# 一般入試前期A日程2日目

## 数　学

Ⅰ　【数学①・数学②，どちらも解答】

| | | | |
|---|---|---|---|
| ア | $-1$ | | |
| イ | $4$ | ウ | $7$ |
| エ | $2$ | オ | $-8$ |
| カ | $-\frac{3}{5}$ | キ | $-\frac{3}{4}$ |
| ク | $\frac{5}{16}$ | ケ | $\frac{21}{64}$ |

Ⅱ　【数学①・数学②，どちらも解答】

| | | | |
|---|---|---|---|
| ア | $3+2t$ | イ | $-\frac{1}{2}$ |
| ウ | $4$ | エ | $4$ |
| オ | $\sqrt{6}$ | | |
| カ | $\frac{5^n-1}{4}$ | キ | $0$ |
| ク | $67$ | | |

## Ⅲ 【数学①のみ解答】((2)の解答においては，答えだけでなく計算過程も書きなさい)

| | | | |
|---|---|---|---|
| ア | $1-x-2y$ | イ | $y-2x$ |
| ウ | $-3-6i$ | エ | $8$ |

(2)

(i) $I_1 = \displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx = \Big[e^x(x-1)\Big]_0^1 = 1$

(ii) 部分積分法により $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 x^{n+1}e^x\,dx = \Big[e^x x^{n+1}\Big]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n e^x\,dx = e-(n+1)I_n$

(iii) $a_1 = 0,\ b_1 = 1$ であり (2) より $b_n = (-1)^{n+1}n!$ となる。

$b_{12} = -12!$ より $k = 10$

## Ⅳ 【数学①のみ解答】(解答においては，答えだけでなく計算過程も書きなさい)

(1) $\sin x = t$ とおくと $t^3 + \dfrac{1}{4}(1-2t^2) = \dfrac{1}{4}$ となり $t^2(2t-1) = 0$ である。

よって $\sin x = 0,\ \dfrac{1}{2}$ より $x = 0,\ \dfrac{\pi}{6}$

(2) $f'(x) = 3\sin^2 x\cos x - \dfrac{1}{2}\sin 2x = \sin x\cos x(3\sin x - 1)$

(3) $f'(x) = 0$ となるのは $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $\sin x = 0,\ \dfrac{1}{3}$ なので増減表は

| $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\alpha = 0$ | $\cdots$ | $\beta$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | 極大値 | ↘ | 極小値 | ↗ | |

となる。よって $\sin\alpha = 0,\ \sin\beta = \dfrac{1}{3}$

(4) $\displaystyle\int_\alpha^\beta \cos^3 x\,dx = \int_\alpha^\beta (1-\sin^2 x)\cos x\,dx$ より $\sin x = t$ とおくと置換積分法により

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} (1-t^2)\,dt = \Big[t - \frac{t^3}{3}\Big]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{26}{81}$

## Ⅴ 【数学②のみ解答】

| | | | |
|---|---|---|---|
| ア | $\frac{1}{2}$ | イ | $5$ |
| ウ | $2\sqrt{2}$ | エ | $\frac{5\pi}{6}$ |
| オ | $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ | カ | $\frac{\sqrt{21}}{3}$ |
| キ | $\frac{2}{3}$ | ク | $\frac{6\sqrt{3}}{5}$ |

## Ⅵ 【数学②のみ解答】(解答においては，答えだけでなく計算過程も書きなさい)

(1) $y' = 2x$ より $x = 1$ のとき接線の傾きは $2$ なので求める接線の方程式は $y = 2x + 3$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \{(x^2+4)-(2x+3)\}\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

(3) $C'$ の方程式は $y = (x-a)^2 + 4 + a^3$ であり $y = 2x + 3$ と $2$ つの共有点を持つから

2 次方程式 $x^2 - 2(a+1)x + a^3 + a^2 + 1 = 0$ の判別式を $D$ とおくと

$D/4 = -a^3 + 2a = -a(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2}) > 0$ であり 条件 $a > 0$ があるので $0 < a < \sqrt{2}$

(4) $x^2 - 2(a+1)x + a^3 + a^2 + 1 = 0$ の $2$ つの実数解を $\alpha,\ \beta$ とおくと

$2$ つの共有点は $(\alpha,\ 2\alpha+3)$, $(\beta,\ 2\beta+3)$ なので

$\mathrm{PQ}^2 = 5(\alpha-\beta)^2 = 5((\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta) = 5(4(a+1)^2 - 4(a^3+a^2+1)) = -20(a^3-2a)$

$f(a) = -a^3 + 2a$ とおくと $f'(a) = -3a^2 + 2$ なので $0 < a < \sqrt{2}$ の範囲で増減表をつくると

| $a$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\sqrt{6}}{3}$ | $\cdots$ | $\sqrt{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(a)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(a)$ | | ↗ | 極大値 | ↘ | |

よって $a = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$