# 一般入試前期A日程１日目

## 数　学

Ⅰ　【数学①・数学②，どちらも解答】

| | | | |
|---|---|---|---|
| ア | $-3$ | イ | $\frac{7}{2}$ |
| ウ | $0$ | エ | $\frac{1}{4}$ |
| オ | $3$ | カ | $\frac{1}{2}$ |
| キ | $720$ | ク | $180$ |

Ⅱ　【数学①・数学②，どちらも解答】

| | |
|---|---|
| ア | $t^2-2t+1$ |
| イ | $-1$ |
| ウ | $4$ |
| エ | $\frac{4}{5}$ |
| オ | $\frac{k}{k-1}$ |
| カ | $5$ |

## Ⅲ 【数学①のみ解答】((2)の解答においては，答えだけでなく計算過程も書きなさい)

| | | | |
|---|---|---|---|
| ア | $\dfrac{\pi}{3}$ | | |
| イ | $-1$ | ウ | $\sqrt{3}$ |
| エ | $-3$ | | |
| オ | $-\dfrac{7}{6}$ | カ | $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ |

(2)

(i) $f'(x) = \dfrac{-3x^2+3}{x^4} = \dfrac{-3(x+1)(x-1)}{x^4}$

$f'(x)=0$ となるのは $x=1$ のとき。

増減表は次のようになる。

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ＼ | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | ＼ | ↗ | 極大, 2 | ↘ |

(ii) 接線の方程式は $y = \dfrac{3-3a^2}{a^4}(x-a) + \dfrac{3a^2-1}{a^3}$ より，$y = \dfrac{3-3a^2}{a^4}x + \dfrac{6a^2-4}{a^3}$

これが原点を通ることより，$\dfrac{6a^2-4}{a^3} = 0$

$a>0$ より $a = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

## Ⅳ 【数学①のみ解答】（解答においては，答えだけでなく計算過程も書きなさい）

(1) $C_1$ と $C_3$ の交点の $x$ 座標は，$e^{kx}=e^{6k-kx}$ より，$x=3$

$C_2$ と $C_3$ の交点の $x$ 座標は，$e^{2kx}=e^{6k-kx}$ より，$x=2$

(2) $\displaystyle\int e^{6k-kx}\,dx=-\frac{1}{k}e^{6k-kx}+C$ （$C$ は積分定数）

(3)
$$\begin{aligned}S(k)&=\int_0^2(e^{2kx}-e^{kx})\,dx+\int_2^3(e^{6k-kx}-e^{kx})\,dx\\&=\int_0^2 e^{2kx}\,dx+\int_2^3 e^{6k-kx}\,dx-\int_0^3 e^{kx}\,dx\\&=\frac{1}{2k}\Big[e^{2kx}\Big]_0^2-\frac{1}{k}\Big[e^{6k-kx}\Big]_2^3-\frac{1}{k}\Big[e^{kx}\Big]_0^3\\&=\frac{1}{2k}(3e^{4k}-4e^{3k}+1)\end{aligned}$$

(4) $t=e^k$ とすると，$S(k)=\dfrac{1}{2k}(3t^4-4t^3+1)=\dfrac{1}{2k}(t-1)^2(3t^2+2t+1)$

よって，$S(k)=\dfrac{1}{2k}(e^k-1)^2(3e^{2k}+2e^k+1)$

これより，$\displaystyle\lim_{k\to+0}\frac{S(k)}{k}=\frac{1}{2}\lim_{k\to+0}\left\{\left(\frac{e^k-1}{k}\right)^2(3e^{2k}+2e^k+1)\right\}=3$

## Ⅴ 【数学②のみ解答】

| | | | |
|---|---|---|---|
| ア | $kx-2$ | イ | $\sqrt{5}$ |
| ウ | $\dfrac{2k+4}{k^2+1}$ | エ | $\sqrt{10}$ |
| オ | 5 | カ | 4 |
| キ | 33 | ク | 77 |

## $\boxed{\text{VI}}$ **【数学②のみ解答】**（解答においては，答えだけでなく計算過程も書きなさい）

(1) $C_1$ と $C_2$ の交点の $x$ 座標は，$(x-a)^2 = x^2$ より，$x = \dfrac{a}{2}$

$C_2$ と $x$ 軸との交点の $x$ 座標は，$1-(x-a)^2=0$，$1 < a < 2,\ 0 \leqq x \leqq 3$ より，

$x = a-1,\ a+1$

(2) $\displaystyle\int_1^2 (x-a)^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - ax^2 + a^2x\right]_1^2 = a^2 - 3a + \frac{7}{3}$

(3) $\displaystyle S(a) = \int_{\frac{a}{2}}^{1} \{(1-(x-a)^2) - (1-x^2)\}\,dx + \int_1^2 \{1-(x-a)^2\}\,dx$

$\displaystyle = \int_{\frac{a}{2}}^{1} (2ax - a^2)\,dx + \int_1^2 dx - \int_1^2 (x-a)^2\,dx$

$\displaystyle = \Big[ax^2 - a^2x\Big]_{\frac{a}{2}}^{1} + 1 - \left(a^2 - 3a + \frac{7}{3}\right)$

$\displaystyle = \frac{1}{4}a^3 - 2a^2 + 4a - \frac{4}{3}$

(4) $S(a)$ の増減を調べる。

$\displaystyle S'(a) = \frac{3}{4}a^2 - 4a + 4 = \frac{1}{4}(3a-4)(a-4)$

増減表は次にようになる。

| $a$ | 1 | $\cdots$ | $\frac{4}{3}$ | $\cdots$ | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(a)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $S(a)$ | | ↗ | 極大，最大 | ↘ | |

よって，$S(a)$ は $a = \dfrac{4}{3}$ のとき最大となる。