

物 理

I 空所を埋め、問いに答えよ。 イ は語句で埋めよ。(配点 60)

熱気球から小物体を発射し、標的に命中させる競技について考える。水平な地面上に熱気球が係留されている。この熱気球には、質量 m の小物体を水平に速さ v_0 で発射する装置が付けられている。はじめ、小物体の発射口は地面と同じ高さであり、そこから水平方向に L だけ離れた地点に標的が置かれている。熱気球が、時刻 $t = 0$ に一定の加速度 (大きさ a) で鉛直方向に上昇を始めた。小物体を標的に命中させるためには、発射時刻 T_0 をいつにすればよいかを考える。重力加速度の大きさを g とし、空気の抵抗は無視する。

(1) 小物体の運動が、地上で静止した人からどのように見えるかを考える。図1に示すように、 $t = 0$ のときの発射口の位置を原点とし、標的の向きに x 軸、鉛直上向きに y 軸をとる。小物体の速度の y 成分を v_y とする。小物体は、 $0 \leq t \leq T_0$ のとき、熱気球とともに一定の加速度 a で上昇し、 $t = T_0$ に熱気球から発射された。このときの熱気球の速さは ア であり、その後、小物体は y 軸の負の向きに大きさ g の加速度をもった放物運動をする。小物体が地面に落下する時刻を T とする。

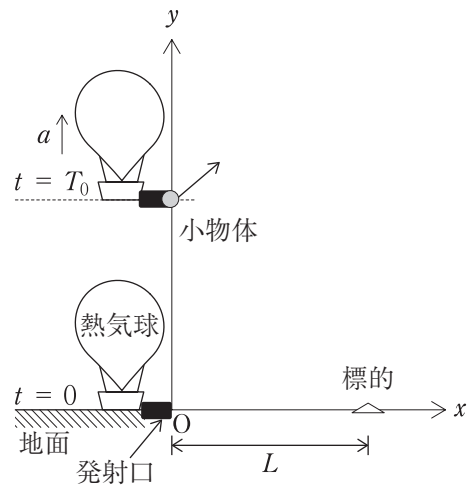


図1

図2は、 $0 \leq t \leq T$ の間で v_y を描いたグラフである。直線の傾きは、加速度を表している。ここで τ は、 $v_y = 0$ となる時刻である。

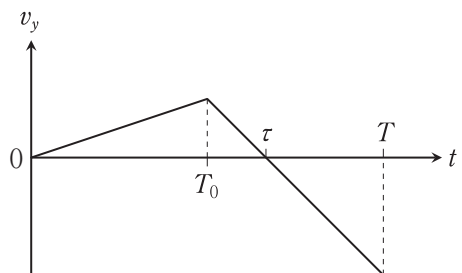


図2

問1 $t = \tau$ のときに小物体はどのような状態にあるか簡潔に述べよ。

問2 τ を求めよ。

問3 小物体の地面からの高さ y についてグラフの概形を解答欄の図に描け。ただし、解答欄の図には、 $t = \tau$ での高さが黒丸 (●) で示してある。

時刻 T では、それまでに小物体が上昇した距離と下降した距離が等しくなる。それぞれの距離は、図2から読み取ることができ、次の関係式が得られる。

$$\frac{1}{2} \times \tau \times \text{ア} = \frac{1}{2} \times (T - \tau) \times g(T - \tau) \quad \text{①}$$

問4 小物体が地面に落下する時刻 T を τ を用いた式で表せ。

この式に τ を代入すると、次のようになる。

$$T = \frac{\sqrt{a(g+a)} + g + a}{g} \cdot T_0 \quad \text{②}$$

小物体が標的に命中するのは、

$$v_0(T - T_0) = L \quad \text{③}$$

となるときである。

問5 T_0 が次の式で与えられることを示せ。

$$T_0 = \left(\sqrt{\frac{g+a}{a}} - 1 \right) \cdot \frac{L}{v_0} \quad \text{④}$$

(2) 次に、この小物体の運動が、熱気球に乗った人からどのように見えるかを考える。小物体の発射口の位置を原点とし、 x 軸と平行に X 軸、鉛直上向きに Y 軸をとる。熱気球から見た地面は、図3に示すように Y 方向に加速度 $-a$ の等加速度直線運動をして離れていく。

一方、熱気球から発射された小物体には重力に加えて鉛直下向きに イ 力がはたらいているように見える。以下では、小物体の Y 方向の運動のみに着目し、熱気球から見ると、小物体は Y 方向に加速度 $-(g+a)$ の等加速度直線運動をして離れていくと考える。

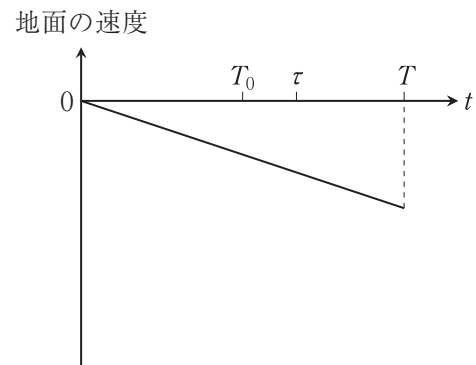


図3

問6 小物体の速度の Y 成分 V_Y のグラフを解答欄の図に描け。なお、この図には地面の速度を表すグラフがあらかじめ描いてある。

問7 問6で描いたグラフ上に、式①の左辺に対応する部分の面積を斜線で示せ。

小物体が地面に落下したとき、次の式が成り立つ。

$$\frac{1}{2} \times T \times aT = \frac{1}{2} \times (T - T_0) \times \text{ウ} \quad \text{⑤}$$

問8 式③、⑤より T を求めよ。

(3) ここで、競技のルールが変更され、熱気球が上昇を始めてから T_1 だけ時間が経過したとき、自動的に小物体が発射されることになった。小物体を標的に命中させるには、熱気球の一定の加速度の大きさを b に変更する必要がある。このとき b は、

$$b = \frac{g}{\text{エ}}$$

とすればよい。

Ⅱ 問いに答えよ。クーロンの法則の比例係数を k 、重力加速度の大きさを g とする。(配点 45)

- (1) クーロン力(静電気力)により、どれくらいの質量の物体が持ち上げられるかを考える。
 図1のように、水平面から高さ h の位置に正の電気量 Q をもつ点電荷が固定され、電気量 $-Q$ の点電荷が水平面に置かれている。正電荷と負電荷は鉛直線上にあり、負電荷の質量を m とする。

問1 負電荷が正電荷から受けるクーロン力の大きさ

F_C を求めよ。

問2 負電荷にはたらく重力の大きさ F_g を求めよ。

問3 負電荷が水平面から浮かび上がる上限の質量

m_{sup} を求めよ。

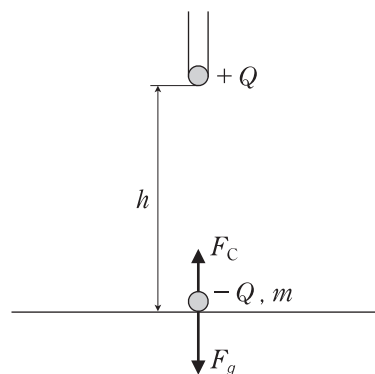


図1

$Q = 1.0 \text{ C}$, $h = 1.0 \text{ m}$ とすると, m_{sup} の値は $9.2 \times 10^8 \text{ kg}$ となる。これは日常生活では非常に大きな質量といえる。いま仮想的に気体水素(2原子分子)からこの正電荷と負電荷を得たとする。つまり、気体水素中のすべての水素分子を陽子と電子に完全に分離し、それぞれ集めて $+1.0 \text{ C}$ の正電荷と -1.0 C の負電荷を取り出す。

問4 電気素量を e 、アボガドロ定数を N_A として、必要な気体水素の体積を求めよ。ただし、気体水素は標準状態とし、1 mol 当たりの体積を V_0 とする。

問4の結果に具体的な数値を代入して気体水素の体積を計算すると $1.1 \times 10^{-7} \text{ m}^3$ ($= 0.11 \text{ cm}^3$) となる。つまり、この量の気体水素に含まれる正と負の電荷で $9.2 \times 10^8 \text{ kg}$ まで持ち上げることができる。

- (2) 図2のように無限に広い平面があり、単位面積当たり電気量 $-\sigma$ の負電荷が一様に分布している。

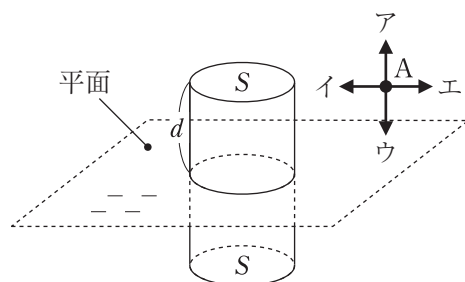


図2

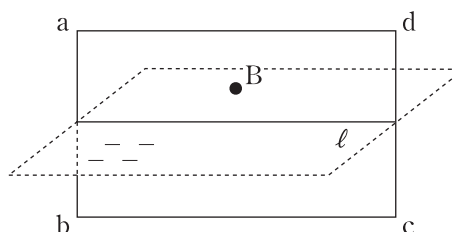


図3

問5 平面より上側の点Aにおける電場（電界）の向きを図2の矢印から選び，記号で答えよ。

問6 図2のような底面積 S ，高さ $2d$ の円筒状の閉曲面に対してガウスの法則を用いることにより，平面から距離 d の点における電場の大きさを求めよ。

問7 図3のように，平面内の直線 l を通り，平面に対して垂直な面 $abcd$ を考える。直線 l を電位の基準点としたとき，面 $abcd$ 内にある点Bの電位は V であった。電位が V ， $2V$ の等電位面の位置を解答欄の図に実線で描け。

(3) 万有引力の法則とクーロンの法則の類似性から，便宜的に重力の力線を考える。距離 r だけ離れた質量 M と質量 m の質点間にはたらく万有引力の大きさは $G \frac{Mm}{r^2}$ なので，クーロンの法則と比較すると，質量が電荷の電気量の役割を，万有引力定数 G が k の役割をしていることがわかる。

問8 大きさ E の電場中に電気量 q の電荷がある。電荷にはたらくクーロン力の大きさ F_C を求めよ。

質量 m の物体にはたらく重力の大きさ F_g とクーロン力の大きさ F_C を比較すると， E が単位面積当たりの電気力線の本数であることから， g は単位面積に対する重力の力線の本数を表していることがわかる。

ここで，昔の人が考えていたように地球を広い平板であると仮定する（図4）。地球は無限に広く，その厚さ d ，密度 ρ をともに一定とする。

問9 平板の地球上でも重力加速度の大きさは $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ とする。この地球に対し，ガウスの法則のように「閉曲面の内部に質量 M があるとき，この閉曲面を貫いて**内部に入る**力線の本数は $4\pi GM$ 本である」ということを用いて，地球の厚さ d を数値で求めよ。ただし， $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$ ，地球の密度を $\rho = 5.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ とする。

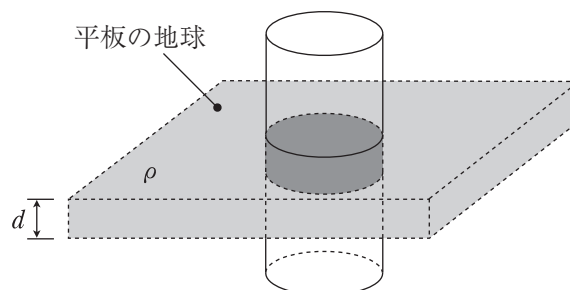


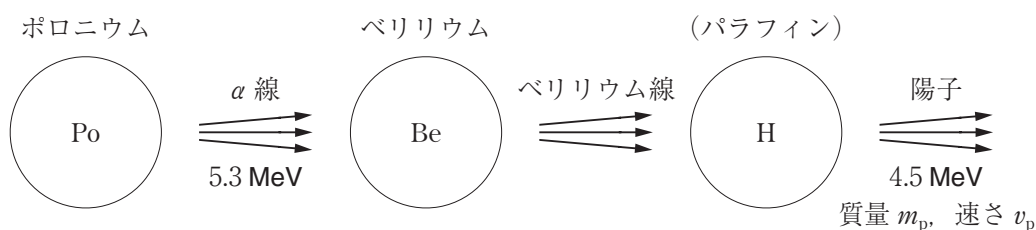
図4

III 空所を埋め、問いに答えよ。(配点 45)

中性子の発見に至る経緯を振り返ってみよう。

1930年、ボーテとベッカーは、ベリリウム(原子番号4)にポロニウムから出る α 線(エネルギー5.3 MeV)を照射すると、透過力の極めて強い放射線が放出されることを見つけた。その後しばらく、この放射線はベリリウム線と呼ばれていた。

1931年、ジョリオ・キュリー夫妻はベリリウム線を詳しく調べ、これを γ 線と考えるとそのエネルギーは15~20 MeV程度であると結論づけた。これはベリリウムに照射した α 線のエネルギーの3~4倍にあたり、エネルギー保存の法則が成り立たないように見える奇妙な結果である。さらに、水素を多量に含むパラフィンにベリリウム線を貫通させると、放射線の電離作用がかえって強くなることを発見した。詳しく調べると、ベリリウム線の照射によりパラフィンから陽子が放出されていることが分かった。その運動エネルギーはおよそ4.5 MeVであった。



- (1) ベリリウム線を波長 λ [m] の γ 線であると仮定する。 γ 線が静止した陽子と衝突して4.5 MeVの運動エネルギーを与えるとき、 γ 線のエネルギーがいくらであるか計算してみよう。陽子の質量を m_p [kg]、衝突後の γ 線の波長を λ' [m]とする。陽子のエネルギーが最大になるのは、 γ 線が衝突前の進行方向と逆向きにはね返されて進むときである。このとき、陽子は衝突前に γ 線が進んでいたのと同じ向きに速さ v_p [m/s]ではね飛ばされたとする。運動量とエネルギーが保存されるとすれば、プランク定数を h [J·s]、真空中の光の速さを c [m/s]として、

$$\frac{h}{\lambda} = \boxed{\text{ア}} + m_p v_p \quad \text{①}$$

$$\frac{hc}{\lambda} = \boxed{\text{イ}} + \frac{1}{2} m_p v_p^2 \quad \text{②}$$

が成り立つ。 $E_p = \frac{1}{2} m_p v_p^2$ とおく。陽子の静止エネルギー $m_p c^2$ はおよそ938 MeVであるが、以下ではこれを900 MeVとして、有効数字1桁で計算せよ。

問1 $E_p = 4.5$ MeVの陽子の速さ v_p は光の速さ c の何倍か、有効数字1桁で答えよ。

式①、②から λ' を消去すると、 $\frac{2hc}{\lambda} = m_p v_p c + \frac{1}{2} m_p v_p^2$ となる。この式から γ 線のエネルギー $\epsilon_\lambda = \frac{hc}{\lambda}$ を E_p で表す次の式が得られる。

$$\epsilon_\lambda = \sqrt{\frac{m_p c^2 E_p}{2} + \frac{E_p}{2}}$$

問2 ϵ_λ を有効数字1桁で求めよ。

この値は、実験から推定された15~20 MeVよりさらに大きな値で、不可解である。

- (2) 次に、ベリリウム線を質量 M [kg] の電荷をもたない未知の中性粒子であると仮定する。この粒子が速さ V [m/s] で陽子と衝突し、衝突前の進行方向と逆向きに速さ V' [m/s] ではね返される場合を考える。この場合には、運動量とエネルギー保存の法則として、

$$MV = -MV' + m_p v_p \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}MV'^2 + \frac{1}{2}m_p v_p^2 \quad (4)$$

が成り立つ。式 (3), (4) から V' を消去すると、

$$V = \frac{M + m_p}{2M} v_p \quad (5)$$

となる。ここで、 $E_X = \frac{1}{2}MV^2$, $E_p = \frac{1}{2}m_p v_p^2$ とおく。

問3 $E_X = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(\frac{m_p}{M} + \frac{M}{m_p} \right) \right\} E_p$ となることを示せ。

問4 $E_X \geq E_p$ であることを示せ。

問4の結果、ポロニウムから飛び出す α 線のエネルギー 5.3 MeV よりも E_X の値が小さくなり、矛盾が解消する可能性があることが分かる。 E_X の値は未知の中性粒子の質量 M によって変化する。 V が分かれば式 (5) から M を計算できるが、 V を測定することは難しい。

問5 中性粒子の性質を調べることが難しい理由を簡潔に説明せよ。

1932年、チャドウィックは、ベリリウム線をパラフィンに変えて窒素に照射し、はね飛ばされた窒素原子核の速さ v_N を測定した。窒素原子核の質量を m_N とすれば、式 (5) に対応する V を表す式を、 m_N , v_N を用いて作ることができる。

問6 $m_N = 14m_p$ とする。 M と m_p の比の値 $\frac{M}{m_p}$ を v_N , v_p を用いて求めよ。

チャドウィックは $\frac{v_p}{v_N} = \frac{3.3 \times 10^9 \text{ cm/s}}{4.7 \times 10^8 \text{ cm/s}}$ となることを見だし、 M の値が m_p の 1.15 倍となると結論づけた。この値を用いると $E_X \approx 4.5 \text{ MeV}$ となり、ポロニウムから飛び出す α 線のエネルギー 5.3 MeV よりも小さい。その後、ベリリウム線が陽子とほぼ同じ質量で電荷をもたない中性子の流れであると考え、いろいろな現象が自然な形でうまく説明できることが分かった。なお、現在の精密測定により、中性子の質量は陽子の質量のおよそ 1.001 倍であることが知られている。

α 粒子を ${}^4_2\text{He}$, ベリリウム原子核を ${}^9_4\text{Be}$, 中性子を ${}^1_0\text{n}$ と表す。原子番号 6 は炭素 C である。

問7 α 粒子をベリリウム原子核に照射したとき中性子を放出する過程の核反応式を示せ。