数学〔数学①（工学部）、数学②（工学部・情報科学部・知的財産学部）〕

I 【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

次の空所を埋めよ。（配点 40）

(1) a を正の実数とする。2 次方程式 $x^2-2ax+a+2=0$ が
異なる 2 つの実数解をもつような a の値の範囲は，$a>$ $\boxed{\text{ア}}$ である。
また，その 2 つの実数解がどちらも 4 以下であるような a の値の範囲は，
$\boxed{\text{ア}}<a\leqq\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) $\sin\theta-\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\boxed{\text{ウ}}\right)$ である。
ただし，$0\leqq\boxed{\text{ウ}}<2\pi$ とする。
また，$\sin\theta-\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる θ の値は，$\theta=\boxed{\text{エ}}$ である。
ただし，$0\leqq\boxed{\text{エ}}\leqq\pi$ とする。

(3) 実数 x, y が 2 つの不等式 $x^2+y^2\leqq1$, $x-y\leqq0$ を同時に満たすとき，
x の最大値は $\boxed{\text{オ}}$ であり，$y-\sqrt{5}x$ の最大値は $\boxed{\text{カ}}$ である。

(4) 4 桁の自然数のうち，各位の数の和が 3 であるものは $\boxed{\text{キ}}$ 個あり，
各位の数の積が 8 であるものは $\boxed{\text{ク}}$ 個ある。

$\boxed{\text{II}}$ 【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

正六角形 ABCDEF の辺 AB の中点を P，辺 BC の中点を Q，

線分 EP と線分 FQ の交点を R とする。このとき，次の空所を埋めよ。（配点 35）

(1) $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AF} = \vec{b}$ とするとき， $\overrightarrow{FE} = \boxed{\text{ア}}\,\vec{a} + \boxed{\text{イ}}\,\vec{b}$,

$\overrightarrow{AE} = \boxed{\text{ウ}}\,\vec{a} + \boxed{\text{エ}}\,\vec{b}$, $\overrightarrow{AQ} = \boxed{\text{オ}}\,\vec{a} + \boxed{\text{カ}}\,\vec{b}$ である。

また， $\overrightarrow{AR} = \boxed{\text{キ}}\,\vec{a} + \boxed{\text{ク}}\,\vec{b}$ である。

(2) 辺 AB の長さが $\sqrt{13}$ のとき，線分 FQ の長さは $\boxed{\text{ケ}}$ である。

また，点 R は線分 EP を $\boxed{\text{コ}} : \boxed{\text{サ}}$ に内分するので，

線分 PR の長さは $\boxed{\text{シ}}$ である。

$\boxed{\text{III}}$ 【数学 ① のみ解答】

関数 $f(x) = (x-1)\log 3 - 2\log x \quad (x > 0)$ について，次の問いに答えよ。（配点 35）

(1) $f(x)$ を微分せよ。

(2) $f(x)$ の増減表をつくれ。ただし，極値は求めなくてもよい。

(3) $f(n) > 0$ となる最小の自然数 n を求めよ。

(4) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{\text{IV}}$ 【数学 ① のみ解答】

2 つの関数 $f(x) = k\sin 2x \quad \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$，$g(x) = \tan x \quad \left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ について，次の問いに答えよ。ただし，k は $k > \dfrac{1}{2}$ を満たす定数とする。（配点 40）

(1) 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の交点のうち，原点でない点の x 座標を α とする。このとき，$\cos\alpha$ を k の式で表せ。

(2) $\cos x = t$ とおくことにより，不定積分 $\displaystyle\int g(x)\,dx$ を求めよ。

(3) 2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ で囲まれた図形の面積 S を k の式で表せ。

(4) (3) で定めた S について，$S = k$ となるような k の値を求めよ。

V 【数学 ② のみ解答】

実数 p に対し，公比が 2^p である等比数列 $\{a_n\}$ を考える。

このとき，次の空所を埋めよ。（配点 35）

$a_5 = 6,\ a_9 = 12$ のとき，$p = \boxed{\text{ア}}$ であり，$a_1 = \boxed{\text{イ}}$ である。

数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_{2n-1}\ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定めると，

数列 $\{b_n\}$ は等比数列となり，その公比を 2^q と表すと，$q = \boxed{\text{ウ}}$ である。

また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\sqrt{2}-1}$ である。

数列 $\{c_n\}$ を $c_n = \log_2 \dfrac{b_1 b_2 b_3 \cdots b_n}{3^n}\ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める。

一般項 c_n を n についての整式で表すと，$c_n = \boxed{\text{オ}}$ である。このとき，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k = \frac{\boxed{\text{カ}}}{12}$ であり，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_{k+1}} = \boxed{\text{キ}}$ である。

VI 【数学 ② のみ解答】

放物線 $C : y = x^2$ について，次の問いに答えよ。（配点 40）

(1) 原点 O と異なる点 P$(a,\ a^2)$ における放物線 C の接線 l の方程式を求めよ。

(2) 点 P を通り，直線 l に垂直な直線 m の方程式を求めよ。

(3) 直線 m と放物線 C の交点のうち，点 P でない点の座標を求めよ。

(4) $a = \dfrac{1}{2}$ のとき，直線 m と 放物線 C で囲まれた図形の面積を求めよ。