I 【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

次の空所を埋めよ。(配点 40)

(1) 方程式 $|5x-3|-2=0$ の解のうち，最も小さな値は $x=$ $\boxed{\text{ア}}$ である。

また，方程式 $\big||5x-4|-3\big|-2=0$ の解のうち，最も小さな値は $x=$ $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) 3^{200} は $\boxed{\text{ウ}}$ 桁の整数であり，12^{200} は $\boxed{\text{エ}}$ 桁の整数である。

ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

(3) 直線 $12x-5y+36=0$ に点 $(0,\ 2)$ を中心とする円が接するとき，

円の半径は $\boxed{\text{オ}}$ であり，接点の x 座標は $\boxed{\text{カ}}$ である。

(4) 黒石 4 個と白石 2 個が入った袋がある。袋から石を 1 個取り出し，

黒石ならば袋に戻し，白石ならば袋に戻さない試行を繰り返す。

(i) 2 回の試行の後，2 個の白石が袋に残っている確率は $\boxed{\text{キ}}$ である。

(ii) 3 回の試行を行うとき，3 回目の試行で白石を取り出す確率は $\boxed{\text{ク}}$ である。

$\boxed{\text{II}}$ 【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

次の空所を埋めよ。（配点 30）

(1) 三角形 OAB について，OA$=8$, OB$=7$, AB$=5$ とする。

また，点 O から辺 AB に下ろした垂線と，点 A から辺 OB に下ろした垂線との交点を H とする。以下の手順で OH の長さを求める。

(i) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値は $\boxed{\text{ア}}$ である。

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと，AH $\perp$ OB および OH $\perp$ AB の条件から

$s=\boxed{\text{イ}}$，$t=\boxed{\text{ウ}}$ である。

(iii) OH の長さは OH$=\boxed{\text{エ}}$ である。

(2) 数字が書かれたカードがあり，数字が 1 のカードが 1 枚，数字が 2 のカードが 2 枚，数字が 3 のカードが 3 枚，合計 6 枚のカードがあるとする。

これら 6 枚のカードを並べて 6 桁の整数をつくるとき，

(i) つくられる整数は全部で $\boxed{\text{オ}}$ 個ある。

(ii) 一の位と十の位の数字が一致する整数は全部で $\boxed{\text{カ}}$ 個ある。

(iii) 一の位の数字が 1 ではない整数は全部で $\boxed{\text{キ}}$ 個ある。

III　【数学 ① のみ解答】

$f(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2}$ とする。曲線 $C : y = f(x)\ \ (0 \leqq x \leqq 2)$ について，
次の問いに答えよ。（配点 40）

(1)　関数 $f(x)$ を微分せよ。

(2)　曲線 C 上の点 P $(p,\, f(p))$ $(0 < p < 2)$ における接線 l が点 $(0, 2)$ を通るとき，
点 P の座標を求めよ。

(3)　曲線 C と (2) で定めた接線 l および y 軸で囲まれた図形を D とする。$x = 2\cos\theta$ とおき，
置換積分法を用いて，図形 D の面積 S を求めよ。

(4)　(3) で定めた図形 D を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$\boxed{\text{IV}}$ 【数学 ① のみ解答】

複素数平面上の 4 点 A(z_1), B(z_2), C(z_3), D(z_4) を頂点とする平行四辺形 ABCD について考える。$z_1=-1$, $z_2=1$, $z_4=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とするとき，次の問いに答えよ。
ただし，i は虚数単位とする。（配点 40）

(1) 辺 AD の長さと $\angle\mathrm{BAD}$ を求めよ。ただし，$0 \leqq \angle\mathrm{BAD} \leqq \pi$ とする。

(2) 複素数 z_3 を求めよ。

(3) 対角線 BD の長さを求めよ。

(4) 対角線 AC と BD の交点を P(w) とするとき，$\dfrac{z_2-w}{z_1-w}$ を求めよ。

(5) $\cos\angle\mathrm{APB}$ を求めよ。

$\boxed{\text{V}}$ 【数学 ② のみ解答】

次の空所を埋めよ。(配点 40)

(1) 関数 $y = 3\sin\theta\sin 2\theta + 2\cos\theta + 6$ の最大値を，以下の手順で求める。

ただし，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ とする。

(i) $\cos\theta = t$ とおき，y を t の式で表すと $y = \boxed{\text{ア}}$ である。

(ii) $g(t) = \boxed{\text{ア}}$ とおくと，$g'(t) = \boxed{\text{イ}}$ である。ただし，$-1 < t < 1$ とする。

(iii) 関数 y の最大値は $\boxed{\text{ウ}}$ で，そのときの $\cos\theta$ の値は，$\cos\theta = \boxed{\text{エ}}$ である。

(2) 数列 $\{a_n\}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$:

$$1, 1, 4, 1, 4, 9, 1, 4, 9, 16, 1, 4, 9, 16, 25, 1, \cdots$$

がある。この数列 $\{a_n\}$ を次のように群に分け，第 k 群には，1 から k までの自然数の 2 乗が，値の小さい順に入っているものとする。ただし，k は自然数とする。

$$\underbrace{1}_{\text{第 1 群}} \mid \underbrace{1, 4}_{\text{第 2 群}} \mid \underbrace{1, 4, 9}_{\text{第 3 群}} \mid \underbrace{1, 4, 9, 16}_{\text{第 4 群}} \mid \underbrace{1, 4, 9, 16, 25}_{\text{第 5 群}} \mid 1, \cdots$$

(i) この数列 $\{a_n\}$ で，4 が最初に現れるのは第 3 項であり，64 が最初に現れるのは第 $\boxed{\text{オ}}$ 項である。

(ii) $\{a_n\}$ の第 4 群の最初の数は第 7 項であり，第 21 群の最初の数は第 $\boxed{\text{カ}}$ 項である。

(iii) $\{a_n\}$ の初項から第 m 群の最後の項までの数列の総和は $\dfrac{1}{12}m(m+1)^2\left(\boxed{\text{キ}}\right)$ である。ただし，m は自然数とする。

ここで，数列の和の公式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ を用いてもよい。

(iv) $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき, $S_n > 1000$ となる最小の自然数 n は $\boxed{\text{ク}}$ である。

$\boxed{\text{VI}}$ 【数学 ② のみ解答】

関数 $f(x) = 4x^3 - 16x^2 + 20x - 7$ について，次の問いに答えよ。（配点 40）

(1) 関数 $f(x)$ が $x = p$ で極大値を，$x = q$ で極小値をとるとき，p と q の値を求めよ。

(2) a を定数とするとき，曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = a$ の共有点の個数を，a の値で場合分けして求めよ。

(3) p を (1) で求めた値とする。曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(p, f(p))$ における接線 l と曲線 $y = f(x)$ との共有点のうち，点 P 以外の共有点の座標を求めよ。

(4) 曲線 $y = f(x)$ と (3) で定めた接線 l で囲まれた図形の面積 S を求めよ。
ただし，$\displaystyle\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$ (C は積分定数) を用いてもよい。