

**I** 【数学①・数学②，どちらも解答】

次の空所を埋めよ。

- (1) 不等式  $|2x-1| < 3-x$  をみたす  $x$  の範囲は  $\boxed{\text{ア}}$   $< x <$   $\boxed{\text{イ}}$  である。
- (2) 100 以下の自然数のうち，3 で割り切れる数の和は  $\boxed{\text{ウ}}$  であり，3 または 5 で割り切れる数の和は  $\boxed{\text{エ}}$  である。
- (3) 方程式  $3^{2x+1} - 4 \cdot 3^x + 1 = 0$  をみたす解は， $x = \boxed{\text{オ}}$ ， $\boxed{\text{カ}}$  である。  
ただし， $\boxed{\text{オ}} < \boxed{\text{カ}}$  とする。
- (4) 3 つのベクトル  $\vec{a} = (8, 2)$ ， $\vec{b} = (6, -4)$ ， $\vec{x} = (p, q)$  があり， $\vec{x} - \vec{a}$  と  $\vec{b}$  は平行で， $\vec{x} - \vec{b}$  と  $\vec{a}$  は垂直である。このとき， $p = \boxed{\text{キ}}$ ， $q = \boxed{\text{ク}}$  である。

**II** 【数学①・数学②，どちらも解答】

O を原点とする座標平面に，2 点  $P(\sin \theta, \cos \theta)$ ， $Q(2 \sin \theta - \cos \theta, 3 \sin \theta - 4 \cos \theta)$  がある。

$\vec{OP}$  と  $\vec{OQ}$  の内積の値を  $f(\theta)$  とするとき，次の問いに答えよ。

- (1)  $f(\theta)$  を求めよ。
- (2)  $f(\theta)$  を  $\sin 2\theta$  と  $\cos 2\theta$  の式で表せ。
- (3)  $f(\theta)$  の最大値を求めよ。ただし，最大値を与える  $\theta$  の値は求めなくてよい。

### III 【数学①のみ解答】

関数  $f(x) = \log x - (ax + b)$  について、次の問いに答えよ。ただし、 $a, b$  は実数で  $a > 0$  とする。

- (1)  $f'(x)$  を求めよ。
- (2)  $f(x)$  の極値を求めよ。
- (3) 方程式  $f(x) = 0$  が実数解をもつとき、 $a$  と  $b$  がみたす関係式を求めよ。

### IV 【数学①のみ解答】

$x > 0$  で定義された関数  $f(x)$  は、条件

$$(*) \quad \int_{\log 2}^x f(t) dt = x f(x) - x^2 e^x$$

をみたしている。次の問いに答えよ。

- (1) 条件 (\*) の両辺を  $x$  で微分することにより、 $f'(x)$  を求めよ。
- (2) 不定積分  $\int x e^x dx$  を部分積分法により求めよ。
- (3)  $f(x)$  を求めよ。

V 【数学②のみ解答】

初項が1, 公比が $\frac{3}{2}$ である等比数列 $\{a_n\}$ について, 次の問いに答えよ。ただし,  $\log_{10} 2 = 0.301$ ,  
 $\log_{10} 3 = 0.477$  とする。

- (1) 次の空所を埋めよ。  $a_2 =$  ,  $a_3 =$  , そして一般項は  $a_n =$   である。
- (2)  $a_n > 10$  を満たす最小の  $n$  を求めよ。
- (3) 初項から第  $n$  項までの和を  $S_n$  とする。  $S_n > 160$  を満たす最小の  $n$  を求めよ。

VI 【数学②のみ解答】

放物線  $C: y = -x^2 + 8x - 12$  について, 次の問いに答えよ。

- (1) 放物線  $C$  と  $x$  軸との交点を求めよ。
- (2) 放物線  $C$  と  $x$  軸で囲まれた図形の面積を求めよ。
- (3) 点  $P(4, 5)$  から放物線  $C$  に引いた2つの接線の方程式を求めよ。
- (4) 放物線  $C$  と(3)で求めた2つの接線で囲まれた図形の面積を求めよ。

## 模範解答

### I 【数学①・数学②，どちらも解答】

ア	-2	イ	$\frac{4}{3}$	ウ	1683	エ	2418
オ	-1	カ	0	キ	$\frac{19}{5}$	ク	$\frac{24}{5}$

(40/150点)

### II 【数学①・数学②，どちらも解答】

(1)  $f(\theta) = \sin \theta(2 \sin \theta - \cos \theta) + \cos \theta(3 \sin \theta - 4 \cos \theta) = 2 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta - 4 \cos^2 \theta$  (答)

(2)  $2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$      $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$      $2 \cos^2 \theta = \cos 2\theta + 1$  より

$f(\theta) = \sin 2\theta - 3 \cos 2\theta - 1$  (答)

(3)  $f(\theta) = \sqrt{10} \sin(2\theta - \alpha) - 1$     ただし  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$      $\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$      $\therefore$  最大値は  $\sqrt{10} - 1$  (答)

(35/150点)

### III 【数学①のみ解答】

(1)  $f'(x) = \frac{1}{x} - a$  (答)

(2)

$x$	0	...	$\frac{1}{a}$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	$-\log a - b - 1$	↘

$\therefore x = \frac{1}{a}$  で極大    極大値:  $-\log a - b - 1$  (答)

(3)  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty$  より     $f(x) = 0$  が実数解を持つ  $\Leftrightarrow$  極大値  $\geq 0 \Leftrightarrow \log a + b + 1 \leq 0$  (答)

(40/150点)

Ⅳ 【数学①のみ解答】

(1) 両辺  $x$  で微分して  $f(x) = f(x) + xf'(x) - x^2e^x - 2xe^x$   $x > 0$  なので  $f'(x) = (x+2)e^x$  (答)

(2)  $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + C$ ,  $C$  は定数 (答)

(3) (1)(2) より  $f(x) = \int f'(x) dx = \int (x+2)e^x dx = (x+1)e^x + C$ ,  $C$  は定数

これを(\*)に代入して  $\int_{\log 2}^x ((t+1)e^t + C) dt = xe^x + Cx - (C+2)\log 2 = x(x+1)e^x + Cx - x^2e^x$

$\therefore (C+2)\log 2 = 0 \quad \therefore C = -2 \quad \therefore f(x) = (x+1)e^x - 2$  (答)

(35/150点)

Ⅴ 【数学②のみ解答】

(1) 

ア	$\frac{3}{2}$	イ	$\frac{9}{4}$	ウ	$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$
---	---------------	---	---------------	---	----------------------------------

(2)  $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} > 10 \Leftrightarrow (n-1)\log_{10} \frac{3}{2} > \log_{10} 10 = 1$   
 $\Leftrightarrow n-1 > \frac{1}{\log_{10} 3 - \log_{10} 2} = \frac{1}{0.176}$   
 $\Leftrightarrow n > 1 + 5.68$   
 $\therefore n = \underline{7}$

(3)  $S_n = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{3}{2} - 1} = 2\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right\}$  となるので、

$S_n > 160 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 > 80 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^n > 81$

$\Leftrightarrow n\log_{10} \frac{3}{2} > \log_{10} 81 \Leftrightarrow n > \frac{4\log_{10} 3}{\log_{10} 3 - \log_{10} 2} = 10.84$

$\therefore n = \underline{11}$

(35/150点)

Ⅵ 【数学②のみ解答】

(1)  $f(x) = -(x-2)(x-6)$  であるので、 $x$  軸との交点は  $(2, 0)$  と  $(6, 0)$  である。

$$(2) \quad \int_2^6 (-x^2 + 8x - 12) dx = \left[ -\frac{x^3}{3} + 4x^2 - 12x \right]_2^6 = \underline{\underline{\frac{32}{3}}}$$

(3) 接点を  $(a, b)$  とおく。ただし、 $b = f(a)$  である。 $f'(a) = -2a + 8$  なので、  
接線の方程式は  $y - b = (-2a + 8)(x - a)$  である。これが  $P(4, 5)$  を  
通るので、

$$5 - (-a^2 + 8a - 12) = (-2a + 8)(4 - a)$$

整理すると、 $a^2 - 8a + 15 = 0$  より  $(a - 3)(a - 5) = 0$   $\therefore a = 3, 5$

$a = 3$  のとき、接線の方程式は  $y = 2x - 3$  であり、

$a = 5$  のとき、接線の方程式は  $y = -2x + 13$  である。

$$(4) \quad (x = 4 \text{ より左側部分の面積}) = \int_3^4 (2x - 3 - (-x^2 + 8x - 12)) dx = \left[ \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x \right]_3^4 = \frac{1}{3}$$

$$(x = 4 \text{ より右側部分の面積}) = \int_4^5 (-2x + 13 - (-x^2 + 8x - 12)) dx = \left[ \frac{x^3}{3} - 5x^2 + 25x \right]_4^5 = \frac{1}{3}$$

したがって、  
(囲まれた部分の面積)  $= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

## 講評

---

### I 【数学①・数学②，どちらも解答】

#### ■ 出題のねらい

高校の数学Ⅱ・数学Aまでの広い範囲の基礎的知識を問う出題をしました。

#### ■ 【数学①】 採点講評

全般的によくできていましたが，記入個所の取り違いやケアレスミスが目立ちました。せっかく実力がありながら得点に結び付かないのは大変残念なことです，十分確認をしつつ記入しましょう。

(2)において「3または5で割り切れる数」を「3かつ5で割り切れる数」との誤認による答案も散見され気に掛かりました。「または」「かつ」の使い分けは，日常生活の用語としても重要ですので留意してください。

#### ■ 【数学②】 採点講評

- (1) 絶対値を含む不等式の基本的問題で，正答率は約80%でした。
- (2) 等比数列の基本問題ですが，計算ミスが多く，正答率は約60%でした。
- (3) 基本的な指数関数の問題ですが，苦手な人が多いようで，正答率は約40%でした。
- (4) 2つのベクトルの平行条件，直交条件より  $p$ ， $q$  についての連立方程式が得られ，それを解くことにより  $p$  と  $q$  の値が求められます。正答率は約40%でした。

## Ⅱ 【数学①・数学②，どちらも解答】

### ■出題のねらい

三角関数の性質およびベクトルの内積についての基礎的な知識と計算力を問いました。

### ■【数学①】採点講評

- (1) よくできていました。ただ、 $f(\theta)$ の意味を取り違える人もいました。また、狭角のコサインの値を余弦定理から計算して、計算を間違える人もいました。ベクトルが成分表示されたときの内積の計算法は知っておいてほしいです。
- (2) (1)ができた人はよくできていました。
- (3) 三角関数の合成を利用した人は、よくできていたと思いますが、ケアレスミスもありました。

### ■【数学②】採点講評

- (1) ベクトルの内積を計算する問題で、約70%が正解でした。
- (2) 三角関数の倍角公式、半角公式を用いて変形する問題で、正答率は約50%でした。
- (3) 三角関数の合成公式を用いて最大値を求める問題で、あまりできはよくなく、正答率は約20%でした。

## Ⅲ 【数学①のみ解答】

### ■出題のねらい

微分の基礎的な知識を問いました。

### ■採点講評

微分に極値、実数解を絡めた基本的な問題でしたが、あまりできはよくありませんでした。

- (1) 対数関数の簡単な微分ですからよくできていました。
- (2)  $x = \frac{1}{a}$  で  $f'(x) = 0$  となりここで  $f(x)$  が極大値を取るわけですが、 $0 < x < \frac{1}{a}$  と  $a < x$  での  $f'(x)$  の符号の違いにより極小値を取る、あるいはこれらの間での  $f'(x)$  の符号を調べずに極大値とか極小値としている答案が半数以上ありました。不等式の計算力不足を感じました。また対数の真数条件から  $x > 0$  が  $f(x)$  の定義域ですから増減表を書くときは  $x > 0$  で考えればよいことになります。
- (3) (2)で正解が得られたら(3)はよくできていましたが、解答に等号が入っていない答案が少しありました。

## IV 【数学①のみ解答】

### ■出題のねらい

微積分の計算について基本的な事項を問いました。

### ■採点講評

全体としてのできはあまりよくありませんでした。

特に、(1)や(2)において簡単な積の微分や、部分積分の計算ができない人が意外と多かったです。

また、(2)の不定積分において積分定数を忘れたために(3)の途中で計算不能になった答案が多かったです。基本的な計算力の向上が望まれます。

## V 【数学②のみ解答】

### ■出題のねらい

対数関数と等比数列に関する基礎知識を問いました。

### ■採点講評

- (1) 等比数列に関する基礎知識を問う問題で、約85%が正答でした。
- (2) 対数関数の基礎的計算力に関する問題で、約50%が正答でした。
- (3) 等比数列の和と対数関数に関する融合問題で、約40%が正答でした。

## VI 【数学②のみ解答】

### ■出題のねらい

2次関数の微分・積分に関する基礎知識を問いました。

### ■採点講評

(1)から(4)全体の正答率は50%台後半でした。

- (1) 交点の座標は2次方程式を解くことにより得られます。正答率は約80%でした。
- (2) 図形の面積を定積分の計算により求める基本問題で、正答率は約70%でした。
- (3) 微分して接線の方程式を求める標準的問題です。接点の $x$ 座標の値を求めるのに2次方程式を解く必要があるためか、正答率は30%台でした。
- (4) 囲まれた図形の面積を定積分の計算により求める問題ですが、計算が少し面倒なためか、正答率は約30%でした。