物理（工学部・情報科学部）

物　　　　理

Ⅰ　空所を埋め，問いに答えよ。$\boxed{\text{ウ}}$ は語句で埋めよ。(配点 60)

野球のボールの運動を考える。ボールは同一の鉛直面内を運動するものとする。ボールを質点とみなし，空気の抵抗は無視できるとする。

（1）　図１のように，速さ 40 m/s で水平に飛んできた質量 0.15 kg のボールをバットで打った。ボールがバットに衝突した後，ボールは水平と 60° をなす向きに速さ 40 m/s で打ち返された。$\sqrt{3} = 1.7$ とする。

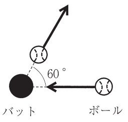

図１

1）バットに衝突する前のボールの運動量の大きさを求めよ。

2）ボールが受けた力積の向きを解答欄中に矢印（⇒）で示せ。解答欄中の ← は衝突前と衝突後のボールの運動量ベクトルを表し，◌ はバットの位置を表している。

3）ボールが受けた力積の大きさを求めよ。

（2）　図２に示すように，水平と角度 θ をなす向きに打ち上げられたボールの運動を考える。水平方向を x 軸に，鉛直方向を y 軸にとり，ホームベースを原点とする。簡単に考えるため，時刻 $t = 0$ に，ボールは原点から打たれたとし，ボールは x-y 平面内を運動するものとする。ボールの初速度の大きさを V とし，重力加速度の大きさを g とする。

4）時刻 t におけるボールの位置の x 座標と y 座標を θ，V，g，t を用いて表せ。

5）ボールが地面に落ちたときの時刻とそのときの x 座標を θ，V，g を用いて表せ。

6）V を定数とするとき，ボールが x 軸上で最も遠くまで飛ぶ場合の θ の値を求めよ。求め方も示せ。

7）原点から打ち出されたときのボールの運動エネルギーが２倍になると，ボールの水平到達距離は何倍になるか求めよ。

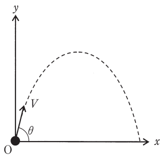

図２

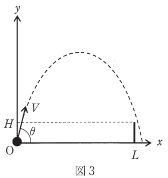

図３

図３に示すように，実際の野球場では，$x=L$ の位置に，高さ H のフェンスがあり，十分に大きな V で打たれたボールが，地面でバウンドせずに直接フェンスを超えるとホームラ

ンになる。Vの最小値V_Mを考えよう。最初に，ボールの軌跡を考える。問4）の結果から，$\boxed{\text{ア}}$ を消去し，$\dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$ を用いると，ボールの軌跡を次のように表すことができる。

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2V^2}\,(1 + \tan^2\theta) \qquad ①$$

①式は，Vを固定して，θを変えたときの，yの値を表す式と考えることができる。①式に$x = L$を代入し，この式を$\tan\theta$に関して平方完成させると，

$$y = -\frac{gL^2}{2V^2}\left(\tan\theta - \boxed{\text{イ}}\right)^2 + \frac{V^2}{2g} - \frac{gL^2}{2V^2} \qquad ②$$

となる。$\tan\theta = \boxed{\text{イ}}$ で打ったとき，$x = L$でのyは最大となり，その値は$\dfrac{V^2}{2g} - \dfrac{gL^2}{2V^2}$である。この値が$H$以上であればホームランとなる。したがって，

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{gL^2}{2V^2} \geqq H \qquad ③$$

この③式を満たすVの最小値がV_Mとなる。

8）$V_M{}^2$の値をg，L，Hを用いて表せ。

このときのθをθ_Mとすると，$\tan\theta_M$は

$$\tan\theta_M = \frac{H + \sqrt{L^2 + H^2}}{L} \qquad ④$$

と表される。図4に示すように，点Aをフェンスの上端にとる。原点Oから引いた傾き$\tan\theta_M$の直線と，$x = L$の直線との交点を点Bとする。

9）LとHを用いて，線分ABの長さを表せ。

以上のことから，線分OBは，y軸と線分OAとのなす角の $\boxed{\text{ウ}}$ であることが分かる。

次に，Vの値をV_Mから大きくしてみよう。②式について，$\tan\theta$を横軸にとり，$x = L$のときのボールのy座標を縦軸にとったグラフを図5に示す。太線の放物線Ⓟは，$V = V_M$のときのもので，この放物線の頂点は，$(\tan\theta_M,\ H)$である。放物線Ⓠは，VがV_Mよりも大きいときの放物線であり，$y = h\ (>H)$となるθの値をθ_1，θ_2とする。

10）図5の放物線Ⓠにおいて，θ_1とθ_2の2つの場合のボールの軌跡を解答欄中に図示せよ。

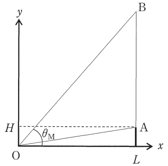

図4

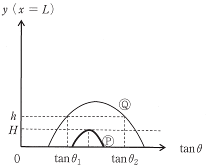

図5

Ⅱ　空所を埋め，問いに答えよ。(配点 45)

図１のように，真空中で，十分に長い直線状の導線Ｐが固定して置かれており，大きさI〔A〕の電流がz軸の正の向きに流れている。導線Ｐから距離r〔m〕の点Ｃにつくる磁場（磁界）の強さH〔A/m〕は，$H = \dfrac{I}{2\pi r}$であり，磁束密度の大きさB〔T〕は，真空の透磁率μ_0〔N/A^2〕を用いて，$B = \mu_0 H$と表すことができる。

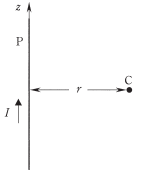

図１

1）点Ｃでの磁場の向きを，解答欄の図に点Ｃを始点とする矢印で示せ。ただし，解答欄の図は，z軸が紙面に垂直になるように描かれており，裏から表へ向かう電流の向きを⊙で示す。

次に，図２のように，導線Ｐから距離rだけ隔てて，z軸に平行に十分に長い直線状の導線Ｑを置く。導線Ｑには，導線Ｐを流れる電流と同じ向きに，大きさIの電流を流す。

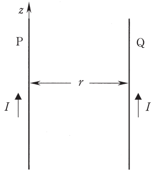

図２

2）導線Ｑにはたらく力の向きに関する法則名を答え，その向きを解答欄の図に矢印で示せ。ただし，解答欄の図は，z軸が紙面に垂直になるように描かれている。

導線Ｑにはたらく力は，導線内の電子にはたらくローレンツ力によって説明できる。図３は，導線Ｑの長さℓ〔m〕の部分を拡大した図である。導線Ｑの断面積をS〔m^2〕，単位体積あたりの電子数をn〔個/m^3〕とする。ただし，導線Ｑの直径はrに比べて十分小さいものとする。ここで導線Ｑの中を電気量$-e$〔C〕（eは電気素量）の電子がすべて電流と逆向きに速さvで運動すると仮定する。導線Ｑの断面を単位時間に$\boxed{\text{ア}}$〔個〕の電子が通過するので，導線Ｑを流れる電流Iは，$I = e \times \boxed{\text{ア}}$と求めることができる。一方，導線Ｑの長さ$\ell$あたりに含まれる電子の数は$\boxed{\text{イ}}$〔個〕である。１個の電子には大きさ$f = evB$〔N〕のローレンツ力がはたらくので，導線Ｑの長さ$\ell$あたりに含まれる電子にはたらくローレンツ力の大きさの総和は，$F = \boxed{\text{イ}} \times f$〔N〕となる。これは導線Ｑの長さ$\ell$の部分にはたらく力の大きさに等しい。以上により，$F$は$I$，$B$，$\ell$を用いて，$\boxed{\text{ウ}}$と求めることができる。一方，$F$の向きは電子にはたらくローレンツ力の向きを考慮すれば，問２）の答えと同じになる。

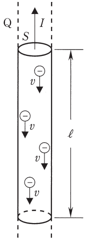

図３

次に，図4のように，z 軸に沿った導線Pに対して垂直に x 軸をとり，x–z 平面上にある一辺の長さ ℓ の正方形のコイル abcd を考える。辺 ad が z 軸と平行で距離 r だけ離れ，辺 ab が x 軸と平行になるようにコイルを固定する。いま，コイルには，小さな電源を用いて，a→b→c→d→a の向きに電流 i〔A〕を流す。ただし，コイルは変形しないものとする。

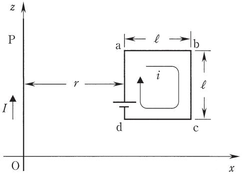

図4

3）辺 ad と辺 bc にそれぞれはたらく力の大きさを r，μ_0，I，i，ℓ を用いて答えよ。

4）導線Pを流れる電流によって，コイル全体はどの向きに力を受けるか。次の（ア）～（エ）の選択肢の中から正しい答えを記号で選べ。

（ア） x 軸の正の向き （イ） x 軸の負の向き （ウ） z 軸の正の向き （エ） z 軸の負の向き

今度は，電源を取り去った場合を考える。図5に示すように，x–z 平面内を，x 軸の正の向きにコイルを導線Pから遠ざける。

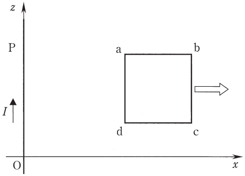

図5

5） コイル内の電流について述べた以下の（ア），（イ），（ウ）の選択肢の中から正しい答えを記号で選び，そうなる理由を説明せよ。

（ア） a→b→c→d→a の向きに流れる

（イ） a→d→c→b→a の向きに流れる

（ウ） 流れない

Ⅲ 問いに答えよ。(配点 45)

(1) 凸レンズによる結像について考える。図1でレンズの中心をO，焦点をF_1，F_2とする。左側の物体ABの実像をCDとする。焦点距離$OF_1 = OF_2 = f$，レンズと物体の距離$OA = a$，レンズと実像の距離$OC = b$とする。矢印付きの実線は光線を表す。倍率$\dfrac{CD}{AB}$をmと表す。

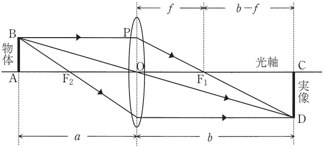

図1

表 bとmの測定値

b〔cm〕	15.0	12.5	7.5
m	2.0	1.5	0.50

1）△ABOと△CDOに着目してmをa，bを用いて表せ。

2）$\triangle POF_1$と$\triangle DCF_1$に着目してmをb，fを用いて表せ。

aをいろいろと変えて結像させて，bとmを測定した。表にその値を示す。

3）解答欄にbとmの関係を示すグラフを実線（――）で描け。
問2）の結果を参考に，描いたグラフの特徴に着目して焦点距離fをグラフから求めよ。
解答欄には，求める方法も示せ。

問1)，2）の結果より，a，b，fは次のレンズの式①を満たすことがわかる。

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f} \qquad ①$$

4）$f = 6.0\,\mathrm{cm}$のとき，倍率が3.0倍の実像を作るためには，a，bをそれぞれいくらにすればよいか。有効数字2桁で示せ。

(2) レンズの焦点距離fが，レンズの形，材質の屈折率とどのような関係にあるかを考察する。レンズは図2のように，片面が半径Rの球面，片面が平面とし，屈折率をnとする$(n > 1)$。図2で左側から光軸と平行に進んできた光線は，球面と平面を通過するときに屈折して，光軸となす角βの方向に進む。屈折の様子を図3に拡大して示す。α，r，i，βはレンズの2つの表面での法線と光線がなす角である。それぞれの角は十分に小さく，例えば$\sin\alpha \fallingdotseq \tan\alpha \fallingdotseq \alpha$と近似できるものとすれば，$\alpha$と$r$の関係は屈折の法則より，$\alpha = nr$と表される。

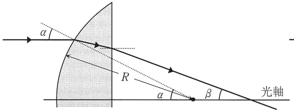

図2

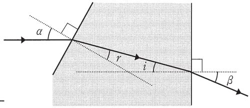

図3

5）屈折の法則より，n，i，β の関係を示せ。

6）幾何学的関係より，α，i，r の関係を示せ。

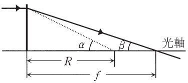

図4

以上の関係より，

$$\beta=(n-1)\alpha \qquad ②$$

であることがわかる。

図2でレンズの厚みを無視すると，光線の様子は図4のように示される。

α，β が十分に小さいことを考慮すると，$R\alpha=f\beta$ と表される。

7）焦点距離 f を R，n を用いて示せ。

（3） 図1で物体の点Bから出てレンズを通過したすべての光線は実像の同じ点に到達することを図5を用いて示そう。レンズは（2）と同じレンズとする。直線AOC（光軸）に垂直上向きに y 軸をとる。点B（$y=d$）から光軸となす角 θ で進んだ光は，$y=h$ の点でレンズを通過し，光軸となす角 β で進む。

（2）での考察と同様に β を求めると

$$\beta=\theta+\frac{h}{f} \qquad ③$$

と表される。

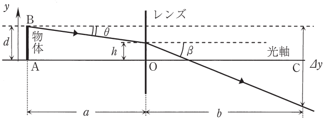

図5

光線が右方向に実像の位置まで進んだとき，y 軸方向の下方への変化 Δy は

$$\Delta y=a\theta+b\beta \qquad ④$$

で与えられる。

図5より，θ は次の式⑤で表される。

$$\theta=\frac{d-h}{a} \qquad ⑤$$

式③，④，⑤より Δy を a，b，f，d，h を用いて表すと

$$\Delta y=\left(\boxed{\quad ア \quad}\right)\times d+\left\{\frac{b}{f}-\left(\boxed{\quad ア \quad}\right)\right\}\times h \qquad ⑥$$

となる。

8）式⑥の空所 $\boxed{\quad ア \quad}$ に入る式を a，b を用いて示せ。

9）式⑥の，h の係数は0となることを示せ。

よって，レンズを通過する位置にかかわらず，光線は同じ点に到達することがわかる。