

数 学

I 【数学①・数学②, どちらも解答】

ア	$\frac{8}{3}$
イ	$\frac{46}{9}$
ウ	8
エ	$\frac{9}{2}$
オ	$4\sqrt{3}$
カ	30
キ	28
ク	18

II 【数学①・数学②, どちらも解答】

ア	$\frac{8}{r}$
イ	2
ウ	$2^n - 1$
エ	$\frac{7}{10}$
オ	-5
カ	2
キ	$\frac{5}{7}$

III

【数学①のみ解答】（解答においては、答えだけでなく計算過程も書きなさい）

$$(1) f(e) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$g(x) = \frac{\log x}{(1 + \log x)^2} \text{ より, } g(e^2) = \frac{2}{9}$$

$$(2) f'(x) = -\frac{1}{x(1 + \log x)^2}$$

$$(3) g'(x) = \frac{1 - \log x}{x(1 + \log x)^3}$$

(4) $1 \leq x \leq e^2$ の範囲で $g'(x) = 0$ を解くと $x = e$

よって、 $g(x)$ の増減表は次のようになる。

x	1	...	e	...	e^2
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	0	↗	極大 $\frac{1}{4}$	↘	$\frac{2}{9}$

よって、 $x = e$ のとき、最大値 $\frac{1}{4}$

IV

【数学①のみ解答】(解答においては、答えだけでなく計算過程も書きなさい)

(1) $f'(x) = x^3 \cos(x^2)$

(2) 部分積分法より,

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(3) (2) の結果と $t^2 = y$ とおいて置換積分法より,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x t^3 \cos(t^2) \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} y \cos y \, dy = \frac{1}{2} [y \sin y + \cos y]_0^{x^2} \\ &= \frac{1}{2} \{x^2 \sin(x^2) + \cos(x^2) - 1\} \end{aligned}$$

(4) $0 \leq x \leq \sqrt{\pi}$ の範囲で $f'(x) = 0$ を解くと, $x = 0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

また, (3) より, $f\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi - 2}{4}, \quad f(\sqrt{\pi}) = -1$

よって, $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	...	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$...	$\sqrt{\pi}$
$f'(x)$	0	+	0	-	
$f(x)$	0	↗	極大 $\frac{\pi - 2}{4}$	↘	-1

よって, $x = \sqrt{\pi}$ のとき, 最小値 -1

V

【数学②のみ解答】

ア	$\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$
イ	$-\frac{2a}{a^2+1}$
ウ	$\frac{2}{3}$
エ	$\frac{1}{9}$
オ	$\frac{1}{81}$
カ	$\frac{32}{81}$
キ	$\frac{65}{81}$
ク	$\frac{4}{3}$

VI

【数学②のみ解答】(解答においては、答えだけでなく計算過程も書きなさい)

(1) $y' = 2x$ より, 求める方程式は $y = 2a(x - a) + a^2 - \frac{1}{2}$

よって, $y = 2ax - a^2 - \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} (2) S_1(a) &= \int_0^a \left\{ x^2 - \frac{1}{2} - \left(2ax - a^2 - \frac{1}{2} \right) \right\} dx \\ &= \int_0^a (x^2 - 2ax + a^2) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - ax^2 + a^2x \right]_0^a \\ &= \frac{1}{3}a^3 \end{aligned}$$

(3) 直線 l_2 の傾きは $-\frac{1}{2a}$ であるから, l_2 の方程式は $y = -\frac{1}{2a}x + a^2$

よって, y 軸との交点 B の y 座標は a^2

(4) $S_1(a) = \frac{1}{3}a^3$, $S_2(a) = -\frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{2}a^2$ より, $S_2(a) - S_1(a) = \frac{1}{6}(3a^2 - 5a^3)$

よって, $f(a) = \frac{1}{6}(3a^2 - 5a^3)$ とおくと, $f'(a) = a - \frac{5}{2}a^2$

$0 < a < 1$ の範囲で $f'(a) = 0$ を解くと $a = \frac{2}{5}$

よって, 増減表は次のようになる。

a	0	...	$\frac{2}{5}$...	1
$f'(a)$		+	0	-	
$f(a)$		↗	極大 $\frac{2}{75}$	↘	

よって, $a = \frac{2}{5}$ のとき, $S_2(a) - S_1(a)$ の最大値は $\frac{2}{75}$