴を「初期値鋭敏性」という。

ある初期値 α から解軌道や収束点などを求める。カオスではない式だと、 α から僅かしか変わらない初期値 β がどのような解軌道を描き、どこへと収束していくかを予測することは難しくはない。それに対してカオスな式では、 β からの解軌道などは α のそれらと比べてランダムに変化してしまい、予測が至極困難となってしまう。

初期値鋭敏性により、カオスとなる方程式を解析する際には、無限の精度で一致しないと実際の数値と誤差が生じてしまう。コンピュータで計算しても、精度は無限でないため誤差が発生してしまい、解軌道が変化してしまうため事実上未来の予測ができないのである。

2.2 Logistic 写像

カオスを理解する上で重要となるのが、Robert May によって研究された Logistic 写像である [4]。

Logistic 写像は、Logistic 方程式と呼ばれる差分方程式を用いて表される。差分方程式とは、 x_n の値が確定すれば、次の x_{n+1} が確定する方程式を意味する。

Robert May が考えた Logistic 方程式は、次の漸化式になる。

$$x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n) \quad (2)$$

n は世代を表す ($n = 0, 1, 2, \dots$)。 x_n は n 世代における生物 x の個体数を示す指標である ($0 \leq x_n \leq 1$)。つまり、 x_{n+1} は x_n の次の世代を表すことになる。 R は生物 x の繁殖率を表す ($0 \leq R \leq 4$)。

ここで x_n の解軌道について調べる。 x_n の解軌道は R の値によって大きく変化する。具体的には、 x_n の挙動は次のようになる。

- $0 \leq R \leq 1$ \dots 0 に単調収束
- $1 < R \leq 2$ \dots 固定点 $\frac{R-1}{R}$ に近づく (単調収束)
- $2 < R \leq 3$ \dots 固定点 $\frac{R-1}{R}$ に近づく (振動収束)
- $3 < R \leq R_\infty$ \dots 2 のべき乗個の周期点に振動収束
- $R_\infty < R \leq 4$ \dots 特定の周期が無く、極めてランダムな挙動 (カオス状態)

R_∞ は Mitchell Feigenbaum の名にちなんで名づけられた、Feigenbaum 点と呼ばれる臨界値である。具体的には $R_\infty \simeq 3.5699456$ である。

これらを実際に確認するため、シミュレートを行った。 R を 0 から 4 へと少しずつ変化させていき、それぞれの R について x_n がどのように収束するかをグラフに示す。以下に結果のプロット画像を示す。

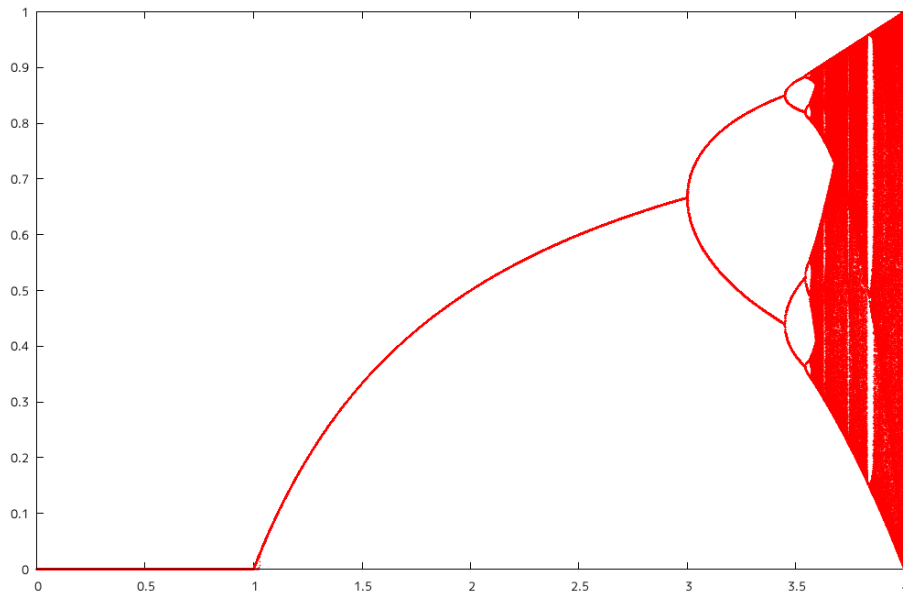


図2 Logistic 写像 横軸： R 縦軸： x_n の収束点

今回は R を 0.001 ごとに区切り, それぞれの R についての初期値 x_0 を 0.0025 ごとに与え, $n = 1000$ の時点の x_n をプロットした. 図2から, 前述のような挙動になっていることが見て取れる.

$R = R_\infty$ 前後から $R = 4$ までの部分を読み取りやすくするため, 次に R が 3.5~4 の部分を拡大した図を示す.

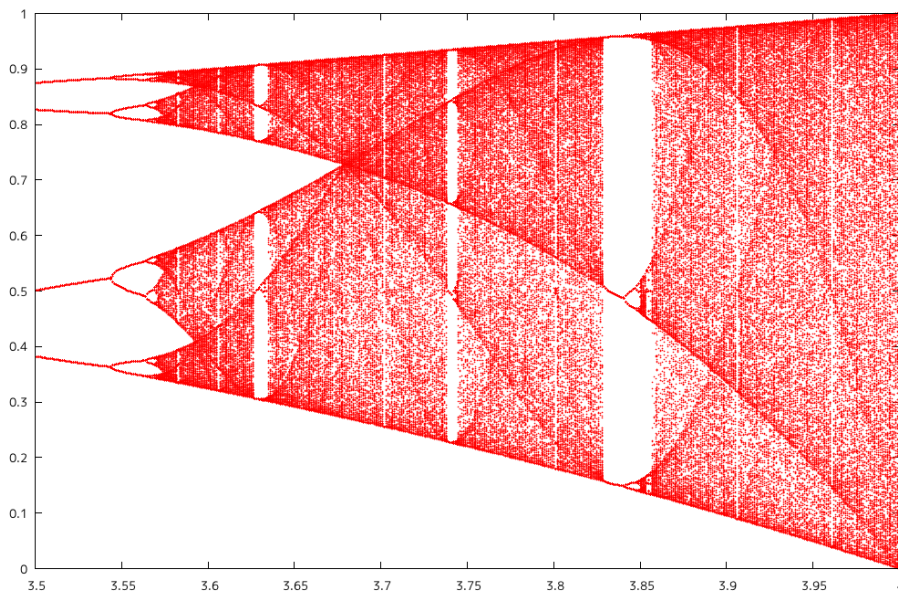


図3 Logistic 写像の拡大図 横軸： R 縦軸： x_n の収束点

$R = R_\infty \simeq 3.5699456$ の部分を境に, 解の収束点が極めてランダムに広がっていることが見て取れる. そして $R = 4$ になると, $0 \leq x_n \leq 1$ の区間全体に収束点が広がっているのが分かる. しかし, R_∞ 以降にある

程度まとまって収束している領域がいくつか存在する。これを「カオスの窓」と呼ぶ。カオスの窓が生まれる理由としては、多量に存在する不安定な周期軌道のうち、いずれかの解が安定となり発生するという説などあるが、現状ではメカニズムがはっきりとしていない。

2.3 カオスと数理生物学の関係

Logistic 写像から分かるように、カオスの発生する領域では極僅かな初期値の違いでも、写像を繰り返すうちに収束点が大きく変わってしまう。これを「バタフライ効果」と呼ぶ。「北京で今日蝶が羽を動かして空気をそよがせた」とすると、来月ニューヨークでの嵐の生じ方に変化がおこる」[9] という、ローレンツによる例えが有名である。生物学においても、この効果は個体数や遺伝情報などの未来に大きな影響を及ぼす。

しかし、カオス理論の本質として、収束点を決定論的に予測することはできないが、その確率は記述できる。すなわち、未来に何が起こるか、その順序は正確には分からないが、それらが起こる確率（頻度）なら予測できるということである。天気を例に挙げると、天気予報の数値モデルはカオス的ではあるが、近年かなり高級なモデルになっており、短期の予測であればほぼ正確なものになっている。

2.4 安定性

平衡点は $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ において、時間変化に対して不変、すなわち $\frac{dx}{dt} = 0$ である点のことを指す。しかし、平衡点は一括りには出来ず、安定性によって種類分けされる。

方程式が記述する解の安定性とは、以下の3つから定義される。

- 安定・・・解軌道が $t \rightarrow \infty$ で臨界点近傍に留まり続ける状態
- 漸近安定・・・平衡点が安定で、かつ全ての解軌道が $t \rightarrow \infty$ で平衡点に収束する状態
- 不安定・・・平衡点が安定でないとき

平衡点の近くで力学系（一定の規則に従い、時間に伴って状態が変化するモデル）を線形化する方法では、局所的な安定性しか調べることが出来ない。大域的な安定性を調べるためには、Lyapunov 指数と呼ばれるものが用いられる。

2.5 Lyapunov 指数

Lyapunov 指数とは、僅かにずれた解の軌道が離れていく度合いを表したものである。A.M.Lyapunov によって提案されたため、このような名前となった。本節では [6] に基いて、これを定義する。

まず、 $x_{n+1} = f(x_n)$ と置く。つまり初期値 x_0 の次の解 x_1 は $x_1 = f(x_0)$ となる。

初期値に微小なズレ ϵ_0 を加え、 $f(x_0 + \epsilon_0)$ とする。

これを用いると、対応する解 $x_1 + \epsilon_1$ は $f(x_0 + \epsilon_0)$ の Taylor 展開により、

$$x_1 + \epsilon_1 \simeq f(x_0) + f'(x_0)\epsilon_0 + \dots \quad (3)$$

となり、 $x_1 = f(x_0)$ なので、1 次の精度で $\epsilon_1 = f'(x_0)\epsilon_0$ となる。同様に $\epsilon_2, \epsilon_3, \dots$ と求めていくと、

$$\epsilon_n = f'(x_{n-1})f'(x_{n-2})\dots f'(x_0)\epsilon_0 = \left(\prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i)\right)\epsilon_0 \quad (4)$$

となる。

次に、 ϵ_n の絶対値を取り、

$$|\epsilon_n| = |\epsilon_0|e^{nx_n} \quad (5)$$

と定義する。式 (4) と式 (5) から x_n を求めると、

$$x_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log |f'(x_j)| \quad (6)$$

となる。

この極限 (limit) を取ったものが Lyapunov 指数 λ である。つまり、

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad (7)$$

となる。式 (6) と式 (7) から、 λ は以下のように定義される。

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log |f'(x_j)| \quad (8)$$

ここで、 e^λ について考える。 $y = e^\lambda$ のグラフを以下に示す。

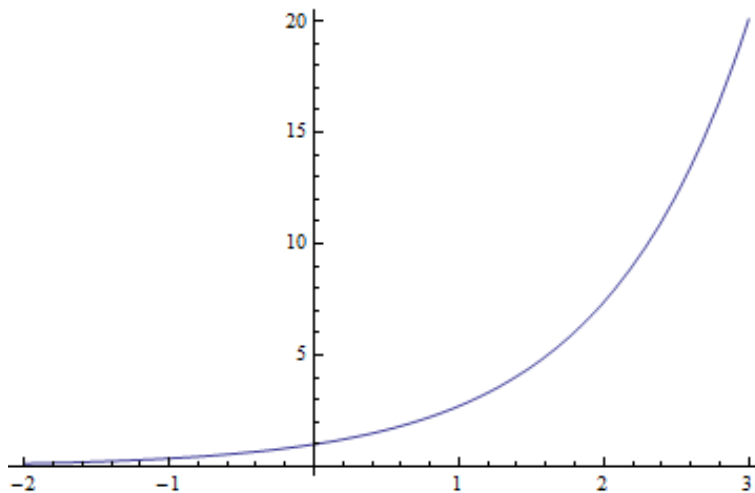


図4 $y = e^\lambda$ のグラフ 横軸： λ 縦軸： y

図から、 λ が正の値を取ると $e^\lambda > 1$ であることが見て取れる。逆に、 λ が負の値を取ると $e^\lambda < 1$ になっている。

式 (5) の e^{nx_n} を e^λ に置き換えて考えたとき、 λ が正の場合、初期時のずれ $|\epsilon_0|$ に非常に大きな値が乗算されてしまい、収束後のずれ $|\epsilon_n|$ が大きくなる。即ち、ほんの少しの初期値の違いで解軌道が変わってしまい、大域的に不安定な式である (カオスである) ことが分かる。よって判定したい式 $f(x)$ を用いて λ を求めると、 $f(x)$ が初期値に対して大きくずれているか否か、つまりカオスか否かを知ることができる。

3 Lotka-Volterra モデル

Lotka-Volterra モデルは、捕食者と被食者の個体数の関係をモデル化したものである [3]。Alfred J. Lotka (1880-1949) と Vito Volterra (1860-1940) が独立でモデル化したもので、捕食者と被食者が互いに影響しあって増減のパターンを繰り返すことを示したモデルである。

3.1 2次元モデル

本研究では、 N 種類の生物を扱う同モデルを「 N 次元の Lotka-Volterra モデル」と表記する。この節では、まず 2 次元の Lotka-Volterra モデルを扱う。つまり、2 種類の生物の個体数関係を考える。

3.1.1 具体例と 2 次元モデルの方程式

本節では、キツネ（捕食者）とウサギ（被食者）を例に出す。前提として、ウサギの餌は無尽蔵にあり（ウサギが飢えることを想定しない）、キツネ以外の天敵は想定しないものとする。また、キツネはウサギしか食べない（ウサギの個体数が減ると飢える）ものとする。つまり、キツネがいなければウサギの個体数は単調増加し、ウサギがいなければキツネの個体数は 0 匹になるまで単調減少する。

ウサギの個体数を x 、キツネの個体数を y とし、上記の関係を式に示すと次のような連立微分方程式が得られる。微分方程式とは、未知関数と導関数（微分可能な関数を微分したときに新しく得られる関数）を含む関数方程式を意味する。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a_1 - b_1 y) & (9a) \\ \frac{dy}{dt} = -y(a_2 - b_2 x) & (9b) \end{cases}$$

ここで、 a_1 , a_2 , b_1 , b_2 は正の定数とする。

式 (9a) の左辺は x の変化量、つまり時間が経過したときに x がどのように増減するかを示す値である。この値がプラスだとウサギの個体数が増え、マイナスだと個体数は減る。また、この値の絶対値が大きいとウサギの数の増え方や減り方が大きく、絶対値が小さいと個体数の変化も乏しい。式 (9b) の左辺も同様に y の変化量を示す。

式 (9a) を展開したときの第 1 項は x 自身の個体数による増え幅を示す。 a_1 が大きいと x の値も大きくなり、 x の自然増加率が高くなる。第 2 項は y が x に及ぼす影響度を示す。第 2 項が 0、つまりキツネが絶滅していると前述のように x は単調増加する。第 2 項が第 1 項を上回ると x の変化量がマイナスになり、 x が減る。

一方、式 (9b) を展開したときの第 1 項は y 自身の個体数による減り幅を示す。 a_2 が大きいと y の値がマイナス方向に大きくなり、 y の自然減少率が高くなる。第 2 項は x が y に及ぼす影響度を示す。第 2 項が 0、つまりウサギが絶滅していると前述のように単調減少する。そして y も 0 になる（キツネも絶滅する）と第 1 項も 0 となり、 y の変化量が 0 になる。

3.1.2 平衡点

ここで述べる平衡点とは、 x と y の変化量が共に 0 になる、つまりウサギとキツネ両方の個体数に増減の無い不変状態である座標点を指す。式 (9a) と式 (9b) の左辺を 0 とすることで平衡状態が成り立つ連立方程式

ができる。

この連立方程式を解くと、平衡状態の解 (x_0, y_0) は、

$$(x_0, y_0) = (0, 0), \left(\frac{a_2}{b_2}, \frac{a_1}{b_2} \right)$$

となる。前者の解は互いに絶滅した状態である。

3.1.3 Runge-Kutta 法

Runge-Kutta 法とは、常微分方程式に対して高精度な計算を簡単に行える手法である [3]。常微分方程式とは、1つの変数関数を導関数とした微分方程式を表す。

この手法は、 t の値が微小な刻み幅 Δt で1ステップ進むときに、いくつかの推測値を出し、それらの加重平均（重みを考慮した平均）を取るといったものである。一般的によく利用されるのは、4つの推測値から加重平均を出す「4次精度の Runge-Kutta 法」と呼ばれるものである。

関数 $x(t_n)$ に対する微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (10)$$

を考える。

この式を解くときに、点 (t_n, x_n) から次の点 $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ における x_{n+1} の値は、

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (11)$$

とすることで求められる。

ここでの $k_1 \cdots k_4$ は推測値を表し、以下の式で求められる。

$$\begin{cases} k_1 = \Delta t f(t_n, x_n) & (12a) \\ k_2 = \Delta t f(t_n + \frac{\Delta x}{2}, x_n + \frac{1}{2}k_1) & (12b) \\ k_3 = \Delta t f(t_n + \frac{\Delta x}{2}, x_n + \frac{1}{2}k_2) & (12c) \\ k_4 = \Delta t f(t_n + \Delta t, x_n + k_3) & (12d) \end{cases}$$

k_1 で t_n を用いて x_{n+1} を推測し、 k_2 で k_1 を用いて x_{n+1} を推測し、 k_3 と k_4 も同様に推測していくことで推測値を揃える。

これを繰り返すことで常微分方程式を解くことができる。誤差を極限にまで抑えたプログラムが可能になるので、解の出力やグラフの描写ができるようになる。

3.1.4 2次元モデルのシミュレート

本研究では式 (9a) と式 (9b) を、4次精度の Runge-Kutta 法を用いてプログラムを組み、実際にシミュレートした。

本節では、定数の値を $a_1 = 10$, $a_2 = 8$, $b_1 = 2$, $b_2 = 2$ と設定した。つまり前述の平衡状態は $(x, y) = (0, 0), (4, 5)$ となる。初期値 (x_0, y_0) は $(2, 2)$ と2つの平衡状態の計3つの値を設定した。

以下の図5に x の時間変化、図6に y の時間変化のシミュレート結果を示す。

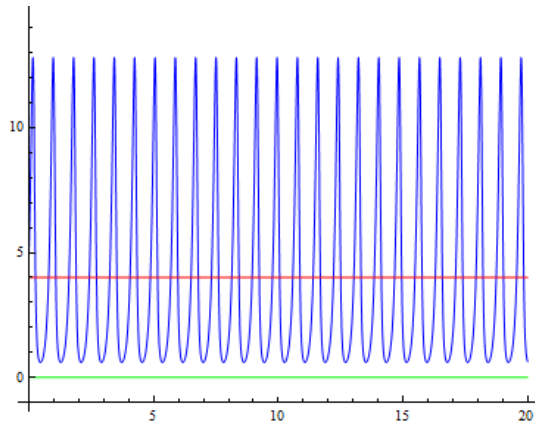


図5 x の時間変化 横軸：時間 t (s) 縦軸： x
 青線：初期値 $(2, 2)$ 赤線：初期値 $(4, 5)$
 緑線：初期値 $(0, 0)$

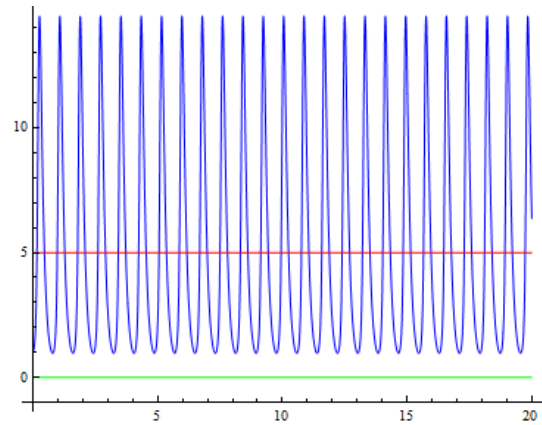


図6 y の時間変化 横軸：時間 t 縦軸： y
 青線：初期値 $(2, 2)$ 赤線：初期値 $(4, 5)$
 緑線：初期値 $(0, 0)$

初期値が $(0, 0)$ と $(4, 5)$ のとき、縦軸の値が一定である。つまり、時間に対して互いの個体数が変化していない平衡状態であることが示されている。

次に初期値が $(2, 2)$ のときに着目すると、互いに増減を繰り返すようなグラフになった。互いのグラフを時刻を揃えて照らし合わせ、 x の増減と y の増減を比較すると、ずれを伴いながらも同じ頻度で増減していることが読み取れる。

更に、 x と y のデータをプロットすると以下の図7が得られる。

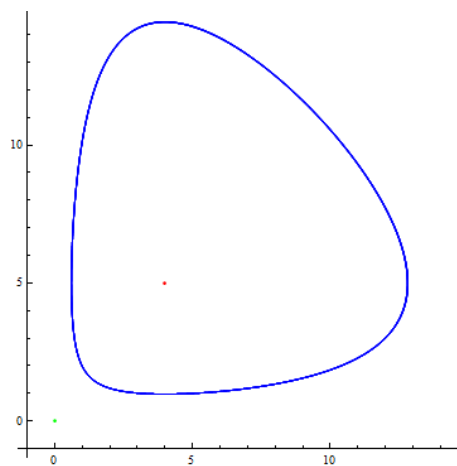


図7 個体数増減の対応 横軸： x 縦軸： y
 青線：初期値 $(2, 2)$ 赤線：初期値 $(4, 5)$ 緑線：初期値 $(0, 0)$

初期値が $(2, 2)$ のとき、解の軌道が円を描くような形になっていることが分かる。それに対し、初期値が $(0, 0)$ と $(4, 5)$ のとき、解が不変であることが読み取れる。

再び、初期値が $(2, 2)$ のときに着目する。まずウサギの個体数が増えていくと、餌であるウサギが増えたのでキツネの個体数も増える。捕食者であるキツネが増えたのでウサギの変化量がマイナスになり、ウサギの個体数が減る。餌であるウサギが減るとキツネが飢えて死に、キツネの個体数も減る。捕食者であるキツネが

減ったので、ウサギの個体数が再び増える。

このように、互いに個体数の増減を繰り返すようなグラフになった。前述の x と y がずれを伴う時間変化になることも、これで説明が出来る。そして解が周回し、それぞれの個体数が5~6倍の変化を経ても、絶滅したり一方的に増えたりせずに再び同じ軌道を描いていることが見て取れる。つまり、この方程式の解軌道は閉じていることが理解できる。

ここで、解軌道のベクトル場がどのようになっているのかを実際にプロットを行った。結果の x と y をプロットしたグラフを以下に示す。

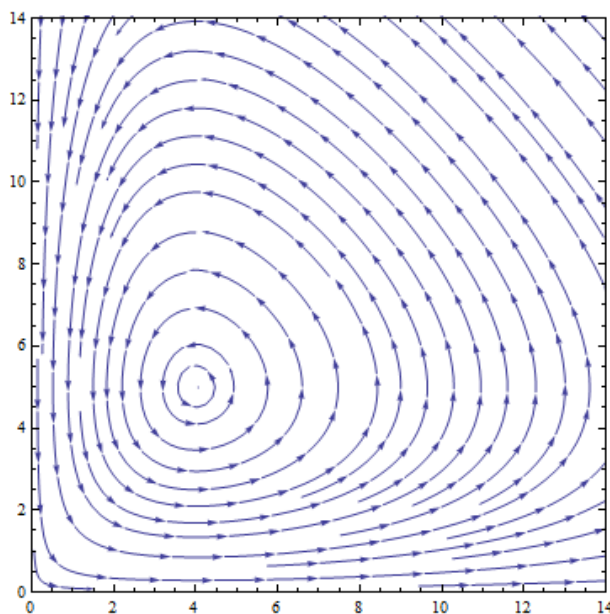


図8 図9の解軌道のベクトル場 横軸： x 縦軸： y

平衡点 $(4, 5)$ を囲むような、反時計回りの円軌道で解が動いていることが見て取れる。前述の説明の通りに動いていることが理解できる。

3.1.5 外的要因による影響

ここで、他の要因で値が変化した場合を想定する。具体的な例を挙げると、キツネの間で病気が流行し、キツネの個体数だけが減少したときを考える。例えば (x, y) が $(4, 4)$ から $(4, 2)$ へと移動したと仮定する。このとき、天敵であるキツネが減ったことをウサギは素直に喜んでいいのだろうか。確かにその瞬間はキツネの個体数は減っているが、 $(4, 4)$ の点付近の軌道と $(4, 2)$ の点付近の軌道を見比べれば分かるとおり、ある瞬間のキツネの個体数が（少なくともキツネの個体数の最大値は）、キツネが減少する前よりも寧ろ増えている期間が存在することが分かる。

Lotka-Volterra モデルは、捕食者と被食者の個体数の増減を関連付けるだけでなく、このような応用も可能なモデルであることがシミュレートすることで理解できた。

3.1.6 2次元モデルの Lyapunov 指数

2次元モデルにおける、前述の定数の場合の Lyapunov 指数を、実際にプログラムで計算した。この際、有限な値でないとプログラムを動かさないので、 $n \rightarrow \infty$ ではなく、解がおおむね収束したと視認できた $n = 3000$ の時点での Lyapunov 指数を出力するようにプログラムを組んだ。

ここではまず、式 (9a) および (9b) を

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F_1(x, y) & (13a) \\ \frac{dy}{dt} = F_2(x, y) & (13b) \end{cases}$$

とおく。一方、Lyapunov 指数の計算から $x_2 = f(x_1)$ なので、

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x + F_1(x, y)\Delta t & (14a) \\ f_2(x, y) = y + F_2(x, y)\Delta t & (14b) \end{cases}$$

と対応し、これらを微分すれば良い。

しかし、これらを展開すると変数は x と y の2つであり、どちらで微分するかによって結果が変わってしまう。また、時間 t で微分すると0になってしまう。 $f_1(x, y)$ は x で、 $f_2(x, y)$ は y で微分したいので、偏微分を行う。偏微分とは、複数の変数関数を導関数とした微分を表す。

実際に $f_1(x, y)$ を x について、 $f_2(x, y)$ を y についてそれぞれ微分すると、

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 1 + (a_1 - b_1 y)\Delta t & (15a) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 1 + (-a_2 + b_2 x)\Delta t & (15b) \end{cases}$$

となる。 $\frac{\partial f}{\partial x}$ と $\frac{\partial f}{\partial y}$ がそれぞれ $f'(x)$ と $f'(y)$ に該当するので、これを利用して f_1 の Lyapunov 指数 λ_x と f_2 の Lyapunov 指数 λ_y を計算する。

式 (8) では刻み幅 Δt は1として計算されていたため考慮されていなかったが、本研究では $\Delta t = 0.01$ として計算を行った。そのため、本研究では式 (8) をそのまま用いず、 Δt を除算したものをを用いる。

Lyapunov 指数の n の対する推移を図9に示す。

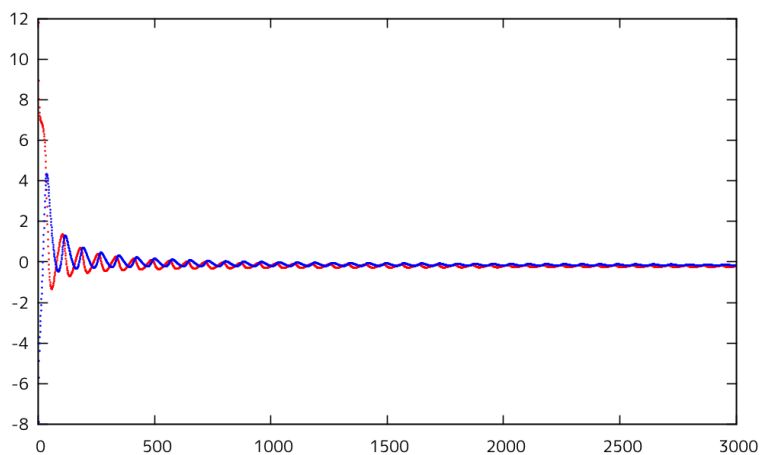


図9 2次元モデルの Lyapunov 指数 横軸： n 縦軸： λ
赤線： λ_x 青線： λ_y

$n = 3000$ 時点で $\lambda_x \simeq -0.20$, $\lambda_y \simeq -0.18$ であった。どちらもおよそ 0 に近い値だが負である。つまり、この方程式は初期のずれに対し時間経過後のずれが拡大せず、カオスにならないことが分かる。

3.2 4次元モデルにおけるカオスの確認

では、Lotka-Volterra モデルにおいて、カオスが起ころうかどうかを考える。カオスの有無の確認を行う上で、J.A.Vano ら [5] によると、1~3次元ではカオスが発生しない。しかし、4次元において r_i と a_{ij} の値を総当たりで探索したところ、カオスとなる組み合わせが発見された。

この結果を基に、この節では4次元モデルの解析を行う。

3.2.1 方程式の応用化

ここで、式 (9) のままでは2次元のモデルしか取り扱えないので、他の次元にも応用できるような式にする。

$$\frac{dx_i}{dt} = r_i x_i \left(1 - \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j\right) \quad (16)$$

N は生物の種類 (N 次元) を、 x_i は生物 i の個体数を表す。 r_i は生物 i の成長率を表し、式 (9) の a に該当する定数である。 a_{ij} は生物 j が生物 i に及ぼす影響度を表し、式 (9) の b に該当する定数である。

前述の2次元のモデルにおいては捕食者が被食者を一方的に減らすような関係であったが、この式を用いることで生物間の関係を定数の与え方次第で変化させることができる。人間と蜂を例に挙げると、互いに捕食こそしないものの、蜂は人間を攻撃することで、対する人間は蜂を殺虫することで個体数に影響を与えている。つまり、互いに個体数を減らし合う関係になる。

この例について、実際に定数を以下のように与えた。生物1を人間、生物2を蜂とする。

$$r_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.7 \end{bmatrix}, a_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 \\ 1.5 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

本研究において、定数の与え方は J.A.Vano ら [5] に準じるものとする。具体的には、 r_1 は成長率の基準として1に設定し、 a_{ij} において $i = j$ となるもの、つまり自身への影響度は同じく1に統一する。

蜂の個体数は人間の個体数よりも少ない数に設定し、人間から蜂への影響度は逆のそれよりも高く設定した。このパラメータで個体数の変遷を実際に確認する。個体数の初期値はそれぞれ1とする。

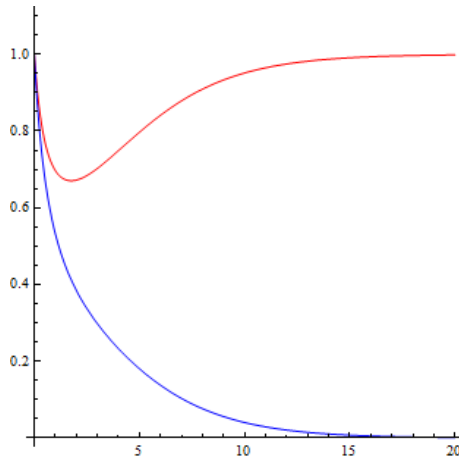


図 10 人間と蜂の個体数の変遷 横軸：時間 t 縦軸：各生物の個体数 x_i
赤線：人間 青線：蜂

図から、この定数の与え方にするとこの場合には $t \simeq 17$ で蜂の個体数が 0 になる（絶滅する）ことが読み取れる。

このように、定数を設定することで様々な条件のモデルを構築することができる。また、その条件ではどのような個体数の変遷になるか、実際に確認することができる。

3.2.2 解の用意と個体数の挙動

前述の J.A.Vano らの論文によると、カオスとなる定数の組み合わせ（以降 Vano モデルと呼ぶ）は、

$$r_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.72 \\ 1.53 \\ 1.27 \end{bmatrix}, a_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 1.09 & 1.52 & 0 \\ 0 & 1 & 0.44 & 1.36 \\ 2.33 & 0 & 1 & 0.47 \\ 1.21 & 0.51 & 0.35 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

となる。

本研究では、この数値の一般性について調べることにする。すなわち、式 (18) の値が少しでも異なるときに、カオスとなるのかどうか、という問題である。

Vano モデルの他に、以下の組み合わせ（以降モデル 1 と呼ぶ）を用意した。

$$r_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.3 \\ 0.43 \\ 1.33 \end{bmatrix}, a_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 1.4 & 2.2 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0.2 & 1.6 \\ 1.5 & 0 & 1 & 0.8 \\ 1.2 & 0.5 & 0.4 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

横軸を時間、縦軸を各生物の個体数とし、それぞれグラフをプロットした。

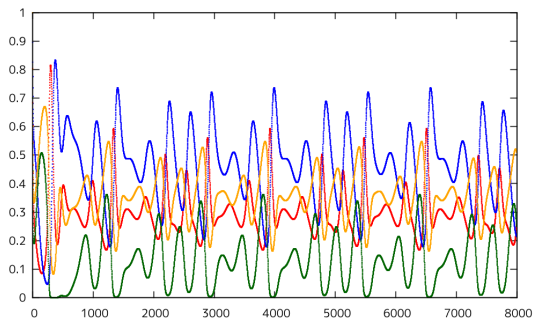


図 11 Vano モデルの振る舞い 横軸：時間 t 縦軸：個体数 x_i
赤線： x_1 青線： x_2 緑線： x_3 橙線： x_4

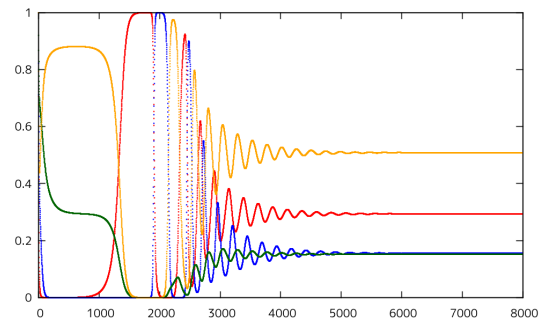


図 12 モデル 1 の振る舞い 横軸：時間 t 縦軸：個体数 x_i
赤線： x_1 青線： x_2 緑線： x_3 橙線： x_4

全ての生物個体数の初期値は 1 とした。図 11 は不規則な変動を繰り返しているのに対し、図 12 は平衡点に到達している。つまり、Vano モデルは周期的にもランダムにも取りうる解軌道を描いたのに対し、モデル 1 は個体数がそれぞれ収束していくことが読み取れる。

3.2.3 3D プロットによる比較

実際にカオスの有無を判断するには、やはり初期値を僅かにずらしたときの状態の比較が必要である。生物 4 の個体数を、1（青色）と 0.9（橙色）に分け、先ほどの 2 つのモデルそれぞれにおいて出力する。

軌道を 3D 表示で見ると、4 次元のうち 3 次元を出力することで 3 次元座標で図をプロットした。今回は生物 4 以外の 3 種類の生物の個体数を、それぞれの座標軸としてプロットを行った。

以下にプロット結果を示す。

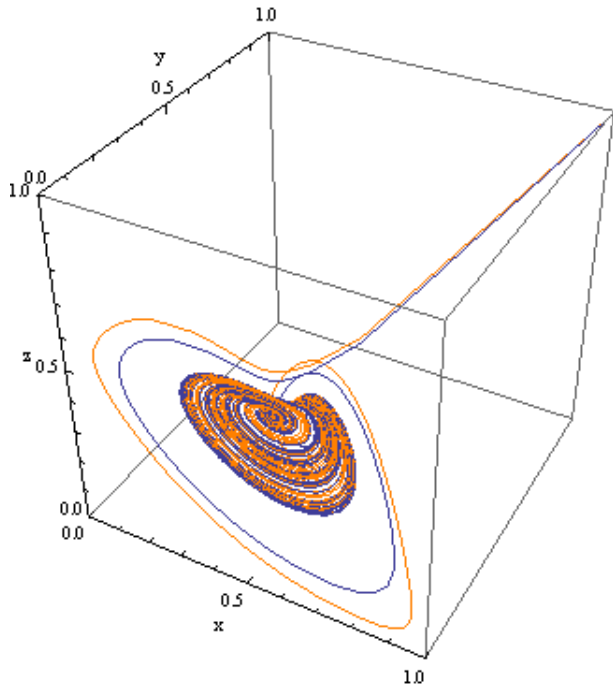


図13 Vano モデルの振る舞い
 x 軸：生物1 y 軸：生物2 z 軸：生物3

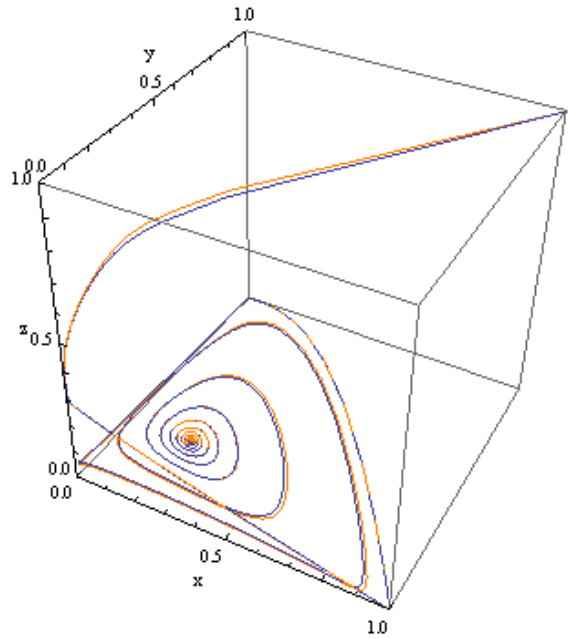


図14 モデル1の振る舞い
 x 軸：生物1 y 軸：生物2 z 軸：生物3

どちらも2つの初期値の解軌道はある程度のずれが生じているが、Vanoモデルの収束点は同じになるようだ。したがって、Vanoモデルがカオスとは言えない可能性も出てくる。モデル1では、同じ点に収束していく様子が見て取れる。

3.2.4 正四面体による4次元座標表示

前述では4次元のうち3次元を取り出し、3Dプロットで解を表示させていた。しかし、生物1, 2, 3を3D表示しただけでは生物4の振る舞いが当然ながら読み取れない。特に今回は生物4の初期値をずらしたので、生物4の振る舞いの違いが分からないのは問題である。生物1, 2, 3の3D表示とは別に、それ以外の組み合わせを少なくとももう1つ用意すれば良いのだが、結果のプロットを行う上で図はやはり1種類のみを羅列したい。

そこで、正四面体を座標系として3Dプロットすることが対策として考えられた[5]。正四面体の重心を原点とし、重心から各頂点に伸ばした線分4つをそれぞれの軸として、4次元を1度にプロットする方法を用いる。以下に正四面体状の座標系のイメージ図を示す。

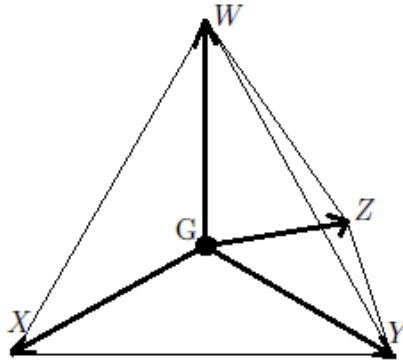


図 15 正四面体座標系のイメージ

X, Y, Z, W はそれぞれの座標軸を, G は座標系の原点 $(0, 0, 0, 0)$ を示す.

本節では, この座標系を実際に計算で表現するにあたって, 1 辺の長さが 1 の正四面体を想定する. 3D 座標の原点 $(0, 0, 0)$ を点 A としたとき, 残りの点 B, C, D の座標はそれぞれ $(1, 0, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3})$ となり, 重心 G は $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{12})$ となる. その正四面体を, 重心 G が原点 $(0, 0, 0)$ となるよう平行移動させる. そのときの点 A, B, C, D の座標はそれぞれ $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{12})$, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{12})$, $(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{12})$, $(0, 0, \frac{\sqrt{6}}{4})$ となる.

この座標系において, $\vec{X} = \vec{GA}$, $\vec{Y} = \vec{GB}$, $\vec{Z} = \vec{GC}$, $\vec{W} = \vec{GD}$ とする. そのとき, $(X, Y, Z, W) = (a, b, c, d)$ の点は,

$$a\vec{X} + b\vec{Y} + c\vec{Z} + d\vec{W} \quad (20)$$

で求めることができる. 例えば, $(X, Y, Z, W) = (1, 2, 3, 4)$ の点を 3D プロットする時の座標は $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2})$ になる.

ここで, 実際に生物 1~4 の個体数を上記の変換に当てはめ, 先程と同様の初期値の条件を与えてプロットを行った. その際に, 正三角形の座標系も指標として同時にプロットした.

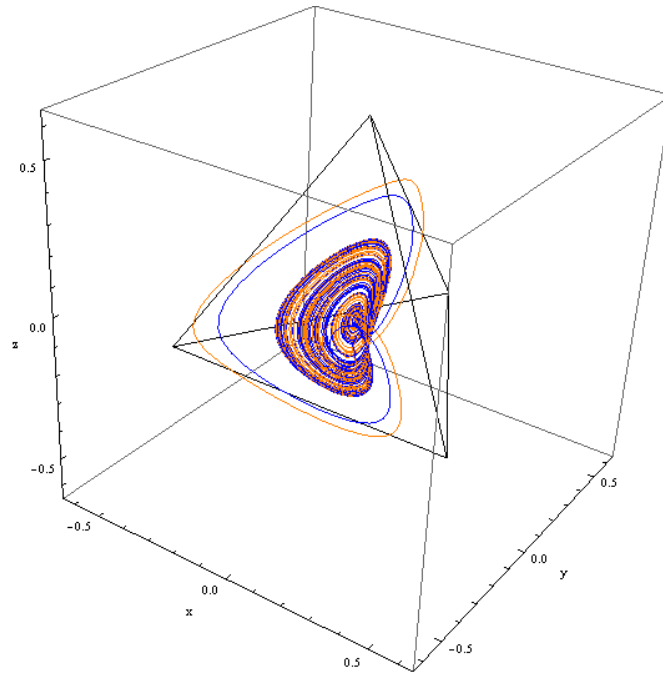


図 16 Vano モデルの正四面体座標系表示

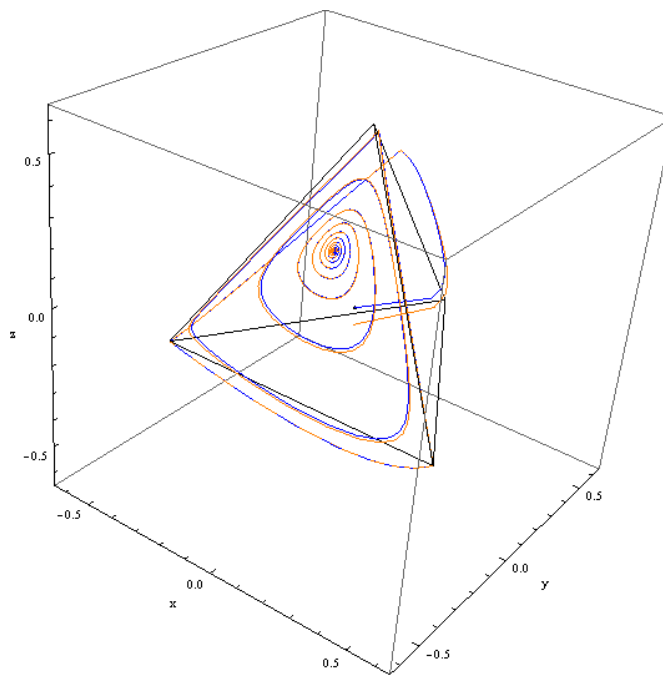


図 17 モデル 1 の正四面体座標系表示

周囲の立方体の x, y, z はプロット上の座標を示す．また，正四面体の底面左側が生物 1，底面右下側が生物 2，底面右上側が生物 3，上側が生物 4 の，それぞれの個体数の座標軸の方向にあたり，正四面体の中心の黒点は座標系の原点を表す．

4次元を同時に表示しても、3次元のみを表示させた時と結論が変わらず、どちらのモデルも初期値をずらしても同じ収束点になることが確認できた。

3.2.5 4次元モデルの Lyapunov 指数

ここで、2次元モデルのときと同様に Lyapunov 指数をプログラムで計算した。
微分すべき方程式はそれぞれ、

$$\begin{cases} f_1(x, y, z, w) = x + \frac{dx}{dt} \Delta t & (21a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_2(x, y, z, w) = y + \frac{dy}{dt} \Delta t & (21b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_3(x, y, z, w) = z + \frac{dz}{dt} \Delta t & (21c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_4(x, y, z, w) = w + \frac{dw}{dt} \Delta t & (21d) \end{cases}$$

となり、それらをそれぞれ偏微分すると、

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 1 + (-2r_1 a_{11} x + r_1 (1 - a_{12} y - a_{13} z - a_{14} w)) \Delta t & (22a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} = 1 + (-2r_2 a_{22} y + r_2 (1 - a_{21} x - a_{23} z - a_{24} w)) \Delta t & (22b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = 1 + (-2r_3 a_{33} z + r_3 (1 - a_{31} x - a_{32} y - a_{34} w)) \Delta t & (22c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial w} = 1 + (-2r_4 a_{44} w + r_4 (1 - a_{41} x - a_{42} y - a_{43} z)) \Delta t & (22d) \end{cases}$$

となる。

これを基に、まず Vano モデルの定数を与えて Lyapunov 指数を求めた。なお、こちらは2つの結果がおおむね収束したと視認できた $n = 50000$ 時点での値を出した。ただし図 18 および図 19 では、 n が小さな部分において λ の値が負の方向に非常に大きくなってしまった。そのままでは時間経過による詳細な軌道が確認し辛いと感じたので、 n が 500~50000 の部分をプロットした。

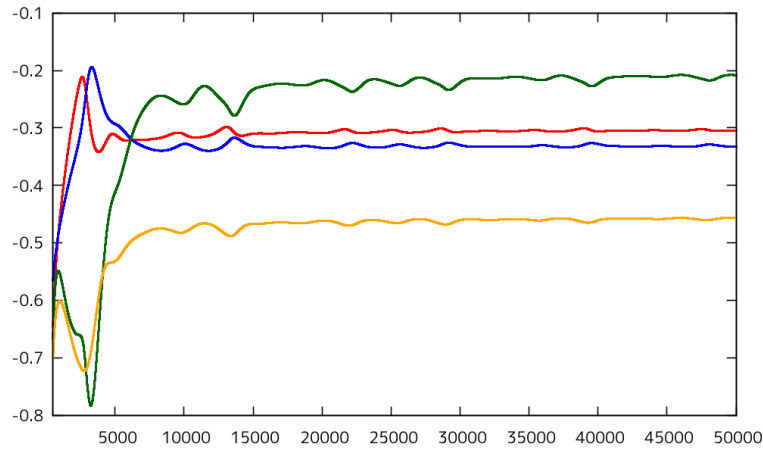


図 18 Vano モデルの Lyapunov 指数 横軸： n 縦軸： λ
赤線： λ_x 青線： λ_y 緑線： λ_z 橙線： λ_w

$n = 50000$ 時点で $\lambda_x \simeq -0.30$, $\lambda_y \simeq -0.33$, $\lambda_z \simeq -0.21$, $\lambda_w \simeq -0.46$ であった。
次にモデル 1 で同様に Lyapunov 指数を求めた。

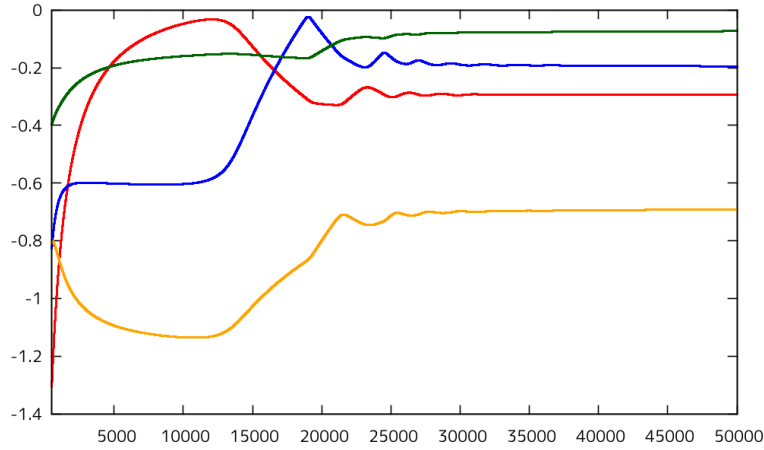


図 19 モデル 1 の Lyapunov 指数 横軸： n 縦軸： λ
赤線： λ_x 青線： λ_y 緑線： λ_z 橙線： λ_w

$n = 50000$ 時点で $\lambda_x \simeq -0.29$, $\lambda_y \simeq -0.19$, $\lambda_z \simeq -0.07$, $\lambda_w \simeq -0.69$ であった。

結果としては、どちらも全ての方向での Lyapunov 指数が負の値となった。Vano モデルにおいて、Lyapunov 指数が負の値になってしまうのは予想と異なった。

以上の結果から、「Vano モデルは初期値鋭敏性の意味でのカオスではない」と結論付けられるのではないかと考えられる。

3.2.6 Vano モデルの一般性

ここで、Vano モデルがどの程度一般性であるかを考える。具体的には、式 (18) の各定数をどの程度ずらせば周期的になるか、あるいは 1 点に収束するかを調べる。

調べたい元の定数を u としたとき、

$$U = u + \alpha \tag{23}$$

とし、 U を定数として置き換えたときに単調収束、あるいは周期的になったときの α の最低値を求める。ただし、 $\alpha \geq 0.01$ とし、0.01 の刻み幅で調べる。

なお、調べている定数以外は元の定数のままとする。また、 u の値が 1 の部分は [5] の数値探査法に基づき、変更しないものとする。

以下に結果の表を示す。 u の値が 1 の部分は省略している。

表 1 Vano モデルの一般性の調査

u	α	u	α	u	α	u	α	u	α
r_1	—	a_{11}	—	a_{12}	0.12	a_{13}	0.13	a_{14}	0.17
r_2	0.11	a_{21}	0.03	a_{22}	—	a_{23}	0.05	a_{24}	0.03
r_3	0.31	a_{31}	0.05	a_{32}	0.02	a_{33}	—	a_{34}	0.02
r_4	0.10	a_{41}	0.05	a_{42}	0.02	a_{43}	0.09	a_{44}	—

表 1 の α の時に初めて, a_{13} と a_{14} , および a_{43} のときには値が単調収束し, それ以外は周期的な解軌道になった.

表 1 から, 1 つの定数が多くて 0.31, 少ない部分だと 0.02 ずれた段階で収束してしまう. 0.31 はやや大きい値に思えるが, 16 個の定数のうち 15 個が一致している状態でのこの数値のずれは微小なものであると言える. したがって, Vano モデルがいかに特殊な例であるかが理解できる.

例として, Vano モデルの a_{23} に対して α が 0.05 のとき, つまり収束した直後の U を用いた場合 (以降モデル 2a と呼ぶ) の個体数変遷, および収束する直前, つまり a_{23} に対して α が 0.04 のときの場合 (以降モデル 2b と呼ぶ) の個体数変遷を以下に示す. なお, a_{23} 以外のパラメータは Vano モデルと同じとする. また, 全ての生物の初期値は Vano モデルと同じく 1 とした.

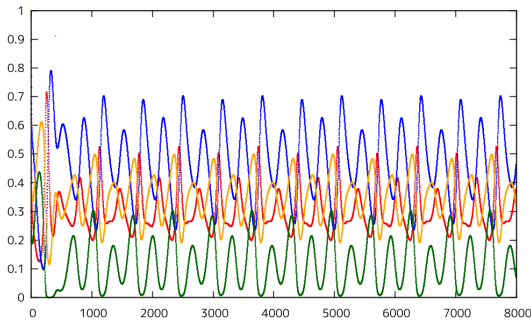


図 20 モデル 2a の振る舞い 横軸: 時間 t 縦軸: 個体数 x_i
赤線: x_1 青線: x_2 緑線: x_3 橙線: x_4

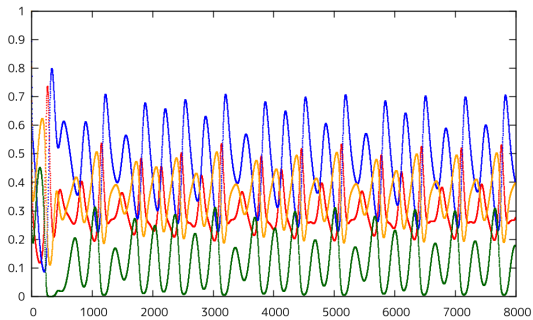


図 21 モデル 2b の振る舞い 横軸: 時間 t 縦軸: 個体数 x_i
赤線: x_1 青線: x_2 緑線: x_3 橙線: x_4

この結果では周期的になったかどうか視覚的に分かりにくい. そこで, 次に 3.2.4 節の正四面体座標系を用いて 3D プロットを行った.

結果のプロット図を以下に示す.

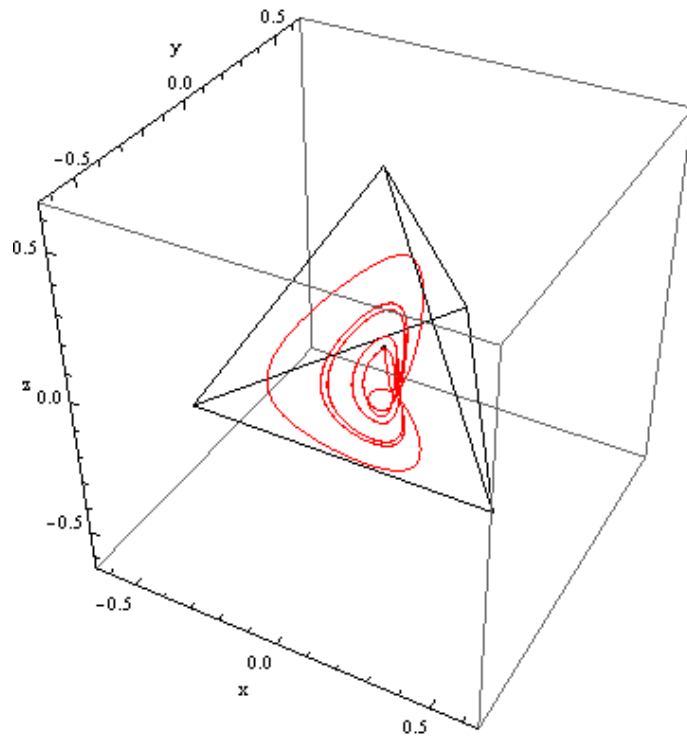


図 22 モデル 2a の正四面体座標系表示

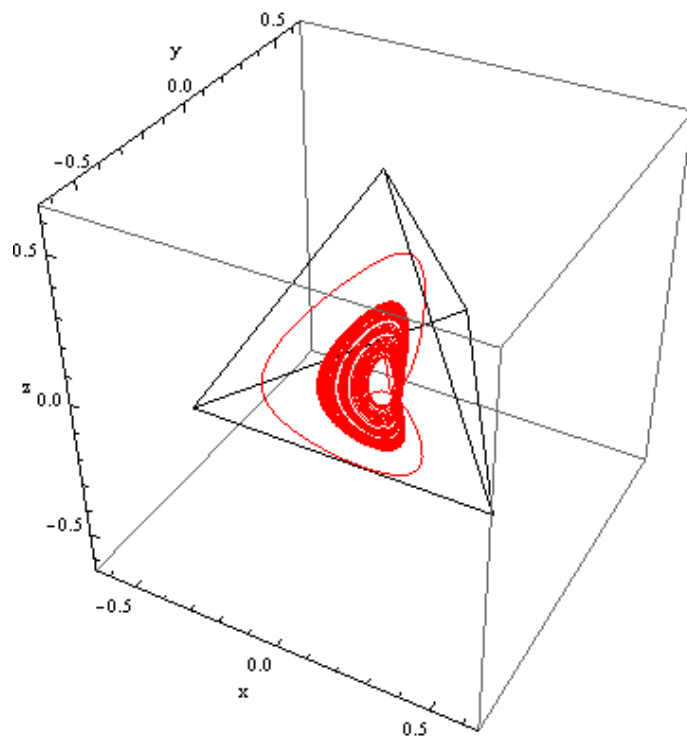


図 23 モデル 2b の正四面体座標系表示

3.2.4 節と同じく，周囲の立方体の x, y, z はプロット上の座標を示す．同様に，正四面体の底面左側が生物 1，底面右下側が生物 2，底面右上側が生物 3，上側が生物 4 の，それぞれの個体数の座標軸の方向にあたり，正四面体の中心の黒点は座標系の原点を表す．

モデル 2a はある程度の時間が進むと周期的となり，Vano モデルやモデル 2b と比べると解軌道が途中から完全に一致して周回していることが見て取れる．

このように，Vano モデルとの違いは僅かであるにもかかわらず周期的になった．Vano モデルがいかに複雑で，特殊な定数の組み合わせであるかが分かる．

4 結論

今回、非線形の数理モデルにおいて無視することの出来ないカオスについて、Logistic 写像や Lyapunov 指数を学ぶことで理解を深めた。また、数理生物学の具体的なモデルの 1 つとして Lotka-Volterra モデルについて解析し、その中でカオスが発生し得るかを検証した。

以下、本研究で得られた結果についての考察を行う。

4.1 正四面体座標系について

今まで 3 次元までしか値の同時プロットが実現できなかったが、本研究で作成した正四面体座標系も用いることで 4 次元の値の同時プロットが可能となった。

本研究ではこれを用いることでカオスの発見には至らなかったが、3.2.6 節で周期的な解軌道の探索を容易に行えた。他の研究や計算において、これを用いることで結果の可視化をより効率的にでき、利便性の向上に繋がるのではないかと考えられる。

4.2 カオスと Lyapunov 指数の関係

Lyapunov 指数導出のプログラム結果では、カオスになると考えられていた Vano モデルの Lyapunov 指数が負となった。この原因として考えうる可能性としては以下の通りである。

1. Vano モデルはそもそもカオスではない、あるいは「弱いカオス」である。
2. 「カオスであるなら Lyapunov 指数は正である」ことは必要十分条件ではない。

2 はそもそも原因としては考えにくいいため、裏付けるものが他にない 1 が原因であると考えられる。本研究は [5] に大きく基いたものであり、[5] 以外でこのモデルがカオスであるか否かを判断するのは難しい。

しかし、3.2.6 節から Vano モデルはかなり特殊な例であることが伺える。カオスの定義についてはまだ厳密な合意が無く [10]、Vano らのカオスは非常に限られた弱いものであると考えられる。

謝辞

日頃からご教授くださり、本論文の作成にあたっては様々なご指摘や適切なご指導を、細部に至るまで賜った真貝寿明教授に深く感謝の意を表します。

参考文献

- [1] 巖佐 庸『生命の数理』（共立出版，2012年）
- [2] 巖佐 庸『[改訂版] 数理生物学入門 生物社会のダイナミクスを探る』（共立出版，1998年）
- [3] 真貝 寿明『徹底攻略 常微分方程式』（共立出版，2010年）
- [4] 山口 昌哉 特集：「ウェーブレット」 『カオス・フラクタル・ウェーブレット』（数理科学，1992年12月号） P,5-6
- [5] J.A.Vano, J.C.Wildenberg, M.B.Anderson, J.K.Noel, J.C.Sprott『Chaos in Low-Dimensional Lotka-Volterra Models of Competition』 Nonlinearity,19 (2006) 2391.
- [6] 鈴木 昱雄『カオス入門』（コロナ社，2000年）
- [7] 十河 清『非線形物理学』（裳華房，2010年）
- [8] 数理生物学 <http://umea.ics.nara-wu.ac.jp/GI/math-biol.html>
- [9] カオスとフラクタル - 北京で蝶が羽を動かしたらニューヨークで嵐が起きた
<http://www.prings.com/opendoor/chaos2.htm>
- [10] 広中平祐『現代数理科学事典』（大阪書籍，1991年） p,1164-1165