数学〔数学①(工学部･ロボティクス＆デザイン工学部)、数学②(全学部)〕

I 【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

次の空所を埋めよ。(配点 35)

(1) $f(x) = 2 \cdot 5^x - 5^{2x-2}$，$g(x) = -3 \cdot 5^x$ とする。

$f(0)$ の値を既約分数で表すと，$f(0) = \boxed{\text{ア}}$ である。

また，$f(x) = g(x)$ を満たす x の値は，$x = \boxed{\text{イ}}$ である。

(2) n を自然数とするとき，$(x+3)^n$ を $(x+2)^2$ で割った余りを $px+q$ とする。

$\{(x+2)+1\}^n$ に二項定理を用いると，$p = \boxed{\text{ウ}}$，$q = \boxed{\text{エ}}$ であることがわかる。

(3) $m^2 - 6m + 8 = 2^n$ を満たす自然数 m，n は，$m = \boxed{\text{オ}}$，$n = \boxed{\text{カ}}$ である。

(4) 4 人の候補者 A，B，C，D から 1 人を選ぶ投票を行う。

8 人の投票人が 1 票ずつ投票を行った結果，A，B，C，D の得票数がそれぞれ a，b，c，d のとき，得票数の組を (a, b, c, d) と表す。ただし，$a+b+c+d=8$ であるとする。

このとき，組 (a, b, c, d) の総数は $\boxed{\text{キ}}$ である。また，どの候補者も 5 票以上の票を獲得できなかった場合の組 (a, b, c, d) の総数は $\boxed{\text{ク}}$ である。

$\boxed{\text{II}}$ 【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

次の空所を埋めよ。(配点 35)

(1) 初項 a_1 を正の整数，公比 r を 1 より大きい整数とする等比数列 $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ がある。$a_4 = 135$ のとき，$a_1 = \boxed{\text{ア}}$ であり，$r = \boxed{\text{イ}}$ である。

このとき，$T_n = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \cdots + n \cdot a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k$ と定義する。

$r \cdot T_n - T_n$ を計算することにより T_n を求めると，

$T_n = \left(\boxed{\text{ウ}}\right) r^n + \boxed{\text{エ}}$ である。ただし，$\boxed{\text{ウ}}$ は n の整式とする。

(2) 一辺の長さが 2 の正四面体 OABC について，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする。

また，辺 AB を 1：3 に内分する点を P とする。

(i) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表すと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boxed{\text{オ}}$ である。

(ii) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値は，$\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{\text{カ}}$ である。

(iii) 点 G が $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ を満たすとき，$|\overrightarrow{\mathrm{PG}}| = \boxed{\text{キ}}$ である。

また，$\overrightarrow{\mathrm{PO}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PG}}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta = \boxed{\text{ク}}$ である。

$\boxed{\text{III}}$ 【数学 ① のみ解答】

次の空所を埋めよ。(配点 40)

(1) $A=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\sin x\,dx$, $B=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 3x\sin x\,dx$ とする。

(i) $\cos x=t$ とおくとき，$\cos 2x$ を t の式で表すと，$\cos 2x=\boxed{\text{ア}}$ である。

また，$\cos 3x$ を t の式で表すと，$\cos 3x=\boxed{\text{イ}}$ である。

(ii) 置換積分法を用いて A の値を求めると，$A=\boxed{\text{ウ}}$ である。

また，B の値を求めると，$B=\boxed{\text{エ}}$ である。

(2) O を原点とする複素数平面上の点を $\mathrm{A}(\alpha)$ とする。

ただし，$i^2=-1$ とし，$\alpha=\sqrt{3}+i$ とする。

(i) α を極形式で表すと，$\alpha=\boxed{\text{オ}}(\cos\boxed{\text{カ}}+i\sin\boxed{\text{カ}})$ である。

ただし，$\boxed{\text{オ}}>0$，$0\leqq\boxed{\text{カ}}<2\pi$ とする。

(ii) $\triangle\mathrm{OAB}$ が $\mathrm{OA}=\mathrm{AB}$ の直角二等辺三角形となるような点 B を表す複素数は，

$$\beta_1=\left(\boxed{\text{キ}}\right)+\left(\boxed{\text{ク}}\right)i \quad \text{または} \quad \beta_2=\left(\boxed{\text{ケ}}\right)+\left(\boxed{\text{コ}}\right)i$$

である。ただし，$\boxed{\text{キ}}$ ～ $\boxed{\text{コ}}$ は実数であり，$\boxed{\text{キ}}<\boxed{\text{ケ}}$ とする。

(iii) $z=\beta_1\beta_2$ とするとき，z^n が正の実数となるような最小の自然数 n は，

$n=\boxed{\text{サ}}$ である。

$\boxed{\text{IV}}$ **【数学 ① のみ解答】**

関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ $(x > 0)$ について，次の問いに答えよ。(配点 40)

(1) 導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ。

また，曲線 $y = f(x)$ の凹凸を調べ，変曲点を求めよ。

(3) 曲線 $y = f(x)$，直線 $x = e$ および x 軸で囲まれた図形を A とする。

$\log x = t$ とおき，置換積分法を用いて A の面積 S を求めよ。

ただし，e は自然対数の底とする。

(4) (3) の図形 A を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$\boxed{\text{V}}$ 【数学 ② のみ解答】

次の空所を埋めよ。(配点 40)

(1) $f(\theta)=\dfrac{5}{2}\sin 2\theta-\cos\theta\,(\cos 2\theta+2)\quad\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。

$f(\theta)=\cos\theta(A\sin\theta-1)(\sin\theta+B)$ となるような定数 A, B は，$A=\boxed{\text{ア}}$，$B=\boxed{\text{イ}}$ である。したがって，$f(\theta)=0$ のとき，$\sin\theta=\boxed{\text{ウ}}$ であり，$\theta=\boxed{\text{エ}}$ である。

(2) 赤球 2 個，白球 3 個の入っている箱から，球を 1 個取り出し，色を調べてから箱に戻すという試行を考え，「赤球が出る」という事象を A とする。この試行を n 回行ったとき，事象 A が偶数回起こる確率を P_n とする。ただし，0 は偶数と考える。

(i) P_2 の値を求めるには，赤球が出る回数が 0 回または 2 回の場合を考えるとよい。
したがって，$P_2=\boxed{\text{オ}}$ である。

(ii) 同様に，$P_3=\boxed{\text{カ}}$ である。

(iii) この試行を $n+1$ 回行ったときに，事象 A が偶数回起こるのは次の 2 つの場合である。

- 1 回目から n 回目までに A が偶数回起こり，$n+1$ 回目に A が起こらない。
- 1 回目から n 回目までに A が奇数回起こり，$n+1$ 回目に A が起こる。

したがって，$P_{n+1}=\boxed{\text{キ}}\times P_n+\boxed{\text{ク}}\times(1-P_n)$ である。

(iv) (iii) で得られた式を定数 a と r を用いて，$P_{n+1}-a=r(P_n-a)$ と変形すると，
a と r の値は，$a=\boxed{\text{ケ}}$，$r=\boxed{\text{コ}}$ である。
したがって，P_n を n の式で表すと，$P_n=\boxed{\text{サ}}+a$ である。

VI　【数学 ② のみ解答】

曲線 $y = x^2 + 2x + 1$ を C とし，C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2 + 2t + 1)$ における接線を l とする。次の問いに答えよ。(配点 40)

(1)　接線 l の方程式を求めよ。

(2)　点 P と点 $\mathrm{Q}(2,\ 0)$ の距離の 2 乗 PQ^2 を t を用いて表せ。

(3)　$g(t)$ を (2) で求めた式で表される関数とする。$g(t)$ の増減を調べ，最小値を求めよ。

(4)　$g(t)$ が最小となるとき，曲線 C，接線 l および x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。