

物 理

I 空所を埋め、問いに答えよ。(配点 60)

定滑車を通して台車や物体に糸でつながれた質量 m のおもりを考える。定滑車と糸の摩擦は無視できる。糸は軽く、たるみや伸縮はないものとする。重力加速度の大きさを g とする。

- (1) 図1に示すように、定滑車を通して、なめらかな水平面上に置かれた質量 M の台車とおもりを糸でつないで、おもりを床から高さ h の位置につるした。時刻 $t = 0$ に台車から静かに手をはなすと、台車は水平面を右向きに、おもりは鉛直下向きに等加速度運動をした。台車とおもりの空気抵抗は無視する。

台車とおもりの加速度の大きさを a 、糸の張力の大きさを T とし、運動する向きを正とした場合、台車とおもりの運動方程式は、

$$Ma = T, \quad ma = \boxed{\text{ア}}$$

と表される。これらを連立して解くと、 a と T は

$$a = \boxed{\text{イ}}, \quad T = \boxed{\text{ウ}}$$

と求まる。

台車は $\frac{h}{2}$ 移動し、時刻 $t = t_1$ に定滑車と衝突した。衝突の瞬間に糸が切れ、おもりだけが落下運動をし、時刻 $t = t_2$ に床に到達した。

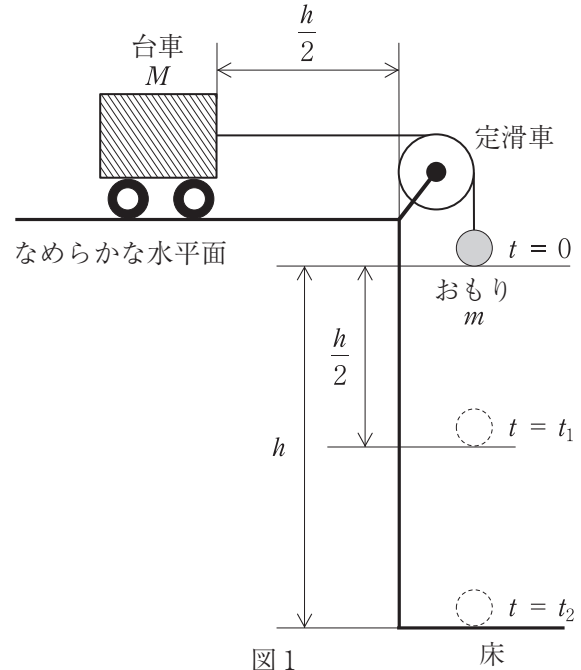
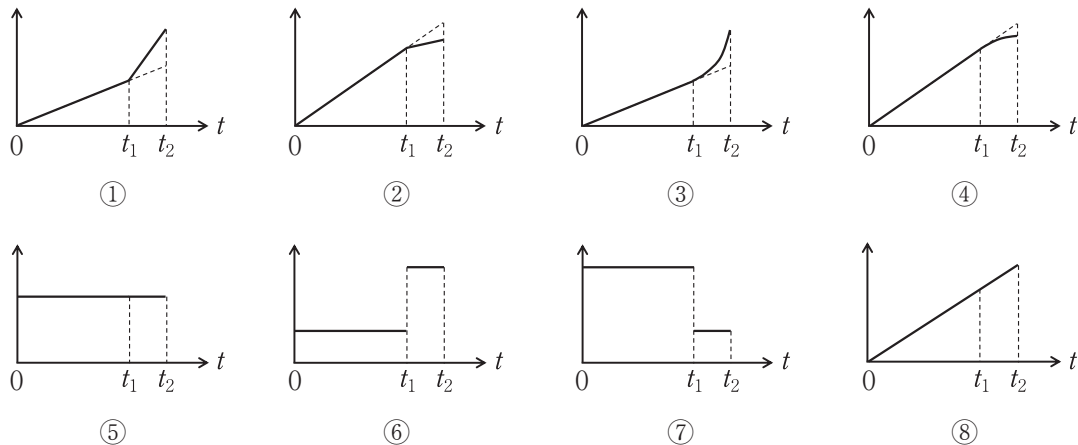


図1

問1 台車が滑車に衝突する時刻 t_1 を a 、 h を用いて表せ。

問2 おもりの加速度の大きさと速さの時間変化を示す最も適切なグラフを下の①～⑧よりそれぞれ1つ選択せよ。



問3 時刻 t_1 と t_2 におけるおもりの速さをそれぞれ v_1 、 v_2 とする。台車とおもりの質量に

$$M = 2m \text{ の関係がある場合, } \frac{v_2}{v_1} \text{ を求めよ。}$$

- (2) 図2に示すように、水平な天井に固定された2つの同じ定滑車を通して、質量 $2m$ の物体と質量 m のおもりをそれぞれ k 個と n 個ずつ糸でつないでつるす。おもりの個数 k と n を調節してつり合いの状態としたい。2つの定滑車の間に k 個のおもりをつるした点を O とし、点 O の左側と右側の糸に生じる張力をそれぞれ $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, 糸が鉛直方向となす角度を α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$), β ($0^\circ < \beta < 90^\circ$) とする。 k と n に応じて、 α と β , 点 O の位置は変化するが、糸は十分に長く、すべてのつり合いの状態において物体とおもりは定滑車や天井と接触することはない。

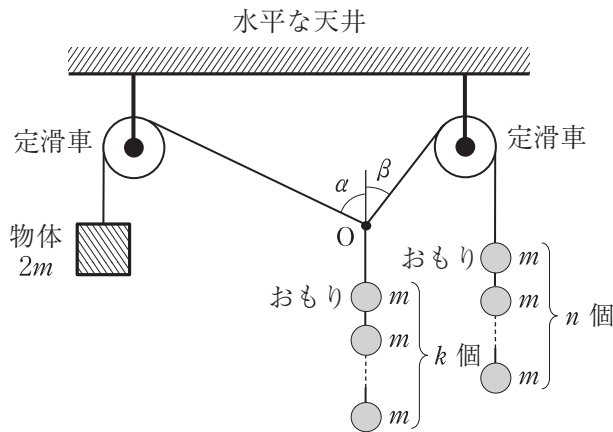


図2

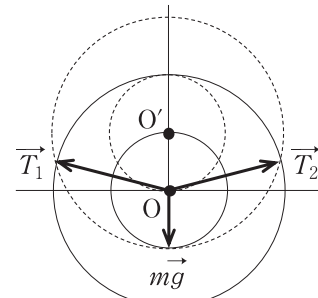


図3

問4 張力の大きさ T_1 と T_2 を m , g , n を用いて表せ。

点 O における水平および鉛直方向の力のつり合いの式は、

$$-T_1 \times \boxed{\text{エ}} + T_2 \sin \beta = 0, \quad T_1 \cos \alpha + T_2 \cos \beta - \boxed{\text{オ}} = 0$$

と表せる。問4の T_1 と T_2 を代入し、つり合いの式を連立して α と β について整理すると、

$$\cos \alpha = \frac{k^2 - n^2 + 4}{4k}, \quad \cos \beta = \frac{k^2 + n^2 - 4}{2kn}$$

の関係が得られる。

問5 $k = 1$, $n = 1$ のとき、つり合いの状態となるか。上記の関係に基づいて考察し、つり合いの状態となる場合は○, ならない場合は×を解答欄に記入せよ。

問6 $k = 2$, $n = 2$ のとき、つり合いの状態となる。このとき、糸がなす角 $\alpha + \beta$ [$^\circ$] を求めよ。

問7 $k = 3$ のとき、つり合いの状態となるおもりの個数 n をすべて示せ。

点 O には3つの力が作用する。重力加速度を $\vec{g}$ とし、例として図3は $k = 1$, $n = 2$ のときに作用する力を図示している。点 O' は点 O から $-\vec{mg}$ の点とし、力の大きさの目盛りとして $|\vec{mg}|$ を単位にして点 O と点 O' を中心とする同心円が示されている。

問8 問7で求めたつり合いの状態のうち n が最大となる場合について、糸が点 O に及ぼす力 $\vec{T}_1$ と $\vec{T}_2$ を図3にならって解答欄に矢印で図示せよ。

II

空所を埋め、問いに答えよ。(配点 45)

図1のような抵抗値 R_1 , R_2 , R_3 , R_4 の抵抗器, 抵抗値 R の可変抵抗器, 内部抵抗が無視できる起電力 E の電池を導線でつないだ回路を考える。ただし, $R_1 R_3 < R_2 R_4$ とする。

- (1) 抵抗値 R_1 , R_2 , R の抵抗器を図の矢印の向きに流れる電流をそれぞれ I_1 , I_2 , I とおく。

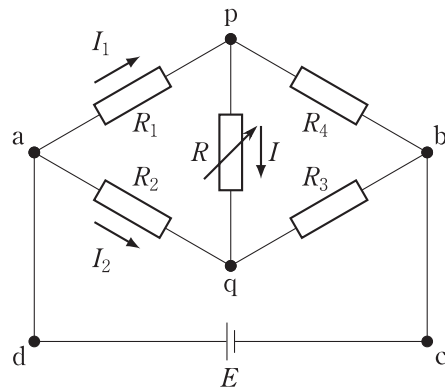


図1

問1 p から b へ流れる電流を I_1 , I を用いて表せ。

問2 経路 apbcda についてキルヒホッフの第2法則を示せ。

- (2) 抵抗値 R の可変抵抗器を流れる電流 I は, 図2に示すような, 起電力 E_e , 内部抵抗 R_e の電池に接続したときに流れる電流と同じであることが分かった。ここで, E_e は図3の回路の pq 間の電位差, R_e は図4の回路の pq 間の合成抵抗である。

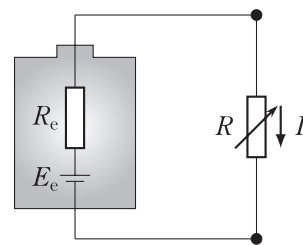


図2

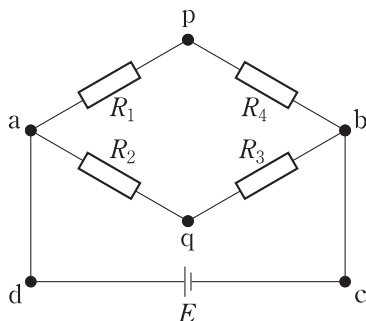


図3

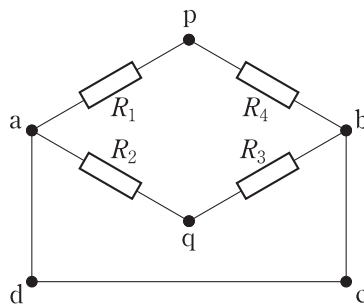


図4

図3の回路で,

$$(\text{ap 間の電圧}) : (\text{pb 間の電圧}) = \boxed{\text{ア}}$$

となるので, b に対する p の電位 V_{pb} は, $V_{pb} = \boxed{\text{イ}}$, q に対する p の電位 E_e は, $E_e = V_{pb} - \boxed{\text{ウ}}$ である。また, 図4の回路の pq 間の合成抵抗は

$$R_e = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} + \boxed{\text{エ}}$$

である。

問3 図2の回路で R を0としたときの電流を I_0 とする。 I_0 を R_e と E_e を用いて表せ。

問4 抵抗値 R と電流 I との関係を表すグラフの概形を, $0 \leq R \leq 9R_e$ の範囲で解答欄に描け。

(3) フォトレジスタとよばれる素子は、素子に照射される光の明るさによって抵抗値が変化する可変抵抗器であり、明るさに応じて街路灯をつけたり消したりするスイッチに使われている。いま、図1の回路に含まれる抵抗値 R の可変抵抗器をフォトレジスタで置きかえよう。フォトレジスタの抵抗値 R は、図5のように明るさ L に対して反比例で変化した。このとき、真っ暗な場所 ($L = 0$) では抵抗値は無限に大きくなるとみなすことができる。フォトレジスタの抵抗値が R_e となるときの明るさを L_e とする。

問5 照射する光の明るさ L が0のとき、フォトレジスタに流れる電流 I を求めよ。

問6 明るさ L とフォトレジスタに流れる電流 I の関係を示すグラフの概形を、 $0 \leq L \leq 9L_e$ の範囲で解答欄に描け。 I_0 は問3で求めた I_0 と同じものとする。

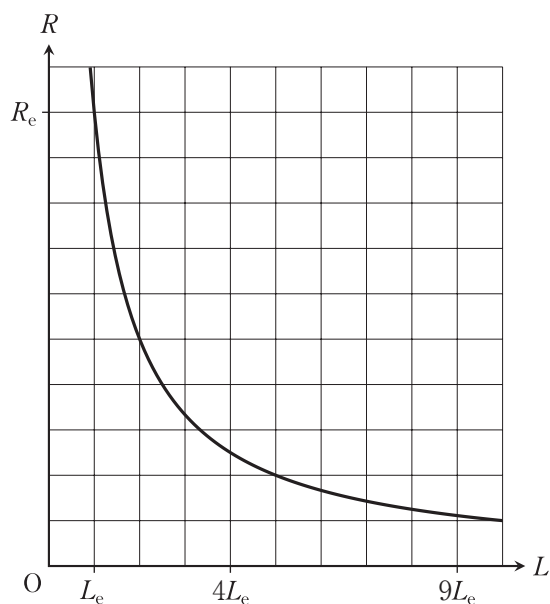


図5

III

空所を埋め、問いに答えよ。 ウ は語句で埋めよ。(配点 45)

- (1) 原子が放出する光をプリズムで分光すると、とびとびの輝線が現れる。これを線スペクトルという。1885年にバルマーは、可視光領域にある水素原子の4つの線スペクトルの波長 λ [m] が、次の式で与えられることを発見した。

$$\lambda = \frac{n^2}{n^2 - 4} \times B, \quad B = 3.6456 \times 10^{-7} \text{ m} \quad (n = 3, 4, 5, 6) \quad \text{①}$$

一方、1890年にリュードベリは、リチウム原子などの線スペクトルの波長の逆数が、次の式で表されることを見出した。

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_\infty} - \frac{R}{(n + \mu)^2}, \quad n \text{ は自然数} \quad \text{②}$$

ここで λ_∞ と μ は定数である(水素原子では $\mu = 0$)。 R [1/m] は異なる原子でもほぼ同じ値で、リュードベリ定数と呼ばれている。式①の逆数をとって $\mu = 0$ とした式②と比較すると、 $\lambda_\infty = B$ であることが分かる。

問1 リュードベリ定数 R を B を用いて表せ。

その後、水素原子の線スペクトルを構成する光の振動数 ν [Hz] は、リュードベリ定数 R 、光の速さ c [m/s] と2つの自然数 n, n' を用い次の式で表されることが明らかになった。

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \times cR \quad (n' \text{ は自然数で, } n = n' + 1, n' + 2, n' + 3, \dots) \quad \text{③}$$

- (2) 1904年に長岡半太郎は、正に帯電した重い核の周りを電子が土星の輪のように並んで周回している原子模型を考案した。1911年にラザフォードは α 粒子の散乱実験から、原子の中心に非常に小さな核があり、その周りを電子が取り巻いているという原子模型を確立した。

問2 この原子模型には重大な問題点があると指摘されていた。その問題点をひとつあげよ。

この問題点を回避するため、ボーアは1913年に水素原子に対して次の仮説を導入した。

- (I) 電子は特定のエネルギーの状態でのみ原子内で存在できる。これを定常状態と呼ぶ。
- (II) 電子がエネルギーの低い定常状態へ移ると、プランクの理論に基づく光が放出される。

定常状態を、エネルギーの低い方から順に番号 n を付けて区別し、定常状態のエネルギーを E_n [J] ($n = 1, 2, 3, \dots$) と表す。状態 n から n' への遷移にともない放出される光の振動数を ν 、プランク定数を h [J·s] とすると、(II)は次のように書ける。

$$E_n - E_{n'} = h\nu$$

式③と比べると、水素原子の定常状態のエネルギー E_n は

$$E_n = -\frac{hcR}{n^2} \quad \text{④}$$

となることが予想される。

問3 電子ボルト〔eV〕をエネルギーの単位として、 $hc = 1.24 \times 10^{-6} \text{ eV} \cdot \text{m}$ とする。式①
で与えた B の値を用いて、水素原子の電離エネルギー ($-E_1$) を求めよ。

- (3) 定常状態の水素原子は、電荷 $-e$ 〔C〕、質量 m 〔kg〕の電子が電荷 e の原子核（陽子）のまわりを、半径 r 〔m〕、速さ v 〔m/s〕で等速円運動していると考え。クーロンの法則の比例定数を k_0 〔N・m²/C²〕とすると、運動方程式は次のようになる。

$$m \frac{v^2}{r} = k_0 \frac{e^2}{r^2} \quad \text{⑤}$$

問4 電子が円周上を 1 s 間に周回する回数（周回数） $\nu_e = \frac{v}{2\pi r}$ を、 v を用いずに求めよ。

問5 電子の運動エネルギーを K 〔J〕、無限遠点を基準とする静電気力による位置エネルギーを U 〔J〕とすると、 $K = -\frac{1}{2}U$ の関係があることを示せ。

水素原子の定常状態のエネルギー E_n は、電子の力学的エネルギー $K + U = \frac{1}{2}U = -K$ に等しいとする。このとき、 r と v はリュードベリ定数 R を用いて次のように求められる。

$$r = \frac{k_0 e^2}{\boxed{\text{ア}}} \times n^2, \quad v = \sqrt{\frac{\boxed{\text{ア}}}{m}} \times \frac{1}{n}$$

なお、問4で求めた ν_e と E_n との間には、以下の関係がある。

$$\nu_e = \frac{1}{\pi k_0 e^2} \sqrt{\frac{2(-E_n)^3}{m}} \quad \text{⑥}$$

- (4) n を大きな自然数とし、エネルギー $E_{n+\ell}$ ($\ell = 1, 2, 3, \dots$) の定常状態から E_n の定常状態へ遷移するときに放出される光の振動数 ν を、式④を用いて計算してみよう。 ϵ が 1 に比べて小さいとき $(1 + \epsilon)^a \doteq 1 + a\epsilon$ となることを用いると

$$\nu = \frac{E_{n+\ell} - E_n}{h} = cR \left\{ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+\ell)^2} \right\} = \frac{cR}{n^2} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{\ell}{n} \right)^{-2} \right\} \doteq \boxed{\text{イ}} \times \ell$$

となる。これは、振動数 $\boxed{\text{イ}}$ を基本振動とし、その ℓ 倍振動の光が放出されることを意味する。 $\boxed{\text{イ}}$ を ν_0 〔Hz〕とし、式④を用いて n を消去すると、次のようになる。

$$\nu_0 = 2 \sqrt{\frac{(-E_n)^3}{h^3 c R}} \quad \text{⑦}$$

原子から放出された光の振動数は、電子の周回数 ν_e と関係しているのが自然である。そこで、このようにして求めた光の振動数 ν_0 が ν_e に等しいとおいてみよう。そうすると、リュードベリ定数 R を他の物理量から計算できる。こうして得られた理論値は、リュードベリの式②から得られる R の測定値と一致する。また、このとき

$$mvr = n \frac{h}{2\pi}$$

が成り立つ。ボーアはその後の研究において、この式がすべての n ($n = 1, 2, 3, \dots$) に対して成り立つとして議論のよりどころとした。これをボーアの $\boxed{\text{ウ}}$ 条件という。

問6 式⑥、⑦からリュードベリ定数 R を求めよ。