

物 理

I 問いに答えよ。重力加速度の大きさを g とし、空気の抵抗は無視する。(配点 60)

- (1) 大阪工業大学の梅田キャンパスからは目の前に赤い観覧車が見える。観覧車のゴンドラ（乗りかご）は質量が m で、周期 T 、半径 R の等速円運動をしているとする。

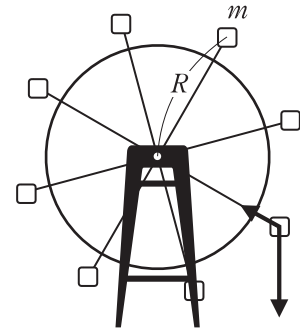


図 1

- 問 1 ゴンドラの速さを求めよ。
 問 2 ゴンドラの角速度を求めよ。
 問 3 ゴンドラが受けている向心力の大きさを求めよ。
 問 4 ゴンドラには重力とフレーム（枠組み）からの力がはたらく。

図 1 には、右下のゴンドラにはたらく重力とゴンドラが受けている向心力が矢印で描いてある。このゴンドラがフレームから受ける力を解答欄に実線の矢印で図示せよ。どのように作図したのかがわかるように補助線などを点線で書き込むこと。

ゴンドラは円運動をしているので乗客には向心力と同じ大きさの遠心力がかかる。しかし、実際の観覧車では回転周期 T は 15 分程度と長いのでその影響はほとんど感じられない。

- (2) 枚方キャンパスの近くには遊園地がある。遊園地には観覧車の他にも楽しいアトラクションがある。図 2 のようなジェットコースターもその 1 つである。車両は水平面 BD からの高さが h の点 A から時刻 $t = 0$ に初速度 0 で出発して、傾き 60° の坂を下って水平部 BC を通過し、点 C から円形部分を 1 周回り、CD を進んでいく。車両は常に鉛直面内を運動するとする。車両の質量を m 、大きさは無視し、車両は点 B をなめらかに通過する。また、水平部分でのみ動摩擦係数 μ' の摩擦力がはたらくとする。BC の距離を L 、円形部分の半径を r とする。

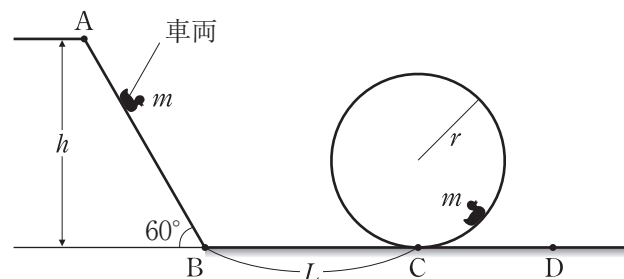


図 2

- 問 5 車両が坂を下っているときの速さを時刻 t の関数として表せ。
 問 6 車両が BC を通過する間に、摩擦力が車両にする仕事を求めよ。

問7 車両が円形部分を1周するには、点Aの高さ h はある値 h_0 より大きくなくてはならない。 h_0 を求めよ。ただし、車両はレールから外れない（逆さになって止まってもレールにぶら下がる）とする。

問8 $h = h_0$ の場合、車両が円形部分の最高点に達したとき、レールから受ける垂直抗力の大きさと向きを答えよ。

実際に、回転部分の高さが40 m、回転部分へ進入する速さが50 m/sに達するジェットコースターもある。

問9 仮に、回転部分を半径20 mの円として、ここへ速さ50 m/sで進入したとする。この場合に回転部分進入直後に乗客にかかる遠心力の大きさは、重力の大きさの何倍になるか、 $g = 10 \text{ m/s}^2$ として求めよ。

問9の結果より、点Cの通過直後に乗客には大きな力が急激に加わり、危険なことがわかる。そのため、回転部分は円形ではなくクロソイド曲線などの緩和曲線が用いられている。

(3) 図3に変形しないループ台(ABCDEの部分)を持つジェットコースターの模型を示す。水平面上で静止している質量 M のループ台の左から質量 m の小さな車両を進入させる(図3a)。このとき、ループ台はなめらかな水平面を左右に自由に移動する(倒れたり浮いたりはない)。また、車両は1つの鉛直面内をなめらかに運動する。

問10 車両が点Aから速さ v でループ台を上りはじめ、レールが鉛直になる点Bより手前で最高点に達した(図3b)。車両が最高点に到達したときのループ台の速さを求めよ。

問11 問10の後、車両はレールを下っていった。車両が点Aを左向きに通過した後(図3c)のループ台の速さを求めよ。

問12 再び、静止しているループ台に左から車両を進入させた。今度は車両の速度が大きく、車両はループ台を1周して点Eを通過し、右方向へ進んでいった。車両が点Eを通過した後のループ台の速さを求めよ。

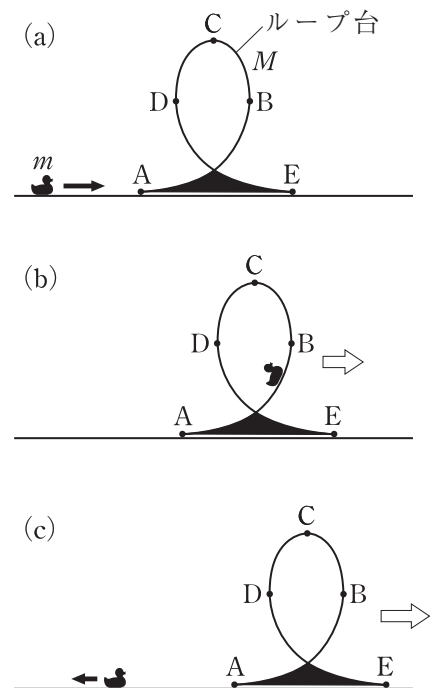


図3

Ⅱ

空所を埋め、問いに答えよ。(配点 45)

図1に示すように、真空中において、面積がともに S [m²] の極板 A と極板 B を向かい合わせた平行板コンデンサーがある。はじめ、極板 A と極板 B の間隔（極板間隔）は d [m] に固定しておく。端の影響は無視できるものとする。真空の誘電率を ϵ_0 [F/m] とすると、コンデンサーの電気容量は $\epsilon_0 \frac{S}{d}$ [F] で与えられる。ただし、重力の影響は無視する。

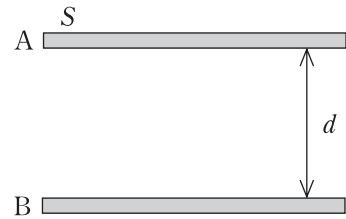


図1

- (1) コンデンサーの極板 A と極板 B にそれぞれ電気量 Q [C] と $-Q$ ($Q > 0$ とする) を与えて帯電させたとき、極板間の電位差が V [V] となった。

問1 V を S , d , ϵ_0 , Q を用いて表せ。

問2 極板に対して垂直に生じる電場（電界）の向きを、(a) $A \rightarrow B$ と (b) $B \rightarrow A$ のどちらかを選んで、記号で答えよ。さらに、その強さ E_0 [V/m] を S , ϵ_0 , Q を用いて表せ。

- (2) 図2のように、真空中で平行板コンデンサーをスイッチ、抵抗および内部抵抗の無視できる起電力 V の電池につないだ回路を考える。はじめ、スイッチは開いており、コンデンサーには電荷は蓄えられていないものとする。

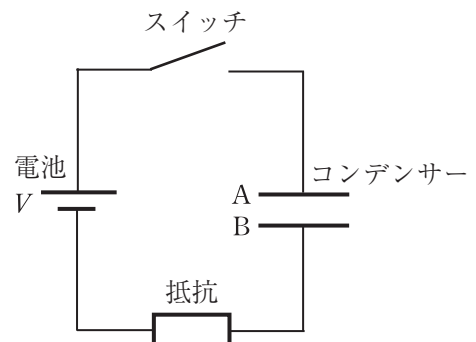


図2

いま、スイッチを閉じてコンデンサーの充電を始める。十分に時間が経過して、コンデンサーの極板間の電位差が V で、蓄えられた電気量が Q になるまでの電位差と電気量の関係を図3のグラフに示す。充電の途中で、コンデンサーに蓄えられた電気量が q [C] で極板間の電位差が v [V] である場合を考える。ここで微小な電気量 Δq [C] が電池を通して極板 B から極板 A に移動したとする。このとき、電位差は一定とみなせる。コンデンサーに蓄えられる静電エネルギーは、 $\Delta U_q =$ ア [J] だけ増加し、その増加分は図3の斜線で示す面積に相当する。十分に時間が経過したとき、コンデンサーに蓄えられた静電エネルギー U [J] は ΔU_q の総和となる。 U を S , d , ϵ_0 , Q を用いて表すと、 $U =$ イ となる。

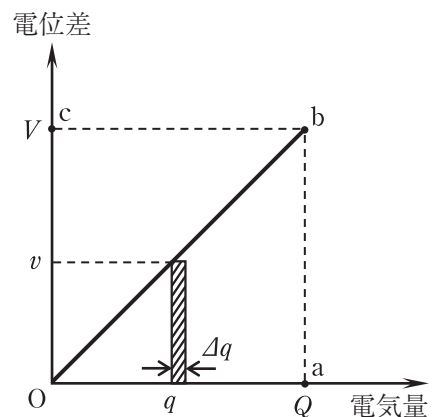


図3

問3 図3のグラフにおいて、四角形Oabcと三角形Obcの面積はそれぞれどのような物理量に相当するかを述べよ。

- (3) 図2のスイッチを閉じて平行板コンデンサーを十分に充電した後、スイッチを開いた場合を考える。コンデンサーに蓄えられている電気量は Q である。次に、図4に示すように、極板Bを固定したまま極板Aのみを自由に動かせるようにし、極板Bと平行を保ちながら極板間隔を d から $d + \Delta d$ [m] へゆっくり広げた。この過程で極板A

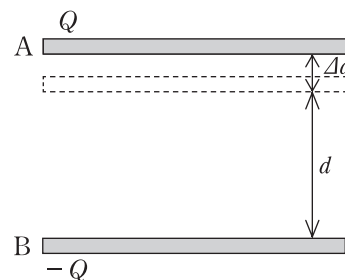


図4

に加えられている外力の大きさは F [N] であった。コンデンサーの電気容量は $\epsilon_0 \frac{S}{d + \Delta d}$ となる。したがって、コンデンサーに蓄えられる静電エネルギーは [J] だけ増加する。このとき、外力が極板Aにした仕事が に等しいことから、 $F =$ となる。

一方、見方を変えたと、コンデンサーの極板間には電気的な引力が作用しており、それに逆らって外力を加え、極板を Δd だけゆっくり広げたことになる。ここで、極板間にはたらく引力の大きさは F に等しい。そこで極板B上の電荷による電場の強さを E_B [V/m] とすると、その電場によって極板Aが受ける力の大きさは $F = QE_B$ で与えられる。 E_B は、問2で求めた極板間に生じる電場の強さ E_0 を用いて、 $E_B =$ と表すことができる。また、同様に、極板A上の電荷がつくる電場を求めることができる。実際、極板間に生じる電場は極板Bと極板A上の各電荷がつくる電場の重ね合わせになっている。

III

空所を埋め、問いに答えよ。(配点 45)

物質量 n [mol] の単原子分子理想気体の性質を気体分子運動論に基づいて考えよう。ここでアボガドロ定数を N_A とする。重力の影響は無視する。

図1のように理想気体を直方体型のシリンダーの中に入れピストンで密閉した。シリンダーの各辺に沿って x , y , z 軸を設ける。ピストンはなめらかに動くものとし、気体の体積が増える向きを x 軸の正の向きとする。ピストンの断面積を S とする。シリンダーとピストンは熱を通さない。気体の分子はシリンダー、およびピストンと弾性衝突をするものとし、分子どうしの衝突は無視する。ここで気体中の1分子の運動に注目する。分子の質量を m , 速度を $\vec{v}$, その x 方向の成分を v_x とする。

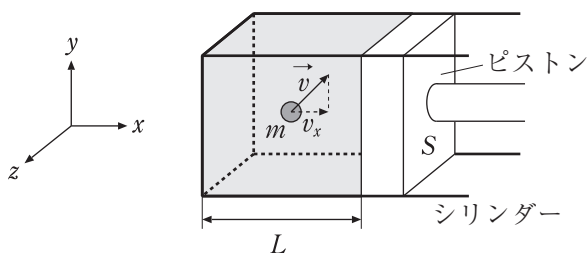


図1

- (1) まずはピストンを固定した状況で考えよう。シリンダーの左端からピストンまでの距離は L である。分子がピストンと衝突すると分子の運動量が変化する。その変化量が分子の受ける力積である。作用・反作用の法則より、ピストンも分子から力積を受ける。 v_x を正とすると、分子が1回衝突したときにピストンが受ける力積は ア である。分子が距離 L のシリンダー内を1往復して再度ピストンと衝突するのに要する時間は イ である。

ある微小な時間 t の間に、分子がピストンへ衝突する回数は $t \div$ イ で与えられる。微小時間 t の間にピストンが分子1個から受ける力の大きさの平均を f とすると、 $f \times t =$ ア $\times$ (衝突回数) で与えられる。

問1 f を求めよ。

気体の分子数は nN_A である。各分子の速度はさまざまであるため、すべての分子について v_x^2 の平均値を考え、それを $\overline{v_x^2}$ とおく。そうするとピストンが気体全体から受ける力の大きさ F は $nN_A \frac{mv_x^2}{L}$ と求まる。さらに気体分子の速さについて、その2乗の平均値は方向によらないことに注目すると、分子の速さの2乗の平均値 $\overline{v^2}$ には $\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3\overline{v_x^2}$ の関係が成り立つ。

問2 気体が断面積 S のピストンに与える圧力 $p = \frac{F}{S}$ を $\overline{v^2}$ を用いて表せ。

気体の体積 V は $V = SL$ で与えられる。したがって $pV = nN_A \times \boxed{\text{ウ}}$ となる。分子1個がもつ平均の運動エネルギーは $\frac{1}{2} m \overline{v^2}$ である。気体全体の内部エネルギー U は $U = nN_A \times \frac{1}{2} m \overline{v^2}$ となる。

問3 理想気体の状態方程式を利用して、内部エネルギー U を気体の絶対温度 T を用いて表せ。ここで気体定数を R とする。

- (2) 次に図2のようにピストンを一定の速さ u で x 軸の正の向きにゆっくりと動かす。 u は分子の速さ v に比べて非常に小さいとする。分子は速さ u で右へ動くピストンと弾性衝突をする。この変化は気体の断熱膨張に相当する。このときの気体の状態変化を調べよう。

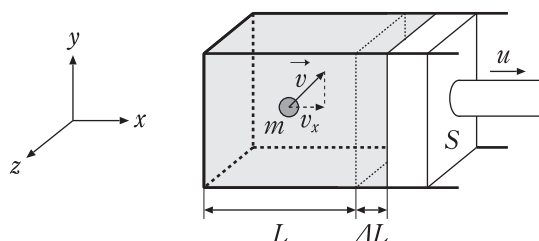


図2

ある微小時間 t の間にピストンが動く微小な距離は $\Delta L = ut$ となる。ここで u は非常に小さいので、この間の分子1個のピストンへの衝突回数は $t \div \boxed{\text{イ}}$ を用いることとする。衝突回数を、 t を含めない式で表すと $\boxed{\text{エ}} \times \frac{\Delta L}{L}$ となる。

速さ u で動くピストンと弾性衝突した後の分子の速度の x 成分を v'_x とすると、 $v'_x = -v_x + \boxed{\text{オ}}$ となる。この式より衝突後の分子の速さは衝突前より遅いことがわかる。近似式 $(1 - \alpha)^2 \div 1 - 2\alpha$ (α は1と比べて非常に小さい) を使うと、衝突前後の分子1個の運動エネルギーの変化 $\frac{1}{2} m v'^2_x - \frac{1}{2} m v^2_x$ は $\boxed{\text{カ}}$ となり、 u に比例する。

以上から、時間 t の間の分子1個の運動エネルギーの変化は

$$\boxed{\text{カ}} \times \boxed{\text{エ}} \times \frac{\Delta L}{L} \text{ より次式となる。}$$

$$\boxed{\text{キ}} \times \frac{\Delta L}{L}$$

nN_A の分子数をもつ気体全体について、時間 t の間の内部エネルギーの変化量 ΔU を求めよう。上式において速さの2乗を平均化し、 v_x^2 を $\frac{\overline{v^2}}{3}$ に置き換える。気体の体積 $V = SL$ 、および体積の変化量 $\Delta V = S\Delta L$ を用いて ΔU を表すと次式となる。

$$\Delta U = -nN_A \times \boxed{\text{ウ}} \times \frac{\Delta V}{V}$$

問4 以上の関係から、気体が断熱膨張をすると、その温度はどのように変化するのか理由をつけて答えよ。