

数 学

I 【数学①・数学②, どちらも解答】

ア	12
イ	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
ウ	-1
エ	2
オ	$\frac{\sqrt{2}}{3}$
カ	$\frac{4}{3}$
キ	30
ク	12

II 【数学①・数学②, どちらも解答】

ア	$\frac{1}{25}$
イ	2
ウ	3
エ	$\frac{1}{3^n-2}$
オ	30
カ	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$
キ	5

III

【数学①のみ解答】(解答においては、答えだけでなく計算過程も書きなさい)

(1) $f'(x) = (2x - 1)e^x + (x^2 - x + 1)e^x = (x^2 + x)e^x = x(x + 1)e^x$

(2) 求める接線の傾きは $f'(1) = 2e$ より、接線の方程式は $y = 2ex - e$

(3) $f'(x) = 0$ を解くと、 $x = 0, -1$

よって、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	-1	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大 $\frac{3}{e}$	↘	極小 1	↗

よって、 $x = -1$ のとき極大値 $\frac{3}{e}$ 、 $x = 0$ のとき極小値 1

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{ax^2 + b} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{a + \frac{b}{x^2}} = \frac{1}{a} = 4$ より、 $a = \frac{1}{4}$

$g'(x) = (ax^2 + 2ax + b)e^x$ より、 $g'(1) = (3a + b)e$

(2) より、 $f'(1) = 2e$ 。よって、 $3a + b = 2$ より、 $b = \frac{5}{4}$

以上より、 $a = \frac{1}{4}$ 、 $b = \frac{5}{4}$

IV

【数学①のみ解答】(解答においては、答えだけでなく計算過程も書きなさい)

(1) $f'(x) = \log x - 1$

(2) $f'(x) = 0$ を解くと、 $x = e$

よって、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	1	...	e	...
$f'(x)$	-1	-	0	+
$f(x)$	-2	↘	極小 $-e$	↗

よって、 $x = e$ のとき最小値 $-e$

$$\begin{aligned}
 (3) \int x \log x \, dx &= \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\
 &= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + C \quad (C \text{ は積分定数})
 \end{aligned}$$

(4) $x \geq 1$ において、 $f(x) = 0$ を解くと $x = e^2$ となり、求める面積は、

$$S = - \int_1^{e^2} f(x) \, dx = - \left[\frac{x^2}{2} \log x - \frac{5x^2}{4} \right]_1^{e^2} = \frac{e^4 - 5}{4}$$

V

【数学②のみ解答】

ア	$\frac{1}{6}$
イ	$x - x^2$
ウ	$\frac{1}{3}$
エ	$\frac{5}{12}$
オ	$\frac{2}{9}$
カ	$\frac{4}{45}$
キ	$\frac{7}{9}$
ク	$\frac{4}{9}$

VI

【数学②のみ解答】(解答においては、答えだけでなく計算過程も書きなさい)

(1) $f'(x) = 12x^2 + 6x - 6$

(2) $f'(x) = 0$ を解くと、 $x = \frac{1}{2}, -1$

よって増減表は次のようになる。

x	...	-1	...	$\frac{1}{2}$...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大 5	↘	極小 $-\frac{7}{4}$	↗

よって、 $x = -1$ のとき極大値 5, $x = \frac{1}{2}$ のとき極小値 $-\frac{7}{4}$

(3) $\sin \theta \sin 2\theta = 2 \sin^2 \theta \cos \theta = 2(1 - x^2)x = 2x - 2x^3$

$$g(\theta) = -3x^2 + 2x + 2(2x - 2x^3) = -4x^3 - 3x^2 + 6x$$

(4) (3) より、 $g(\theta) = -f(x)$ である。

ここで、 $x = \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) より、 $-1 \leq x \leq 1$ である。

したがって、(2) の増減表と $f(1) = 1$ であることより、

$x = \frac{1}{2}$ のとき、すなわち $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき最大値 $\frac{7}{4}$ をとり、

$x = -1$ のとき、すなわち $\theta = \pi$ のとき最小値 -5 をとる。