

一般入試後期D日程

数 学

I 【数学①・数学②，どちらも解答】

ア	$\frac{1}{5}$	イ	$-\frac{1}{5}$
ウ	96	エ	216
オ	2	カ	$-\frac{24}{13}$
キ	$\frac{4}{9}$	ク	$\frac{166}{675}$

II 【数学①・数学②，どちらも解答】

ア	44		
イ	$\frac{11}{60}$	ウ	$\frac{11}{15}$
エ	$\frac{11\sqrt{3}}{3}$		
オ	60	カ	16
キ	50		

III

【数学①のみ解答】(解答においては、答えだけでなく計算過程も書きなさい)

$$(1) f'(x) = -\frac{x}{2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2(4-x^2)}$$

$$(2) \text{点 } P \text{ の } x \text{ 座標を } p \text{ とすると、接線の式は、} y - \frac{\sqrt{4-p^2}}{2} = -\frac{p\sqrt{4-p^2}}{2(4-p^2)}(x-p).$$

この式に $(x, y) = (0, 2)$ を代入すると

$$2 - \frac{\sqrt{4-p^2}}{2} = -\frac{p\sqrt{4-p^2}}{2(4-p^2)}(-p) \cdot 2\sqrt{4-p^2} - \frac{4-p^2}{2} = \frac{p^2}{2}.$$

式を整理して、 $\sqrt{4-p^2} = 1$ となるので $p = \sqrt{3}$.

$$\text{よって、点 } P \text{ の座標は、} (p, f(p)) = \left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$$

$$(3) \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-\cos^2\theta}(-2\sin\theta)d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\theta d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2\theta)d\theta = \left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

これを $(0, 0), (\sqrt{3}, 0), (\sqrt{3}, \frac{1}{2}), (0, 2)$ を頂点とする台形の面積から引くと

$$S = \frac{(2 + \frac{1}{2}) \cdot \sqrt{3}}{2} - \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

$$(4) \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 dy = \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 4(1-y^2)dy = \pi \left[4y - \frac{4}{3}y^3\right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{5}{6}\pi$$

これを $\frac{1}{2} \leq y \leq 2$ の範囲の l を y 軸の周りに回転してできる円錐の体積から引くと

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi(\sqrt{3})^2 \cdot \frac{3}{2} - \frac{5}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi$$

IV

【数学①のみ解答】(解答においては、答えだけでなく計算過程も書きなさい)

$$(1) \quad AD = |z_4 - z_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1, \quad \angle BAD = \arg(z_4 - z_1) = \frac{\pi}{3}$$

$$(2) \quad z_3 = z_2 + (z_4 - z_1) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$(3) \quad BD = |z_4 - z_2| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$(4) \quad w = \frac{z_1 + z_3}{2} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \quad \text{よ} \text{り} \quad \frac{z_2 - w}{z_1 - w} = \frac{3 - \sqrt{3}i}{-5 - \sqrt{3}i} = -\frac{3}{7} + \frac{2\sqrt{3}}{7}i$$

$$(5) \quad \cos \angle APB = \cos \left(\arg \left(-\frac{3}{7} + \frac{2\sqrt{3}}{7}i \right) \right) = -\frac{\sqrt{21}}{7}$$

V 【数学②のみ解答】

ア	$-6t^3 + 8t + 6$	イ	$-18t^2 + 8$
ウ	$\frac{86}{9}$	エ	$\frac{2}{3}$
オ	36	カ	211
キ	$m + 2$	ク	53

VI

【数学②のみ解答】(解答においては、答えだけでなく計算過程も書きなさい)

(1) $f'(x) = 12x^2 - 32x + 20 = 4(3x - 5)(x - 1) = 0$ より $x = 1, \frac{5}{3}$

増減表を書くと

x		1		$\frac{5}{3}$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって $p = 1, q = \frac{5}{3}$

(2) $f(p) = 1, f(q) = \frac{11}{27}$ であるから,

$a < \frac{11}{27}, a > 1$ のとき 1 個,

$a = \frac{11}{27}$ または $a = 1$ のとき 2 個,

$\frac{11}{27} < a < 1$ のとき 3 個

(3) $4x^3 - 16x^2 + 20x - 7 = f(p) = 1$ より, $(x - 1)^2(x - 2) = 0$

これを解くと $x = 1, 2$

したがって 点 P 以外の共有点は (2, 1) である。

(4) $S = \int_1^2 (1 - f(x))dx = \int_1^2 (-4x^3 + 16x^2 - 20x + 8)dx = [-x^4 + \frac{16}{3}x^3 - 10x^2 + 8x]_1^2 = \frac{1}{3}$