物理（工学部・情報科学部）

物　　　理

Ⅰ　空所を埋め，問いに答えよ。（配点 60）

（1）　図1のような傾きの角が θ のなめらかな固定された斜面の上での質量 m の小物体Aの運動について考える。重力加速度の大きさを g とする。

Aが斜面から受ける垂直抗力の大きさは $\boxed{\text{ア}}$ である。重力の斜面にそった成分の大きさは $\boxed{\text{イ}}$ である。Aの加速度の斜面にそった成分の大きさは $\boxed{\text{ウ}}$ である。

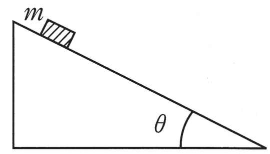

図1

（2）　上記（1）の運動について，以下のように，力学的エネルギー保存の法則を用いて，速度，加速度を求める。図2のように，水平方向右向きに x 軸，鉛直下向きに y 軸をとる。(0, 0) の点から時刻 $t=0$ で物体Aを静かにはなした。速度の x 成分を v_x，y 成分を v_y とする。斜面にそって運動している条件より，$v_y = \boxed{\text{エ}} \times v_x$ である。時刻 t と $t+\Delta t$（Δt は十分小さい）でのAの鉛直方向の位置を y，$y+\Delta y$，時刻 t と $t+\Delta t$ でのAの速度の y 成分を v_y，$v_y+\Delta v_y$ とする。時刻 t でのAの運動エネルギー K を v_y のみを用いて表すと①式と表せる。

$$K = C \times \frac{1}{2} m {v_y}^2 \qquad ①$$

1）$C = \dfrac{1}{\sin^2\theta}$ となることを示せ。

2）力学的エネルギー保存の法則より，時刻 t での v_y と y の関係を C，m，g 等を用いて示せ。

3）同様に，時刻 $t+\Delta t$ での $v_y+\Delta v_y$ と $y+\Delta y$ の関係を示せ。

問3）と問2）の結果の差から，Δv_y の2乗の項を十分に小さいとして無視すると，②式と表せる。

$$C\, v_y \Delta v_y = g \Delta y \qquad ②$$

4）$v_y = \dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ であり，加速度の y 成分 a_y は $a_y = \dfrac{\Delta v_y}{\Delta t}$ である。このことと②式より $a_y = \dfrac{g}{C}$ と表されることを示せ。

5）この運動の加速度の斜面にそった成分の大きさを a_t とする。
図3を参考にして a_t を a_y から求めると，a_t は $\boxed{\text{ウ}}$ と等しいことを示せ。

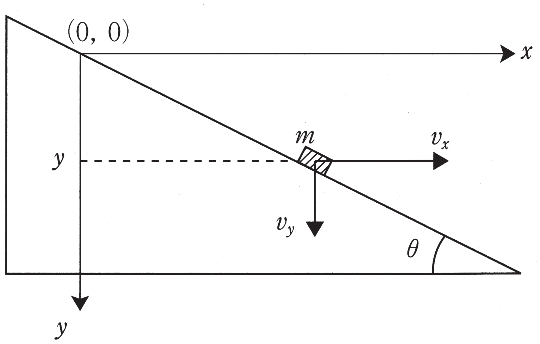

図2

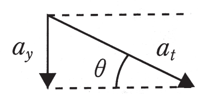

図3

（3） 以下では，斜面は固定されておらず，水平方向に動くことができる場合について考える。斜面を質量 M の物体Bとし，Bと水平面との間には摩擦力は無いものとする。図4にA，Bの運動の様子を示す。A，Bともに静止した状態で，時刻 $t=0$ でAを（0, 0）の点で静かにはなした。Aには，重力とBからの垂直抗力 $\overrightarrow{F_{\mathrm{B}}}$ がはたらく。Bには重力，水平面からの抗力，Aからの力 $\overrightarrow{F_{\mathrm{A}}}$ がはたらく。BはAからの力をうけて水平方向に運動する。

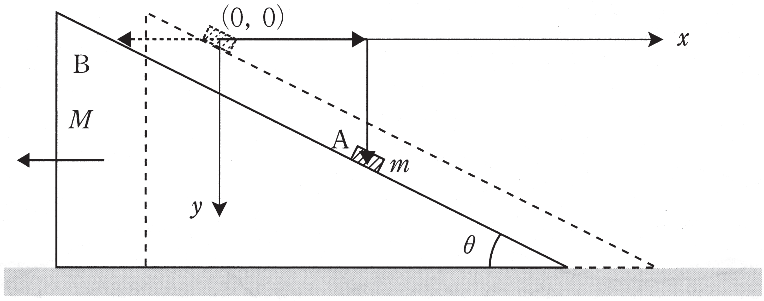

図4

6）$\overrightarrow{F_{\mathrm{B}}}$ と $\overrightarrow{F_{\mathrm{A}}}$ にはどのような関係があるか，また，その関係を表す法則名を書け。

Aの加速度と速度の x 成分，y 成分をそれぞれ，a_x と v_x，a_y と v_y とする。また，Bの加速度と速度の x 成分をそれぞれ a_{B} と V_{B} とする。a_x と a_{B} の関係は，$Ma_{\mathrm{B}}=-ma_x$ である。

7）V_{B} を M，m，v_x を用いて表せ。

8）斜面Bが移動するので，小物体Aが斜面上を運動する条件は，（2）で求めたものとは異なる。図4を考慮して，v_y を v_x，V_{B}，θ で表せ。

AとBの運動エネルギー K_{A} と K_{B} は，問7，8の関係より v_y のみで示すことができる。詳しい計算をするとAとBの運動エネルギーの和について①式に似た形の③式が示される。

$$K_{\mathrm{A}}+K_{\mathrm{B}}=\frac{(M+m\sin^2\theta)}{(M+m)\sin^2\theta}\times\frac{1}{2}m{v_y}^2=D\times\frac{1}{2}m{v_y}^2 \qquad (D\text{ は定数}) \qquad ③$$

この結果，力学的エネルギー保存の法則は，$D\times\frac{1}{2}m{v_y}^2=mgy$ と示されるので，この運動でのAの加速度の y 成分 a_y は，（2）と同様に考えることにより，④式で表される。

$$a_y=\frac{g}{D} \qquad ④$$

9）a_y を m，M，θ，g を用いて表せ。

10）m を M に比べて非常に大きくすると，a_y はどのような値に近づくか答えよ。また，そのときの運動の特徴を述べよ。$\left(a_x=\frac{M\cos\theta}{(M+m)\sin\theta}a_y\text{ である}\right)$

Ⅱ　問いに答えよ。(配点 45)

（1）　図1のように，半径 a の一巻きの円形のコイルを用意する。コイル全体に磁束密度の大きさ B の一様な磁場（磁界）をコイルの面に対して垂直に加える。コイルには小さな端子 P と Q があるが，その影響は無視する。

コイルを貫く磁束密度を，図1の矢印の向きを正として，図2のグラフのように時刻 $t = 0\,\mathrm{s}$ から $4T$ まで時間的に変化させた。磁束密度は $t = 0\,\mathrm{s}$ から T まで一定の割合で増加し，T から $2T$ まで一定の値 B_0 であり，$2T$ から $4T$ まで一定の割合で減少し，$t = 4T$ で 0 になる。

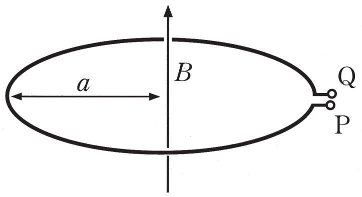

図1

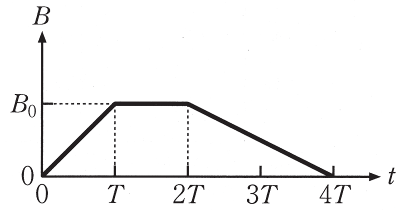

図2

1）コイルを貫く磁束が変化すると，その変化に応じてコイルに起電力が発生する。この現象の名称を答えよ。

2）時刻 $t = 0\,\mathrm{s}$ から T までの間，コイルを貫く磁束 Φ を，時刻 t の関数として求めよ。

3）時刻 $t = 0\,\mathrm{s}$ から T までの間，コイルに発生する起電力の大きさ V_0 を求めよ。

4）コイルを電源とみなすと，時刻 $3T$ のとき，コイルの端子 P と Q の電位はどちらが高いか答えよ。

5）コイルの端子 P の電位を基準にした端子 Q の電位 V を縦軸に，時刻 t を横軸にしたときのグラフを描け。時間の範囲は $t = 0\,\mathrm{s}$ から $4T$ までとする。

（2）　図3にサイクロトロン加速器の概略を示す。図4は図3を真上から見た図である。真空中に半径 R の半円形状で中空の金属電極を対称的に2つ配置する。電極間の隙間は十分小さいとする。電源を用いて左右の電極間に電位差を与える。各電極の内部（図4の半円部分）に電場（電界）はない。両方の電極の内部に磁束密度の大きさ B の磁場を，図4のように紙面の裏から表へ一様に与える。重力の影響は無視する。

図4で左側の電極内の点 P_0 に質量 m，正の電気量 q の粒子を置いた。右側の電極の電位に対して左側の電極に電位 V（$V > 0$）を与えた。すると粒子は点 P_1 に向かって加速をはじめた。この粒子の運動を考察しよう。

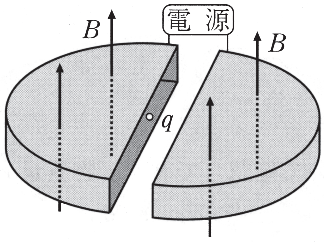

図 3

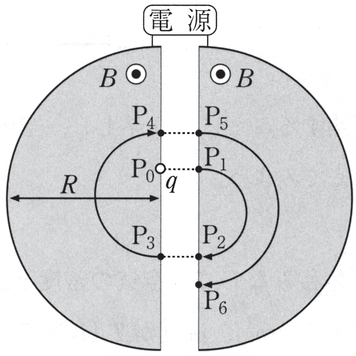

図 4

6）粒子が点 P_1 に到達したときの速さを m，q，V を用いて表せ。

点 P_1 に到達した粒子は，右側の電極内で磁場から力を受けて円運動をはじめた。

7）粒子が磁場から受ける力の名称を答えよ。

8）粒子には問７）の力が作用するにもかかわらず，その速さは点 P_1 から点 P_2 に移動する間で変化しない。その理由を簡潔に説明せよ。

9）このときの粒子の円運動の半径を r，速さを v としたとき，運動方程式から $\dfrac{v}{r}$ を m，q，B を用いて表せ。

10）粒子が点 P_1 から点 P_2 に到達する時間を m，q，B を用いて表せ。

このような一様な磁場中での荷電粒子の等速円運動をサイクロトロン運動という。粒子が点 P_1 から点 P_2 に到達するまでに，今度は右側の電極の電位を左側に対して V とした。すると粒子は点 P_2 から点 P_3 に加速しながら移動した。

11）粒子が点 P_3 に到達したときの速さは，問６）の点 P_1 での値の何倍か求めよ。

その後，粒子が点 P_4 に到達するまでに再度左側の電極の電位を右側に対して高くすると，粒子は点 P_4 から点 P_5 に移動する間にさらに加速され，点 P_5 から点 P_6 へ円運動をしながら移動した。

問10）より，粒子が電極内で半周する時間は粒子の速さに関係しないことがわかる。したがって，粒子の回転運動の周期にあわせた交流電源を用いることによって，粒子を加速し続けることができる。最終的に粒子のサイクロトロン運動の半径が電極の半径 R になるまで，粒子を加速させることが可能である。この加速器は，電子やイオンなどの荷電粒子を加速する装置として幅広い分野で利用されている。

12）図４の装置で粒子が得られる最大の速さを m，q，B，R を使って求めよ。

$\boxed{\text{III}}$ 空所を埋め，問いに答えよ。ただし，$\boxed{\quad イ \quad}$ には語句を入れよ。(配点 45)

気球の中の空気を熱することにより浮上し，空中を飛行する乗り物として，熱気球が知られている。この熱気球の浮上原理について考えてみよう。

(1) 空気を理想気体とみなして，空気の密度と温度の関係について確認しておく。物質量 n〔mol〕の空気の圧力が p〔Pa〕，体積が V〔m^3〕，温度が T〔K〕であるとき，気体定数を R〔J/(mol・K)〕とすると，$pV = \boxed{\quad ア \quad}$ の関係が成り立つ。この式を理想気体の $\boxed{\quad イ \quad}$ という。また，空気 1 mol あたりの質量を m_0〔kg/mol〕とすると，n〔mol〕の空気の質量は $\boxed{\quad ウ \quad}$ と表すことができる。一方，空気の密度（単位体積あたりの質量）を ρ〔kg/m^3〕とすると，$\rho = \dfrac{\boxed{\quad ウ \quad}}{V}$ となる。したがって，p，T，R，m_0 を用いて $\rho = \boxed{\quad エ \quad}$ と表すことができる。

1）p が一定の場合，T の増加とともに空気の ρ はどのように変化するのかを説明せよ。

(2) 図 1 のように，地上に球体と小さく軽いゴンドラからなる気球が置かれ静止している。球体の体積は V である。また，球体は断熱性が高い素材で作られ，常に球形を保ち，変形しないものとする。はじめ球体内には空気が入っており，開口部は開放する。空気の質量を除いた気球の質量は M〔kg〕である。球体内には小さな温度調整器があり，球体内の空気の温度を調節できるようになっている。

はじめ球体内の空気の温度は T_0〔K〕で，密度は ρ_0〔kg/m^3〕であった。球体の開口部の内外で空気の圧力は等しい。次に，球体内の空気をゆっくり加熱して，空気の温度を T にする。このとき球体内の空気の密度は ρ であった。

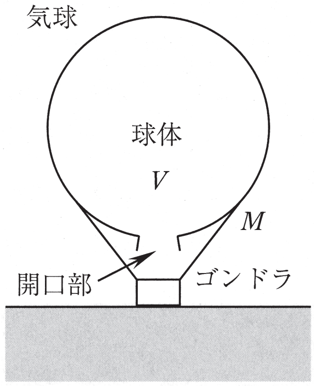

図 1

2）ρ を T_0，ρ_0，T を用いて表せ。

空気を除いた気球にはたらく重力の大きさは，重力加速度の大きさを g〔m/s^2〕とすると，Mg〔N〕である。また，球体内の空気の温度が T のとき，空気の質量は ρV〔kg〕である。球体内の空気にはたらく重力の大きさは，V，T_0，ρ_0，T，g を用いて $\boxed{\text{オ}}$ $\times g$〔N〕と表すことができる。よって，空気を含む気球にはたらく重力の大きさ F〔N〕は，

$$F = \left(M + \boxed{\text{オ}}\right) \times g$$

で与えられる。一方，空気中に置かれた球体は，球体外のまわりの空気から鉛直上向きに押し上げる力，すなわち，浮力を受ける。簡単のため，球体外のまわりの空気の密度を ρ_0 とすると，その浮力の大きさ f〔N〕は球体内の空気と同じ体積をもつ球体外の空気にはたらく重力と同じ大きさで，$f =$ $\boxed{\text{カ}}$ $\times g$ で与えられる。いま，T が F と f の一致する温度 T_f〔K〕を超えると，気球が上昇し始めた。

3）横軸に球体内の空気の温度 T，縦軸に F をとって，解答欄の図にグラフの概形を実線で描け。ただし，図では $f > Mg$ として，f を破線で描いてある。

4）球体内の空気の温度に対する F と f の関係から，気球が浮上する理由を説明せよ。

5）気球が浮上を始める温度 T_f を V，M，T_0，ρ_0 を用いて表せ。

6）$V = 1.20 \times 10^3\ \mathrm{m}^3$，$M = 240\ \mathrm{kg}$ の気球を地上から浮上させるため，球体内の空気を加熱して，空気の温度を何 K より高くすればよいか。その温度 T_f を求めよ。ただし，$T_0 = 300\ \mathrm{K}$，$\rho_0 = 1.20\ \mathrm{kg/m^3}$ とする。