

大阪工業大学大学院

＜ロボティクス&デザイン工学研究科博士前期課程＞

2025年度第2回一般入試

解答例

ロボティクス&デザイン工学専攻

ロボティクス・システムデザインコース

※空間デザインコースは

「志願者なし」等の理由により、
出題された問題はありません。

解答

問 1.

(1)

$$\frac{(x+1)^2(x+2)(x^2+11x+16)}{(x+3)^5}$$

(2)

$1 + e$

問 2.

(1)

$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(2)

固有値 2

固有ベクトルは

$$x = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t \neq 0)$$

問 3.

(1) $y = \frac{1}{3}e^x + Ce^{-2x}$

(2) $y = C\sqrt{1+x^2}$

問1. 制御対象の伝達関数を $P(s) = \frac{10}{s^2 + 11s + 10}$ とする.

- (1) 制御対象 $P(s)$ のボード線図を描け.
- (2) 制御対象 $P(s)$ の周波数伝達関数からゲインと位相を求めよ.
- (3) 下図のフィードバック制御系において

$$K(s) = \frac{k}{s + 4}$$

とする. フィードバック制御系が内部安定となり, ステップ入力を加えた時の定常偏差が0.1以下になるために k が満たす条件を求めよ.

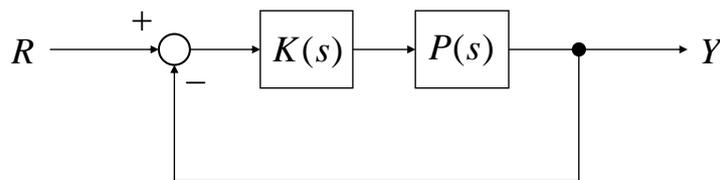


図1: フィードバック制御系

問2. 図1のフィードバック制御系において制御系とプラントの伝達関数がそれぞれ $K(s) = k > 0$, 伝達関数 $P(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$ で与えられるとする.

- (1) ナイキスト線図の概形を描け. ただし $\omega = \pm 0$, $\omega = \pm\infty$ における線図の形状および線図が通る点を導出した根拠も書くこと.
- (2) (1)で求めたナイキスト線図が実軸と交差する周波数とそのときの一巡伝達関数 $K(s)P(s)$ の値を求めよ.
- (3) ナイキストの安定判別法を用いてこのシステムが内部安定性となる k の値の範囲を求めよ.
- (4) プラントの伝達関数に以下のような乗法的な不確かさがある場合を考える.

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)^3} \cdot \left(1 + \frac{a(s^2 + s + 2)}{(s+3)^2} \cdot \Delta(s)\right), \quad |\Delta(j\omega)| \leq 1, \quad \forall \omega$$

ただし a は正のパラメータとする. 制御器を $K(s) = \frac{4(s+1)}{s+2}$ で構成したとき, システムが外乱に対してロバスト安定となるための a の範囲を求めよ.

解答

問 1.

$$(1) G(s) = \frac{10}{s^2 + 11s + 10} = \frac{1}{s + 1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{10}s + 1}$$

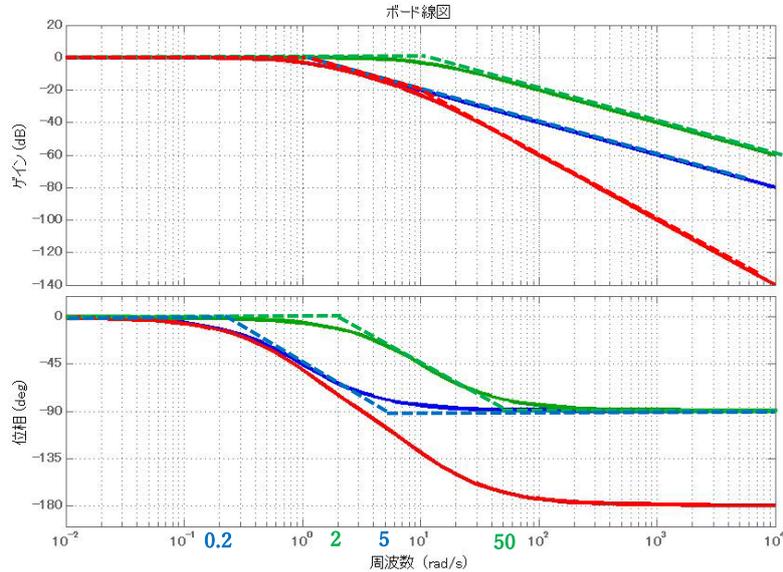


図 2: 問 2 で考えるフィードバック制御系

破線のような折れ線グラフを書いても正解. ただし折れ点 (ゲイン: 1 rad/s, 10rad/s, 1 と 10rad/s; 位相: [0.2, 5]rad/s, [2, 50]rad/s, [0.2, 2, 5, 50]rad/s) が間違っていたら不正解.

(2) 周波数伝達関数は

$$\begin{aligned} P(j\omega) &= \frac{10}{(j\omega)^2 + 11j\omega + 10} = \frac{10}{10 - \omega^2 + 11\omega j} \\ &= \frac{10(10 - \omega^2 - 11\omega j)}{(10 - \omega^2)^2 + (11\omega)^2} = \frac{10}{\sqrt{(10 - \omega^2)^2 + (11\omega)^2}} \angle \tan^{-1}\left(\frac{-11\omega}{10 - \omega^2}\right) \end{aligned} \quad (1)$$

で与えられる. これより,

・ゲイン:

$$\frac{10}{\sqrt{(10 - \omega^2)^2 + (11\omega)^2}} \quad (\text{or } \frac{1}{\sqrt{(1 + \omega^2)(100 + \omega^2)}}, \quad \text{or } \frac{1}{\sqrt{\omega^4 + 101\omega^2 + 100}}),$$

・位相:

$$\angle \tan^{-1}\left(\frac{-11\omega}{10 - \omega^2}\right).$$

(3) フィードバック制御系の伝達関数

$$G(s) = \frac{K(s)P(s)}{1 + K(s)P(s)} = \frac{10k}{(s^2 + 11s + 10)(s + 4) + 10k}.$$

特性方程式: $\varphi(s) = s^3 + 15s^2 + 54s + 40 + 10k = 0$ よりラウス表を作ると

$$\begin{array}{c|ccc} s^3 & 1 & 54 & 0 \\ s^2 & 15 & 40 + 10k & 0 \\ s^1 & \frac{770 - 10k}{15} & 0 & 0 \\ s^0 & 40 + 10k & 0 & 0 \end{array}$$

となる。これより $-4 < k < 77$ であればフィードバック制御系が内部安定であることが言える。
 一方、定常偏差 $E(s)$ は

$$E(s) = \frac{1}{1 + K(s)P(s)} R(s)$$

となる。ステップ入力を加えた時、

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

であるから、最終値の定理より

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

となる。これが

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + K(s)P(s)} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s+1)(s+10)(s+4)}{(s+1)(s+10)(s+4) + 10k} = \frac{40}{40 + 10k} \leq 0.1$$

を満たすためには $k \geq 36$ であることが必要。

以上より題意をみたす条件は $36 \leq k < 77$ と求められる。

問2.

(1) $L(j\omega) = \frac{k}{(j\omega + 1)^3}$ より $\angle L(j\omega) = -3\angle(j\omega + 1)$, $|L(j\omega)| = \frac{k}{|j\omega + 1|^3} = \frac{k}{\sqrt{\omega^2 + 1}^3}$. これより $\omega = 0 \rightarrow \infty$ で $\angle L(j\omega)$ は単調に $0 \rightarrow -\frac{3\pi}{2}$ に変化し, $|L(j\omega)|$ は単調に減少することが分かる. またナイキスト線図は $\omega = \pm 0$ で k , $\omega = \pm\infty$ で 0 を通り, $\omega = +\infty$ では $L(j\omega) \approx \frac{k}{j^3\omega^3} = \frac{k}{\omega^3}j$ と近似できるので, 虚軸の正の方向から原点に近づく. 一方, $\omega = \pm 0$ では $L(j\omega) - k \approx (1 - 3j\omega)k - k = -3j\omega k$ なので, 虚軸の正の方向から負の方向に通過する. よって図3のような形になる.

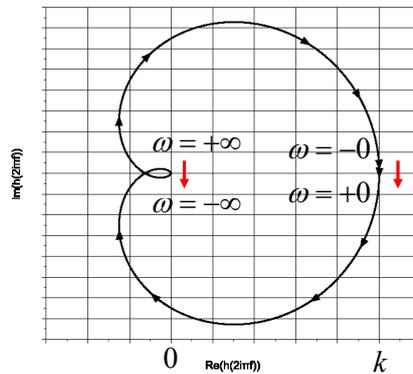


図3: 問2のナイキスト線図の概形

$$(2) L(j\omega) = \frac{k}{(j\omega + 1)^3} = \frac{k}{1 - 3\omega^2 + j\omega(3 - \omega^2)}$$

よって $\omega = \sqrt{3}$ のとき $L(\sqrt{3}) = -\frac{k}{8}$ で実軸と交差する.

(3) 制御系にもプラントにも不安定な極が無いので, $-1 < -\frac{k}{8}$ であれば安定. よって $k < 8$.

(4) ロバスト安定性の条件は $W_2(s) = \frac{a(s^2 + s + 2)}{(s + 3)^2}$ として

$$\left| \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} W_2(j\omega) \right| < 1$$

で与えられる。いまの場合 $L(s) = \frac{4}{(s+1)^2(s+2)}$ であるから、これを代入して整理すると

$$\left| \frac{4a}{(j\omega+3)^3} \right| = \frac{4a}{\sqrt{\omega^2+9}^3} < 1, \quad \forall \omega$$

が成り立つならばロバスト安定になる。左辺は $\omega = 0$ で最大値 $\frac{4a}{27}$ をとるので、 $a < \frac{27}{4}$ であればロバスト安定になる。

問1. 図1のように4本の鉄筋(丸棒)を入れたコンクリートの角柱(断面は正方形)に, 剛性板を介して圧縮荷重 P を加える. 荷重が働かないときの長さ l , 鉄筋の直径 d , 鉄筋のヤング率 E_s , コンクリート角柱の断面の一辺の長さ s , コンクリートのヤング率 E_c , 鉄筋とコンクリートの断面に生じる各々の応力を σ_s, σ_c とする. このとき, 鉄筋およびコンクリートの自重と剛性板の重さは無視でき, 圧縮荷重による偏心と座屈や破壊は考えないものとする.

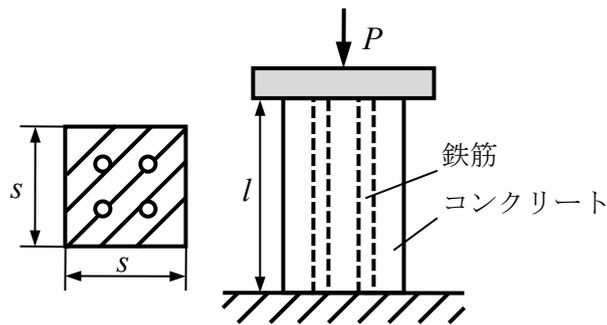


図1: 4本の鉄筋が入っているコンクリート角柱の圧縮

- (1) 力のつり合い条件から圧縮荷重 P を応力 σ_s, σ_c を用いて表せ.
- (2) ひずみの定義, およびフックの法則から, 鉄筋の縮み量 δ_s とコンクリートの縮み量 δ_c をそれぞれの応力とヤング率を用いて表せ.
- (3) 応力 σ_s と σ_c を求めよ.

問2. 図2に示すような拘束をうける一様な密度の半径 r の円盤が十分に微小な振幅で単振動している。黒丸の位置に円盤の面と垂直に回転軸が与えられている。円盤の質量は M で、ばねのばね定数は k である。この単振動現象の固有振動数を ω_1 とする。

つぎに系を図3に示すように組み替えて微小な振幅で単振動させたところ、固有振動数が ω_2 となった。円盤は地面との接点で滑ることなく転がっている。つまり回転運動をしながら並進運動をしている。

このとき、図と運動方程式を交えた論述により、 ω_2 を ω_1 で表す式を導出せよ。なお、回転軸の摩擦、空気抵抗、ばねの質量はすべてないものとする。重力加速度の大きさは g とする。

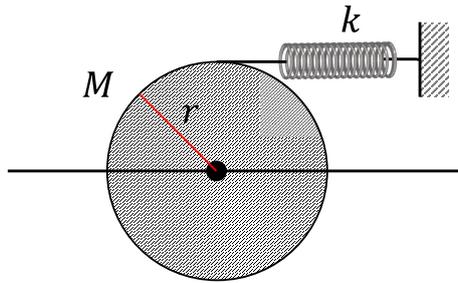


図2: 解析対象の系 パターン1

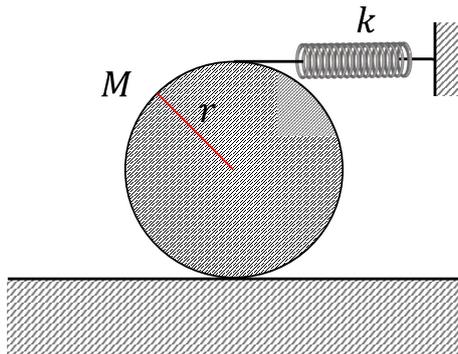


図3: 解析対象の系 パターン2

問 1.

(1) 鉄筋とコンクリートの断面積 A_s, A_c はそれぞれ,

$$A_s = \frac{\pi d^2}{4} \qquad A_c = s^2 - 4 \times \frac{\pi d^2}{4}$$

であるから,

$$\begin{aligned} P &= 4 \times \sigma_s \frac{\pi d^2}{4} + \sigma_c \left(s^2 - 4 \times \frac{\pi d^2}{4} \right) \\ &= \pi d^2 \sigma_s + (s^2 - \pi d^2) \sigma_c \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \delta_s &= \frac{\sigma_s l}{E_s} \\ \delta_c &= \frac{\sigma_c l}{E_c} \end{aligned}$$

(3) 鉄筋の縮み量 δ_s とコンクリートの縮み量 δ_c は等しく $\delta_s = \delta_c$ であるから, 上記 (2) より

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_s}{E_s} &= \frac{\sigma_c}{E_c} \\ \sigma_s &= \frac{E_s}{E_c} \sigma_c \end{aligned}$$

これを (1) の力のつり合い式に代入して

$$P = \pi d^2 \frac{E_s}{E_c} \sigma_c + (s^2 - \pi d^2) \sigma_c$$

より,

$$\begin{aligned} \sigma_c &= \frac{E_c P}{E_s \pi d^2 + E_c (s^2 - \pi d^2)} \\ \sigma_s &= \frac{E_s P}{E_s \pi d^2 + E_c (s^2 - \pi d^2)} \end{aligned}$$

問2.

(1) まず、図として元図に対して円盤の回転の単振動現象を表す変位について、釣り合い位置を変位ゼロとする座標軸と原点、変位の時間変数、たとえば θ を書き入れたものが書かれているべきである。

(2) パターン1の運動方程式は、釣り合い位置からの円盤の回転角度を θ 、円盤の回転軸周りの慣性モーメントを $I = \frac{1}{2}Mr^2$ としたとき、運動方程式は、

$$I\ddot{\theta} + kr^2\theta = 0$$

となり、固有振動数 ω_1 は

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{kr^2}{I}}$$

となる。

(3) パターン2の場合の運動方程式は、やはり釣り合い位置からの円盤の回転角度を θ 、円盤の回転軸周りの慣性モーメントを $I = \frac{1}{2}Mr^2$ としたとき、

$$\{I + Mr^2\}\ddot{\theta} + 4kr^2\theta = 0$$

となり、固有振動数 ω_2 は

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{4kr^2}{I + Mr^2}}$$

となる。

(4) ω_1^2 と ω_2^2 の関係式をつぎのように書き下してみる。

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{\frac{kr^2}{I}}{\frac{4kr^2}{I + Mr^2}}$$

ここに、

$$I = \frac{1}{2}Mr^2$$

を代入して整理する。

$$\begin{aligned}\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} &= \frac{\frac{kr^2}{\frac{1}{2}Mr^2}}{\frac{4kr^2}{\frac{1}{2}Mr^2 + Mr^2}} \\ &= \frac{\frac{1}{\frac{1}{2}}}{\frac{4}{\frac{1}{2} + 1}} \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}\omega_2 &= \sqrt{\frac{4}{3}}\omega_1 \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\omega_1\end{aligned}$$

問 1 .

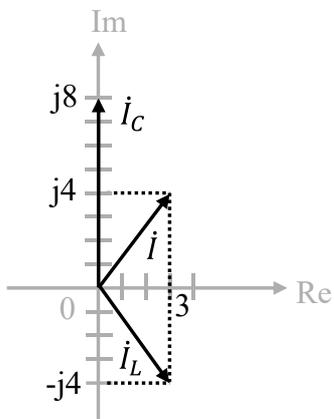
(1) $I = -0.2 \text{ [A]}$

(2) $I_1 = 1.2 \text{ [A]}, I_2 = 1.6 \text{ [A]}, I_3 = 2.8 \text{ [A]}$

問2.

$L = 0.02 \text{ [H]}, C = 400 \text{ [\mu F]}$

フェーザ図は下記のようになる



問 3 .

(1) $P_a = 2000 \text{ [VA]}, P_r = 1600 \text{ [var]}, \dot{P} = 1200 + j1600 \text{ [VA]}$

(2) $\dot{I}_C = j40000C \text{ [A]}, \dot{P}_C = -j4.0 \times 10^6 \text{ [VA]}$

(3) $C = 175 \text{ [\mu F]}$