

I 【数学①・数学②，どちらも解答】

ア	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	イ	$-2+\sqrt{5}$	ウ	$\frac{\pi}{3}$	エ	$-\sqrt{3}$
オ	$\log_3 2$	カ	$\frac{2}{3}$	キ	12	ク	48

(40点)

II 【数学①・数学②，どちらも解答】

ア	$\frac{1}{2}$	イ	$\frac{1}{2}$
ウ	$\frac{3}{4}$	エ	$\frac{1}{4}$
オ	-1	カ	2
キ	3	ク	-2
ケ	$2\sqrt{3}$	コ	$2\sqrt{7}$
サ	$4\sqrt{3}$		

(35点)

III

【数学①のみ解答】(解答においては、答えだけでなく計算過程も書きなさい)

$$(1) f'(x) = -\frac{1}{x^2}(\log x + 1)(\log x - 3)$$

$$(2) f'(x) = 0 \text{ を解くと, } x = \frac{1}{e}, e^3 \text{ である. 増減表はつぎのようになる.}$$

x	0	...	$\frac{1}{e}$	...	e^3	...
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$		$\searrow$	$-2e$ 極小	$\nearrow$	$\frac{6}{e^3}$ 極大	$\searrow$

これより, 極小値 $f(\frac{1}{e}) = -2e$, 極大値 $f(e^3) = \frac{6}{e^3}$ である.

$$(3) \log x = t \text{ より, } \frac{1}{x} dx = dt \text{ である. よって, } \int f(x) dx = \int (t^2 - 3) dt$$

$$= \frac{t^3}{3} - 3t + C = \frac{1}{3} \log x \{ (\log x)^2 - 9 \} + C$$

$$(4) \int_a^{e^3} f(x) dx = \frac{1}{3} \log e^3 \{ (\log e^3)^2 - 9 \} - \frac{1}{3} \log a \{ (\log a)^2 - 9 \}$$

$$= -\frac{1}{3} \log a \{ (\log a)^2 - 9 \} = 0 \text{ より, } \log a = 0, \pm 3 \text{ である.}$$

よって, $a = 1, e^3, \frac{1}{e^3}$ である.

(35点)

IV

【数学①のみ解答】(解答においては、答えだけでなく計算過程も書きなさい)

$$(1) f'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(2) y = -\frac{2a}{\sqrt{1-a^2}}(x-a) + 2\sqrt{1-a^2} \text{ より, } y = -\frac{2a}{\sqrt{1-a^2}}x + \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}$$

$$(3) Q(\frac{1}{a}, 0), R(0, \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}) \text{ であるから,}$$

$$d^2 = \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{1-a^2}$$

$$(4) a^2 = t, \quad g(t) = d^2 = \frac{1}{t} + \frac{4}{1-t} \quad \text{とおく. このとき, } 0 < t < 1 \text{ であり,}$$

$$g'(t) = \frac{(3t-1)(t+1)}{t^2(1-t)^2} \text{ なので, 増減表は}$$

t	0	...	$\frac{1}{3}$	...	1
$g'(t)$		-	0	+	
$g(t)$		$\searrow$	9 極小	$\nearrow$	

となる.

よって, $t = \frac{1}{3}$ のとき, $g(t)$ は最小値 9 をとる.

このとき d も最小となるので, $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき, 最小値 $d = 3$ である.

(40点)

V 【数学②のみ解答】

ア	2	イ	3
ウ	$\frac{1}{3n-1}$		
エ	$\frac{2k-5}{k-1}$	オ	$\frac{1}{k}$
カ	$k^{1-n}(2k-5)$	キ	$\frac{5}{2}$

(35点)

VI 【数学②のみ解答】(解答においては、答えだけでなく計算過程も書きなさい)

- (1) $f(x) = 0$ の判別式を D とする。

$$\frac{D}{4} = a^2 - 2a^2 + a + 2 = -(a+1)(a-2) \geq 0 \text{ を解くと,}$$

求める a の値の範囲は $-1 \leq a \leq 2$ である。

$$(2) I = \int_0^a (-x^2 + 2ax - 2a^2 + a + 2) dx = -\frac{1}{3}a^3 + a^2 + 2a$$

- (3) $g(a) = -\frac{1}{3}a^3 + a^2 + 2a$ とおくと, $g'(a) = -4a^2 + 2a + 2 = -2(2a+1)(a-1)$
より 増減表は

a	-1	...	$-\frac{1}{2}$	...	1	...	2
$g'(a)$		-	0	+	0	-	
$g(a)$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	$-\frac{5}{12}$	$\nearrow$	$\frac{8}{3}$	$\searrow$	$-\frac{8}{3}$
			極小		極大		

となる。

これより, $g(a)$ は $a = 2$ において最小値 $-\frac{8}{3}$ をとる。よって, I を最小にするような a の値は $a = 2$ である。

(40点)