一般入試 前期・均等配点型（A日程）1日目

数　学

I 【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

次の空所を埋めよ。　（配点 40）

(1) $x=\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$ のとき，$x+\dfrac{1}{x}=$ $\boxed{\text{ア}}$ であり，$x^2+\dfrac{1}{x^2}=$ $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) a，b を実数とする。

$2^a=9$，$3^b=16$ のとき，積 ab の値を対数を用いずに表すと，$ab=$ $\boxed{\text{ウ}}$ である。

また，方程式 $\log_3 x+\log_3(2x+9)=4$ を解くと，$x=$ $\boxed{\text{エ}}$ である。

(3) 円に内接する四角形 ABCD において，$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{AD}=6$，$\cos\angle\mathrm{BAD}=-\dfrac{1}{3}$ とする。

このとき，$\mathrm{BD}=$ $\boxed{\text{オ}}$ である。また，四角形 ABCD の面積が $14\sqrt{2}$ のとき，

$\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}=$ $\boxed{\text{カ}}$ である。

(4) 区別のつかない 6 つの玉をそれぞれ A, B, C の 3 つの箱のいずれかに入れる。

玉を入れない箱があってもよいとすると，入れ方は全部で $\boxed{\text{キ}}$ 通りある。

そのうち，玉が入っていない箱があるような入れ方は全部で $\boxed{\text{ク}}$ 通りある。

$\boxed{\text{II}}$ 【数学 ①・数学 ②，どちらも解答】

次の空所を埋めよ。　（配点 30）

(1) $r > 1$ とし，公比が r の等比数列 $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が $a_2 = 8$ を満たすとする。

このとき，初項 a_1 を r の式で表すと，$a_1 = \boxed{\text{ア}}$ である。

また，数列 $\{a_n\}$ の初項から第 3 項までの和が 28 であるとき，$r = \boxed{\text{イ}}$ であり，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 4\left(\boxed{\text{ウ}}\right)$ である。

(2) $\triangle$OAB について，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 5$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 7$ とするとき，

$\cos\angle\mathrm{AOB} = \boxed{\text{エ}}$ である。 また，点 P，点 Q をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 4\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

を満たすようにとる。$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表すと，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \boxed{\text{オ}}\ \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \boxed{\text{カ}}\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

である。さらに，点 O から線分 PQ に下ろした垂線を OH とし，

線分 OH と直線 AB との交点を R とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表すと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \boxed{\text{キ}}\ \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left(1 - \boxed{\text{キ}}\right) \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

である。

$\boxed{\text{III}}$ **【数学 ① のみ解答】**

関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+\log x}$ に対して，$g(x)=f(x)-\dfrac{1}{(1+\log x)^2}$ とする。

このとき，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底とする。（配点 40）

(1) $f(e)$ および $g(e^2)$ の値を求めよ。

(2) $f(x)$ を微分せよ。

(3) $g(x)$ を微分せよ。

(4) $1 \leqq x \leqq e^2$ において，$g(x)$ の増減を調べ，最大値を求めよ。

$\boxed{\text{IV}}$ **【数学 ① のみ解答】**

関数 $f(x)=\displaystyle\int_0^x t^3\cos(t^2)\,dt$ について，次の問いに答えよ。　（配点 40）

(1)　$f(x)$ を微分せよ。

(2)　部分積分法を利用して，不定積分 $\displaystyle\int x\cos x\,dx$ を求めよ。

(3)　$f(x)$ を計算して，定積分を用いずに表せ。

(4)　$0 \leqq x \leqq \sqrt{\pi}$ において，$f(x)$ の増減を調べ，最小値を求めよ。

$\boxed{\text{V}}$ **【数学 ② のみ解答】**

次の空所を埋めよ。　（配点 40）

(1) $a > 0$ とする。座標平面上の点 A(0, 1) を通り，傾きが a の直線を l とする。

このとき，原点 O と直線 l の距離を d とすると，$d =$ $\boxed{\text{ア}}$ である。

円 C : $x^2 + y^2 = 1$ と l の共有点のうち，A と異なる点を B とすると，

点 B の x 座標は $\boxed{\text{イ}}$ である。ただし，$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ は a の式とする。

さらに，線分 AB を 1 : 2 に内分する点を P とすると，定数 a の値にかかわらず，

点 P は常に円 $x^2 + \left(y - \boxed{\text{ウ}}\right)^2 = \boxed{\text{エ}}$ 上にある。

(2) 1 個のさいころを 4 回投げる。

(i) 出る目がすべて 3 の倍数である確率は $\boxed{\text{オ}}$ である。

(ii) 3 の倍数の目がちょうど 1 回出る確率は $\boxed{\text{カ}}$ である。

(iii) 出る目の積が 3 の倍数である確率は $\boxed{\text{キ}}$ である。

(iv) 3 の倍数の目が出る回数の期待値は $\boxed{\text{ク}}$ である。

$\boxed{\text{VI}}$ **【数学 ② のみ解答】**

$0 < a < 1$ とし，曲線 $y = x^2 - \dfrac{1}{2}$ 上の点 A$\left(a,\ a^2 - \dfrac{1}{2}\right)$ における接線を l_1 とする。このとき，次の問いに答えよ。　（配点 40）

(1)　直線 l_1 の方程式を求めよ。

(2)　曲線 $y = x^2 - \dfrac{1}{2}$，y 軸 および 直線 l_1 で囲まれた図形の面積 $S_1(a)$ を求めよ。

(3)　点 A を通り，直線 l_1 に垂直な直線を l_2 とするとき，l_2 の方程式を求めよ。

また，l_2 と y 軸との交点 B の y 座標を求めよ。

(4)　(3) で定めた点 B と点 C$(0,\ a)$ に対して，△ABC の面積を $S_2(a)$ とする。

このとき，$S_2(a) - S_1(a)$ の最大値を求めよ。

ただし，$S_1(a)$ は (2) で求めた面積とする。