物理（工学部・情報科学部）

物　　理

Ⅰ 問いに答えよ。（配点 60）

（1） 地球を周回する質量 m の人工衛星の運動を考える。人工衛星は，点 O にある地球を中心とする半径 r の円軌道上を一定の速さ v で運動している（図１実線Ⅰ）。地球を質点とみなし，太陽や他の惑星などの影響は無視する。

問１　公転周期を求めよ。

問２　角速度を求めよ。

問３　人工衛星にはたらいている力の大きさと向きを答えよ。

問４　人工衛星は加速度を持つにもかかわらず等速運動をしている。これはなぜか，説明せよ。

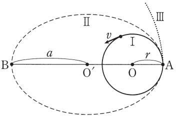


図１　円軌道Ⅰと，O′を中心とする楕円軌道Ⅱ，遠方へ去る軌道Ⅲ

表１　地球と静止衛星に関するデータ

静止衛星の軌道半径	4.2×10^{7}	m
万有引力定数 G	6.7×10^{-11}	$\mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$
$\dfrac{4\pi^2}{G}$	5.9×10^{11}	$\mathrm{kg^2/(N \cdot m^2)}$
1日	8.6×10^{4}	s

（2） 地球の中心から距離 r にある質量 m の物体には，大きさ $F = \dfrac{GMm}{r^2}$ の万有引力がはたらく。ここで，G は万有引力定数，M は地球の質量である。また，人工衛星が地球の万有引力を受けて運動するとき，次の法則が成り立つ。

第１法則：人工衛星は地球を１つの焦点とする楕円軌道（円軌道も含む）をえがく。

第２法則：人工衛星と地球を結ぶ線分が単位時間にえがく面積（面積速度）は一定である。

第３法則：人工衛星の公転周期 T の２乗は，楕円軌道の長半径（半長軸）a の３乗に比例する。つまり，$T^2 = Ka^3$ が成り立つ。比例係数 K はすべての人工衛星について共通かつ一定の値になる。

問５　上の３つの法則は，地球を太陽に，人工衛星を惑星に置き換えたとき，惑星の運動を表す法則になる。この法則の名称を答えよ。

問６　等速円運動をする人工衛星の運動方程式を利用して，比例係数 K を G，M を用いて求めよ。

問７　地球の自転周期（１日）と同じ周期で自転の向きに赤道上空を周回する人工衛星を静止衛星という。表１を参考にして地球の質量を求めると，$M = 5.9 \times 10^{n}$ kg となる。指数 n を数値で求めよ。

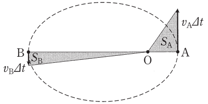


図2　面積 S_A と S_B が等しくなる。
$\varDelta t$ は単位時間

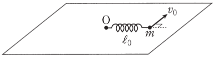


図3

（3）　図1の点Aで人工衛星を瞬間的に速さ v_A に加速すると，軌道は図1の破線Ⅱで表される長半径 a の楕円になった。人工衛星が地球からもっとも遠ざかった点をB，そこでの速さを v_B とする。このとき，第2法則（面積速度一定の法則）より，図2の面積 S_A と面積 S_B が等しくなる。

問8　楕円運動の周期は円運動の周期の何倍になるか，a と r を用いて答えよ。

問9　$\dfrac{v_B}{v_A}$ を求めよ。

与える速さが大きいとき，人工衛星は楕円軌道をとらず宇宙の遠方へ飛び去る（図1点線Ⅲ）。

問10　力学的エネルギー保存の法則を用いて，遠方へ飛び去る場合の v_A の条件を求めよ。

（4）　図3のようになめらかで水平な面上に，ばね定数 k の軽いばねがある。ばねの一端は点Oに固定され，ばねはそのまわりを自由に回転できる。他端には質量 m の小物体がつながれている。ばねの長さは自然長 ℓ_0 で，小物体は静止している。

水平面内で小物体にばねと垂直方向に速さ v_0 を与えると，小物体は点Oのまわりを回転し始めた。このとき，ばねの長さ ℓ は次第に大きくなり，最大値 ℓ_m となった後，再び ℓ_0 となり，この運動をくり返した。最大値 ℓ_m のときの小物体の速さを v_m とする。

問11　力学的エネルギー保存の法則より，$\ell = \ell_0$ のときと $\ell = \ell_m$ のときの力学的エネルギーは等しくなる。この関係式を記せ。

問12　このように小物体に作用する力がつねにひとつの点を向いている場合，人工衛星の運動と同様に小物体の軌道に関して（2）の第2法則（面積速度一定の法則）が成り立つ。これより $\ell_0 v_0 = \ell_m v_m$ となる。$\ell_m = 2\ell_0$ の場合，ばね定数 k を m，v_0，ℓ_0 を用いて表せ。

Ⅱ　問いに答えよ。(配点 45)

(1)　図1のように，真空中で面積 S〔m^2〕の2枚の金属板A，Bを極板とする平行板コンデンサー，起電力 E〔V〕の電池，抵抗値 R〔Ω〕の抵抗R，スイッチSWからなる回路を考える。はじめSWは開いており，各極板に電荷はなく，極板間隔は d〔m〕であった。極板間隔を d に保ったまま，SWを閉じてコンデンサーの充電を始める。

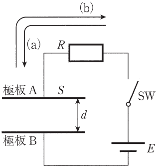


図1

問1　SWを閉じた瞬間に，抵抗Rに流れる電流 I〔A〕について，

1）I を E と R を用いて表せ。

2）I はどの向きに流れるのか，図に示す記号(a)，(b)のいずれかで答えよ。

充電の途中，極板Aに正の電気量 Q〔C〕の電荷がたくわえられている場合を考える。

問2　極板Bにたくわえられる電気量を求めよ。

極板の端の影響を考えないとすると，コンデンサーの極板間の電場（電界）は，極板の表面に垂直な方向で，その大きさは極板間で一定の大きさ $\dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}$〔V/m〕となる。ただし，$\varepsilon_0$〔F/m〕は真空の誘電率である。

問3　電場の向きを(a)　A→B，(b)　B→Aから選び，記号(a)，(b)のいずれかで答えよ。

問4　コンデンサーの両極板間の電位差 V〔V〕を S，d，Q，ε_0 を用いて表せ。

問5　Q は V に比例し，その比例係数がコンデンサーの電気容量 C〔F〕となる。C を S，d，ε_0 を用いて表せ。

十分に時間が経ち，充電が完了した後，SW を再び開く。このとき，コンデンサーの極板Aに正の電気量 Q_0〔C〕の電荷がたくわえられている。横軸にたくわえられた電気量 Q，縦軸に極板間の電位差 V をとって，充電を始めてから完了するまでの Q と V の変化を表すグラフを図2に示す。

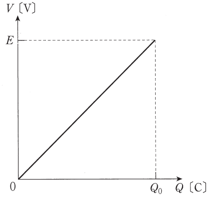


図2

問6　この変化では，電池からエネルギー Q_0E〔J〕が供給される。一方，コンデンサーにはこのうち半分のエネルギーが静電エネルギーとしてたくわえられる。残りのエネルギーはどうなったのか，説明せよ。

(2)　充電された状態から，SW を開いたまま，極板Bを固定し，極板Aを極板間隔が $\frac{1}{4}d$ となるまで，極板Bと平行に保ちながらBにゆっくり近づける。

問7　極板Aを極板Bに近づける前後で，極板Aと極板Bの各電気量は変化しない。その他に，次に示す(a)〜(d)の中で変化しない量を1つ選び，記号で答えよ。

(a)　極板間の電場の強さ

(b)　極板間の電位差

(c)　コンデンサーの電気容量

(d)　コンデンサーにたくわえられる静電エネルギー

問8　極板Aを極板Bに近づける場合の Q と V の変化を表すグラフを解答欄の図に矢印($\longrightarrow$)で描け。

問9　極板Aにはたらく静電気力のした仕事は，極板Aを極板Bに近づける前にコンデンサーにたくわえられていた静電エネルギーと近づけた後の静電エネルギーとの差となる。この仕事に相当する面積をもつ領域を，問8と同じ解答欄の図に斜線で示し，この仕事を Q_0 と E を用いて表せ。

Ⅲ 空所を埋め，問いに答えよ。(配点 45)

1 mol の気体の温度を，定積変化で 1 K 上げるのに必要な熱量 C_V〔J/(mol·K)〕を定積モル比熱といい，定圧変化で 1 K 上げるのに必要な熱量 C_p〔J/(mol·K)〕を定圧モル比熱という。以下では，理想気体の比熱比 $\gamma = \dfrac{C_p}{C_V}$ を測定する方法を考えよう。気体定数を R〔J/(mol·K)〕，重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕とする。

(1) 理想気体の C_p と C_V の関係を求めよう。n〔mol〕の理想気体の絶対温度を，定積変化あるいは定圧変化で T〔K〕から $T + \varDelta T$〔K〕まで上げる場合を考える。このときの内部エネルギーの増加を $\varDelta U$〔J〕とする。内部エネルギーは温度のみの関数であるので，$\varDelta U$ は両変化の場合で等しい。定積変化において気体が吸収する熱量 $nC_V\varDelta T$ は，熱力学第 1 法則より，

$$nC_V\varDelta T = \varDelta U \qquad ①$$

となる。一方，定圧変化で気体が吸収する熱量 $nC_p\varDelta T$ は，一定圧力を p_0〔Pa〕，体積の増加を $\varDelta V$〔m^3〕とすると，$\varDelta U$，p_0，$\varDelta V$ を用いて

$$nC_p\varDelta T = \varDelta U + \boxed{\text{ア}} \qquad ②$$

となる。気体がした仕事 $\boxed{\text{ア}}$ は，理想気体の状態方程式より，n，$\varDelta T$，R を用いて $\boxed{\text{ア}} = \boxed{\text{イ}}$ と表される。したがって，①式と②式より，C_p と C_V の間に

$$C_p = C_V + \boxed{\text{ウ}}$$

の関係があることがわかる。したがって，比熱比 γ は 1 より大きい。

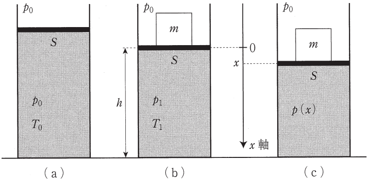
(2) 図(a)のように，鉛直に立っている底面積 S〔m^2〕の円筒形の容器の内部に，1 mol の理想気体を入れ，ピストンで封じ込める。ピストンの質量や厚さは無視でき，また，ピストンはなめらかに動くものとする。このときの気体の絶対温度は T_0〔K〕，その圧力は容器の外部の大気の圧力と同じ p_0〔Pa〕であったとする。以下の変化においては，容器とピストンは熱を伝えず，気体の体積と圧力の変化はすべて断熱的であるとする。

1) ピストンに質量 m〔kg〕の分銅をおいて，図(b)のように，ピストンを容器の底から高さ h〔m〕のところで静止させた。このとき，容器内の理想気体は図(a)の状態より圧縮されており，ピストンにはたらく力はつり合っている。このときの気体の圧力を p_1〔Pa〕，絶対温度を T_1〔K〕とする。

問 1 p_1 を p_0，m，g，S で表せ。

問 2 状態方程式を用いて，T_1 を p_1，h，S，R で表せ。

問 3 T_1 は T_0 と比べて {(i)大きい，(ii)小さい，(iii)等しい}。T_1 と T_0 の大小関係を述べているこの文中の選択肢の中から正しいものを選び，記号 {(i)，(ii)，(iii)} で答えよ。選んだ理由も書け。



図

2）次に，ピストンをつり合いの位置 h からゆっくりと少し押し下げて静かにはなすとピストンはどのような運動をするか調べよう。ピストンの位置を表すため，図(b)のつり合いの位置 h を原点にとり鉛直下向きを正とした x 軸を図のようにとって考える。図(c)はピストンの位置が x〔m〕のときの気体の状態を示しており，このときの気体の圧力を $p(x)$〔Pa〕とする。

一般に，比熱比が γ である理想気体の断熱変化においては，圧力 p と体積 V の間に

$$pV^{\gamma} = 一定 \qquad ③$$

の関係が成立している。

図(c)の状態と図(b)の状態で③式を考えて，気体の圧力 $p(x)$ を p_1，h，x，γ を用いて表すと

$$p(x) = \left(\boxed{\quad エ \quad} \right)^{\gamma} p_1$$

となる。次に，$\dfrac{x}{h}$ は十分に小さいとし，

「z が 1 に比べて十分小さいとき，近似式 $\left(\dfrac{1}{1-z}\right)^{\gamma} \fallingdotseq 1 + \gamma z$ が成立する」

ことを用いると，図(c)の状態でピストンにはたらく力 F は

$$F = p_1 S - p(x) S \fallingdotseq -\frac{\gamma p_1 S}{\boxed{\quad オ \quad}} \times x$$

となり x に比例する復元力であることがわかる。したがって，ピストンは周期が $2\pi\sqrt{\dfrac{m \times \boxed{\quad オ \quad}}{\gamma p_1 S}}$ の単振動をする。このことから，このピストンの単振動の周期を測定することで，この理想気体の比熱比 γ を算出することができる。