

I

【数学 ①・数学 ②， どちらも解答】

次の空所を埋めよ。(配点 40)

(1) 2 次方程式 $x^2 - 6x + 2 = 0$ の 2 つの解を α, β ($\alpha < \beta$) とするとき、

$\beta - \alpha =$ である。

また、 $n^2 - 6n + 2 < 0$ を満たす整数 n は 個ある。

(2) $(x + 2y)^5$ の展開式における x^2y^3 の項の係数は であり、

$(x + 2y - 1)^8$ の展開式における x^4y の項の係数は である。

(3) $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ とする。 $\tan \theta = -2$ のとき、 $\cos \theta =$ であり、

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) =$ である。

(4) $f(x) = 2^{x+3}$ とする。

実数 a が $f(a) = \frac{1}{4}$ を満たすとき、 $a =$ であり、

正の実数 b が $f(\log_2 b) = \log_2(f(b))$ を満たすとき、 $b =$ である。

Ⅱ

【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

次の空所を埋めよ。(配点 30)

- (1) t を 0 でない実数とする。2つのベクトル $\vec{a} = (1, -t, -1)$, $\vec{b} = (t, -1, 1)$ の内積を t を用いて表すと $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ ア である。

また、 $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角が $\frac{2}{3}\pi$ であるとき、 t の値は $t =$ イ である。

さらに、 $t =$ イ のとき、 $\vec{a}$, $\vec{b}$ の両方に垂直な単位ベクトル $\vec{c}$ と $\vec{d} = (0, 0, 1)$ の内積の絶対値は $|\vec{c} \cdot \vec{d}| =$ ウ である。

- (2) 数直線上で、原点を出発点として点 P を動かす。ただし、さいころを投げて

3 以上の目が出たときは正の向きに 1 だけ進み、

2 以下の目が出たときは負の向きに 1 だけ進むものとする。

さいころを 4 回投げたときの P の座標を k とするとき、

k の最大値は エ であり、 $k =$ エ となる確率は オ である。

また、 $k < 0$ となる確率は カ である。

Ⅲ

【数学 ① のみ解答】(配点 40)

(1) $i^2 = -1$ とする。O を原点とする複素数平面上の 3 点 $A(z)$, $B(z^2)$, $C(w)$ を考える。

ただし, $z = 2 + i$, $w = ki$ (k は実数) とし,

直線 AC は線分 OB の中点を通るとする。このとき, 次の問いに答えよ。

(i) z^2 を求めよ。また, k の値を求めよ。

(ii) 複素数 $\frac{z^2 - w}{z - w}$ の絶対値と偏角を求めよ。ただし, 偏角 θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

(2) 無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 \log a}{1 + \log a} \right)^n$ について, 次の問いに答えよ。ただし, $a > \frac{1}{e}$ とする。

(i) この無限級数が収束するような a の値の範囲を求めよ。

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 \log a}{1 + \log a} \right)^n = 2$ となるような a の値を求めよ。

IV**【数学 ① のみ解答】**

関数 $f(x) = x + \sin 2x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) について、次の問いに答えよ。 (配点 40)

- (1) $f(x)$ の増減を調べ、最大値を求めよ。
- (2) 曲線 $y = f(x)$, 直線 $x = \frac{\pi}{2}$ および x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。
- (3) 不定積分 $\int x \sin 2x \, dx$ を求めよ。
- (4) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = x$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

V

【数学②のみ解答】

次の空所を埋めよ。(配点 40)

- (1) $\triangle ABC$ において, $AB = 9$, $BC = 3$, $\angle B = 60^\circ$ とする。

辺 AB 上に $AD = 1$ となる点 D をとると, $CD =$ ア であり,

$\triangle BCD$ の外接円の半径は イ である。

この外接円と直線 AC との交点のうち, C と異なる方を E とおくと,

$\angle AED =$ ウ $^\circ$ であり, $\triangle ADE$ の面積は エ である。

- (2) 数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{4(a_n + 1)}{a_n + 4}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たすとする。

$b_n = \frac{a_n - 2}{a_n + 2}$ とおくと, $b_{n+1} =$ オ b_n であるから, 数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$b_n =$ カ であり, $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \frac{\text{キ}}{3^n + 1}$ である。

これより, $a_n > 2 - 2^{-98}$ となる最小の自然数 n は, $n =$ ク である。

ここで, 必要ならば, $\log_3 2 = 0.6309\dots$ を用いてよい。

VI

【数学 ② のみ解答】

3 次関数 $f(x)$ が 2 次関数 $g(x)$ を用いて $f(x) = x g(x)$ と表され,

かつ, 等式 $g(x) = 3x^2 + x \int_0^1 g(t) dt + 2$ を満たすとき, 次の問いに答えよ。(配点 40)

(1) $f'(0)$ の値を求めよ。

(2) $A = \int_0^1 g(t) dt$ の値を求めよ。

(3) $f'(x)$ の最小値を求めよ。

(4) $f(x)$ の増減を調べ, 極値をとるときの x の値を求めよ。

ただし, 極値は求めなくてよい。