数学〔数学①（工学部・ロボティクス&デザイン工学部）、数学②（全学部）〕

$\boxed{\text{I}}$ 【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

次の空所を埋めよ。（配点 40）

(1) 方程式 $|x|+|x-3|=x+5$ を解くと，$x=\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ である。
ただし，$\boxed{\text{ア}}<\boxed{\text{イ}}$ とする。

(2) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{5}$ のとき，$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\boxed{\text{ウ}}$ であり，$\cos\theta=\boxed{\text{エ}}$ である。
ただし，$0\leqq\theta<\pi$ とする。

(3) n を自然数とする。$\sqrt{4n^2+165}$ が自然数となるような n は全部で $\boxed{\text{オ}}$ 個あり，
そのうち最大の n は $n=\boxed{\text{カ}}$ である。

(4) 白玉 3 個，赤玉 1 個，黒玉 4 個が入った袋から玉を 1 個取り出し，色を確かめてから袋に戻す。この試行を 3 回繰り返す。ただし，黒玉を取り出したときは，試行を繰り返さず終了する。試行が 3 回まで行われる確率は $\boxed{\text{キ}}$ で，白玉をちょうど 2 回取り出す確率は $\boxed{\text{ク}}$ である。

$\boxed{\text{II}}$ 【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

次の空所を埋めよ。（配点 30）

(1) 座標平面上の 3 点 A，B，C は，いずれも原点 O を中心とする半径 1 の円の周上にあるとする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が $2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ を満たすとき，
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boxed{\text{ア}}$ で，$\sin\angle\mathrm{AOB}=\boxed{\text{イ}}$ である。
よって，$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) 数列 $\{a_n\}$ を $a_n=\left[\sqrt{n}\right]$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする。ただし，$[x]$ は実数 x を超えない最大の整数を表すとする。たとえば，$a_2=\left[\sqrt{2}\right]=1$，$a_4=\left[\sqrt{4}\right]=2$ となる。
$a_n=2$ となる項は全部で $\boxed{\text{エ}}$ 個ある。
k を自然数とするとき，$a_n=k$ となる項は全部で $\boxed{\text{オ}}$ 個ある。
$a_n\leqq k$ を満たすすべての項の和を W_k とすると，$W_k=\boxed{\text{カ}}$ である。

Ⅲ 【数学 ① のみ解答】

曲線 $y = 2\sqrt{1-x^2}$ を E とする。直線 $y=0$ と曲線 E で囲まれた図形を A とし，

2 直線 $y=0$，$y=1$ および曲線 E で囲まれた図形を B とする。次の空所を埋めよ。

（配点 40）

(1) 直線 $y=1$ と曲線 E との交点のうち 第 1 象限にある点の x 座標は $\boxed{\text{ア}}$ である。

また，$\sin\theta = \boxed{\text{ア}}$ となる θ は $\theta = \boxed{\text{イ}}$ である。ただし，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。

(2) A を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積は $\boxed{\text{ウ}}$ であり，

B を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積は $\boxed{\text{エ}}$ である。

(3) $x = \sin\theta \ \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくことにより不定積分 $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ を求めると，

$\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \boxed{\text{オ}} + C$ である。ただし，$\boxed{\text{オ}}$ は θ を用いた式で，C は積分定数とする。

(4) A の面積は $\boxed{\text{カ}}$ であり，B の面積は $\boxed{\text{キ}}$ である。

Ⅳ 【数学 ① のみ解答】

関数 $f(x) = x\log x - x + 1 \ \ (x > 0)$ について，次の問いに答えよ。（配点 40）

(1) $f'(x)$，$f''(x)$ を求めよ。

(2) 関数 $y = f(x)$ について，極値，凹凸などを調べて，そのグラフをかけ。

ただし，$\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x = 0$ を用いてよい。

(3) 不定積分 $\displaystyle\int x\log x\,dx$ を部分積分法を用いて求めよ。

(4) 曲線 $y = f(x)$，x 軸 および 直線 $x = e$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

ただし，e は自然対数の底とする。

V 【数学 ② のみ解答】

関数 $f(x) = \left(\log_{\frac{1}{8}} x\right)\left(\log_2 \dfrac{x}{8}\right)^2$ について，次の空所を埋めよ。
ただし，$\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 16$ とする。(配点 40)

(1) $t = \log_2 x$ とおくと，t の値の範囲は $\boxed{\text{ア}} \leqq t \leqq \boxed{\text{イ}}$ であり，
$f(x)$ を t の式で表すと $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) $g(t) = \boxed{\text{ウ}}$ とすると，$g'(t) = \boxed{\text{エ}}$ である。
$g(t)$ の最大値は $\boxed{\text{オ}}$，最小値は $\boxed{\text{カ}}$ である。

(3) $f(x)$ は $x = \boxed{\text{キ}}$ のとき最大値をとり，$x = \boxed{\text{ク}}$，$\boxed{\text{ケ}}$ のとき最小値をとる。
ただし，$\boxed{\text{ク}} < \boxed{\text{ケ}}$ とする。

VI 【数学 ② のみ解答】

関数 $f(x) = (x+a)|x-a|\ \ (-1 \leqq x \leqq 1)$ について，次の問いに答えよ。

ただし，$0 < a < 1$ とする。(配点 40)

(1) $f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$ を絶対値記号を含まない式で表せ。

(2) $f(x)$ の最大値と最小値，およびそれらの値をとるときの x の値を求めよ。

(3) 関数 $g(a)$ を $g(a) = \displaystyle\int_{-a}^{1} f(x)\,dx$ とする。$g(a)$ を a の式で表せ。

(4) $0 < a < 1$ における関数 $g(a)$ の最小値と，その値をとるときの a の値を求めよ。