物　理

Ⅰ　問いに答え，空所を埋めよ。空気抵抗は無視する。（配点 60）

図１のように，質量 m の小球が，固定されたレールに沿って運動する。AB は鉛直，BC は半径 R の円弧，CD は水平，DEF は半径 R の半円形レールであり，それぞれなめらかに接続されている。小球とレールの間の摩擦は無視できるものとし，重力加速度の大きさを g，AB 間の距離を y とする。

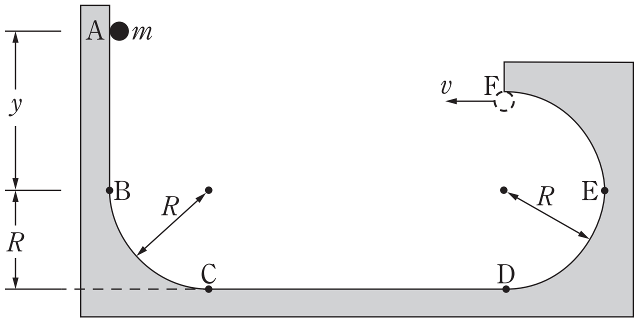

図１

（１）　小球をレール上の点 A から静かにはなした。小球は AB 間のレールに沿って落下し，点 B を通った後，円弧部分のレールに沿って右へ進み，点 C, D, E を通過する。

問１　小球が落下を開始してから点 B に到達するまでの時間を求めよ。

問２　点 B を通過するときの小球の速さを求めよ。

問３　点 C を通過するときの小球の速さを求めよ。

ここでは，小球が途中でレールから離れずに点 F から空中に飛び出す条件について考える。小球は点 D に到達した後，半円部分のレールに沿って運動するが，距離 y の大きさによって，以下のようになる。

$y = 0$ のとき，小球は点 B と高さが等しい点 E で引き返す。

$y > 0$ のとき，小球は点 E を越えて進む。y が十分に大きいと，小球は点 F を通過する。

点 F を通過するための y の最小値について考えてみよう。

小球が速さ v で半円部分の点 F を通過するとき，半円部分のレールから受ける垂直抗力（鉛直下向き）の大きさを N とすると，円運動の中心方向（半径方向）の運動方程式は，$m\dfrac{v^2}{R} = \boxed{\text{ア}}$ となる。小球がレールから離れずに点 F から空中に飛び出すためには，$N \geqq 0$ が必要である。したがって，点 F を通過するときの最小の速さ v_0 は $\boxed{\text{イ}}$ となる。さらに，点 A から点 F まで小球の力学的エネルギーが保存されることを用いると，y の最小値は半径 R の $\boxed{\text{ウ}}$ 倍となる。

（2） 図2で示すように，小球が速さ $v_1(v_1 > v_0)$ で点Fを通過した後の運動について考える。小球は点Fで左へ水平投射された後，レール上の点Gに衝突した。衝突するまでにばね定数 k の軽いばねをレール上におき，ばねの左端を点Cに固定し，他端に質量 $3m$ の小箱をつける。このとき，ばねの長さは自然の長さとする。小球とレールの衝突は完全非弾性衝突とする。小球は衝突後，速さ v_1 でレールの水平部分に沿って左へ運動し，静止状態の小箱と衝突した。この衝突によって，衝突直後，小箱は速さ v_2 で左へ運動し，小球ははねかえされて速さ v_3 で右へ運動した。小球と小箱の衝突を弾性衝突とし，小箱とレールの間の摩擦は無視できるものとする。また，CD間の距離は十分長いものとし，小球と小箱の再衝突は考えない。

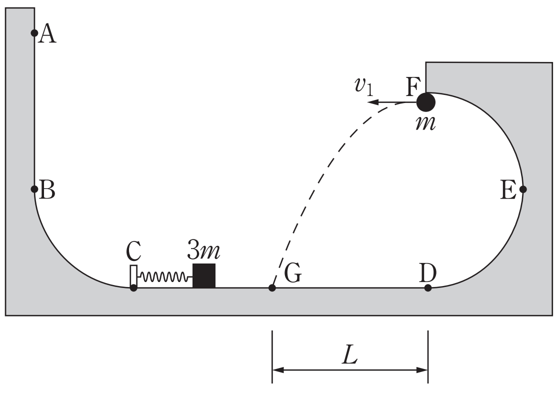

図2

問4　小球とレールの衝突点Gの位置を示すDG間の距離 L を，R, g, v_1 を用いて表せ。

問5　小球と小箱の衝突は弾性衝突であるため，反発係数（はねかえり係数）の計算において，$\dfrac{v_2 + v_3}{v_1} = 1$ となる。衝突前後における運動量保存の法則を利用して，小箱の速さ v_2 と小球の速さ v_3 を，v_1 を用いて表せ。

問6　小箱は衝突で静止状態から左へ運動し，ばねは自然の長さの状態から縮む。ばねの縮みの最大値（絶対値）x_1 を，m, k, v_1 を用いて表せ。

問7　衝突後，ばねと小箱はばね振り子となり，小箱は単振動をする。振動の周期 T を，m, k を用いて表せ。

問8　単振動をする小箱の変位 x を，ばねが自然の長さとなるときの小箱の位置を $x = 0$，ばねが伸びる方向を正として表す。変位 x と時刻 t の関係を表すグラフを，$0 \leqq t \leqq T$ の範囲で解答欄の図（図3と同じ）に描け。ただし，小球と小箱が衝突した瞬間を $t = 0$ とする。

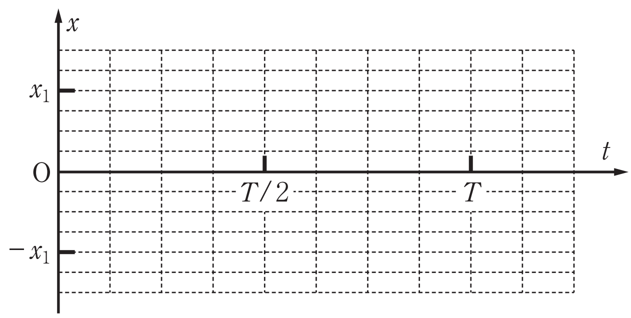

図3

Ⅱ　空所を埋め，問いに答えよ。 ア ， ウ ， カ は数値で答えよ。数値の計算は，有効数字２桁で求めよ。導線の抵抗や電池の内部抵抗は無視できる。（配点 45）

（１）　抵抗の抵抗値は温度によって変化する。この性質を利用することで，抵抗やその周囲の温度を調べることができる。図１の回路は，抵抗１と抵抗２を直列につなぎ，起電力 E〔V〕の電池で一定電圧を加えたものである。抵抗１の抵抗値 R_1〔Ω〕は，０℃のときに 1.0×10^2 Ω で，１℃上がるごとに 0.40 Ω ずつ大きくなる。たとえば，抵抗１の温度が 75℃ のとき，R_1 は ア Ω となる。抵抗２の抵抗値 R_2〔Ω〕は温度による変化がとても小さく，ここでは一定値とみなす。抵抗１をある温度に保ったところ，抵抗２の両端の電圧は V_2〔V〕であった。R_2 と V_2 から回路を流れる電流の大きさが求められるので，R_1 は，R_2, E, V_2 を用いて イ と表される。$R_2 = 1.4 \times 10^2$ Ω，$\dfrac{V_2}{E} = 0.56$ であるとき，抵抗１の温度は ウ ℃とわかる。

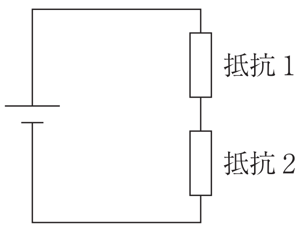

図１

（２）　抵抗に力が加わって変形すると，抵抗値が変化する。この変化を観測するために，図２に示すような，４つの抵抗と起電力 E_1〔V〕の電池からなる回路を考える。はじめ，抵抗の抵抗値はすべて R〔Ω〕である。このとき，点 a および点 b における電位は等しい。次に，抵抗 A に力が加わって変形し，抵抗 A の抵抗値が $R + r$〔Ω〕に変化した。このとき，点 G を基準とする点 a の電位は エ 〔V〕となり，点 a に対する点 b の電位 V_{ba} は $\dfrac{E_1}{2} -$ エ 〔V〕となった。r は，E_1, R, V_{ba} を用いて次式で与えられる。

$$r = \frac{\boxed{\text{オ}}}{E_1 - 2V_{\mathrm{ba}}}$$

$R = 1.0 \times 10^2$ Ω，$E_1 = 1.0$ V，$V_{\mathrm{ba}} = 2.2 \times 10^{-4}$ V であるとき，r は カ Ω と求められる。

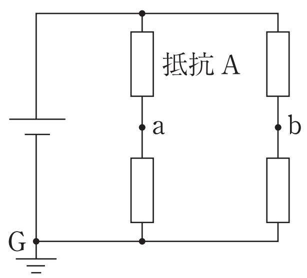

図２

（3） 抵抗の変形と抵抗値の変化との関係を考察しよう。図3のような円柱形の抵抗を考える。この抵抗の抵抗率を ρ〔Ω·m〕，電流を流す方向の長さを L〔m〕，直径を D〔m〕とし，密度は一様である。この抵抗の抵抗値 R_0〔Ω〕は $\boxed{\quad キ \quad}$ と表される。次に，この抵抗を円柱の中心軸に沿って変形させたところ，図4に示すように L が $(1 + x)L$ に，D が $\left(1 - \dfrac{x}{2}\right)D$ に変化した。$|x|$ は1に比べて十分に小さいとする。この抵抗の変形で，抵抗率は変化しないとする。変形した抵抗の抵抗値を R_t〔Ω〕と表すと，変形による抵抗値の変化率 α は次式で与えられる。

$$\alpha = \frac{R_t - R_0}{R_0}$$

問1　α を x の一次までの近似を用いて表せ。なお，必要であれば $|\varepsilon| \ll 1$ のときに成り立つ近似式 $(1 + \varepsilon)^n \fallingdotseq 1 + n\varepsilon$ を用いよ。

問2　$\alpha = 6.0 \times 10^{-4}$ のとき，x を数値で求めよ。

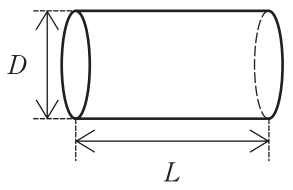

図3

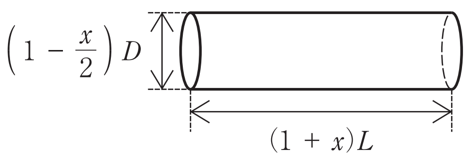

図4

抵抗を金属などの物体に貼り付け，抵抗の抵抗値変化を計測することで，その物体の変形量や物体に加わる力の大きさを調べることができる。身近な応用例はデジタル式体重計である。

Ⅲ 問いに答え，空所を埋めよ。（配点 45）

動いている物体に音波が当たると，反射された音波の振動数が変化して観測される。このドップラー効果を利用することで物体の速度を測ることが可能である。ここでは空気中を運動する小物体を考えてみよう。音速を c とし，風の影響は無視する。

（1） 直線上を運動する小物体を考える。図1のように右向きを正として x 軸をとり，原点Oで静止している音源から振動数 f_0 の音波が発せられる。小物体は x 軸上の正の向きに速さ $v(0 \leqq v < c)$ で音源から遠ざかるとする。

図1

問1 音源から発せられた音波の波長を求めよ。

動いている小物体が受ける音波の振動数 f_1 について考えてみよう。時間 Δt あたり音波は $c\Delta t$ 進むが，その間に小物体は $v\Delta t$ だけ進む。したがって $v\Delta t$ の間に小物体が受けた音波は距離 $(c - v)\Delta t$ の間にある。この距離を音波の波長と Δt で割れば $f_1 = \boxed{\quad ア \quad} \times f_0$ であることがわかる。

次に，小物体で反射されて音源の位置に戻ってくる音波の振動数 f_2 を考える。小物体を振動数 f_1 の音源として扱うと，時間 Δt あたりに発せられる音波の数は $f_1\Delta t$ である。この間に音波は x 軸の負の向きに $\boxed{\quad イ \quad} \times \Delta t$ 進み，小物体は正の向きに $v\Delta t$ 進むため，距離 $\left(\boxed{\quad イ \quad} + v\right)\Delta t$ の間に $f_1\Delta t$ 個の音波があることになる。ここから波長がわかるので，

$f_2 = \boxed{\quad ウ \quad} \times f_1$ である。

以上のことから，v を f_0, f_2, c を用いて表すと $v = \boxed{\quad エ \quad}$ となる。

問2 小物体の速さ v と観測される音波の振動数 f_2 の関係を表すグラフを $0 < f_2 \leqq f_0$ の範囲で解答欄の図に描け。$f_2 = \dfrac{f_0}{2}$ のときの v の値を縦軸に記入すること。

（2） 次に，平面内を運動する小物体を考える。図2のように座標をとり，原点で静止している音源から全方向に振動数 f_0 の音波が発せられる。時刻 $t = 0$ に発せられた音波が小物体に当たった角度は x 軸に対して α であった。音波を受けたとき，小物体は x 軸に対して角 θ の向きに速さ $v(0 \leqq v < c)$ で運動していたとする。

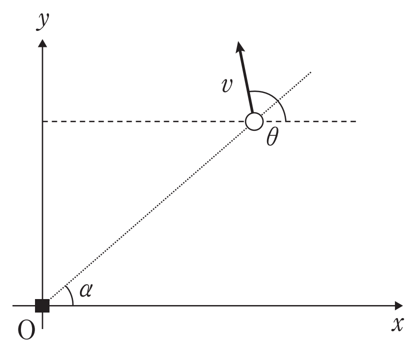

図2

時刻 $t = 0$ に発した音波が，小物体で反射されて原点に戻ってきた時刻は $t = 2T$ であった。

問３　小物体が音波を受けたときの，小物体の x 座標と y 座標を求めよ。

小物体に当たった音波の方向と，小物体が運動する方向がなす角度は $\theta - \alpha$ であるから，小物体の速度のうち，音源から遠ざかる方向の成分は $v\cos(\theta - \alpha)$ である。音源と小物体が十分に離れていれば（１）と同様の議論を行うことができる。このとき反射して原点に戻ってきた音波の振動数を f_2 とすると，$v\cos(\theta - \alpha) = \boxed{\text{エ}}$ と表される。

（３）（２）の観測では $v\cos(\theta - \alpha)$ を求めることはできるが，v を決めることはできない。そこで２つの場所で音波を観測することを考える。

図３のように，図２に加えて x 軸上の点Ｐに観測者がおり，音源から発せられて小物体で反射された音波が点Ｐで観測された。このとき反射された音波が当たる角度を β とする。小物体が音源から遠ざかる方向の速度成分は $v\cos(\theta - \alpha)$，点Ｐの観測者から遠ざかる方向の速度成分は $v\cos(\theta - \beta)$ であることに注意すると，反射して点Ｐに到達する音波の振動数 f_2' は $\boxed{\text{オ}} \times f_0$ と表される。これと（２）の f_2 を観測すれば，v を求めることができる。

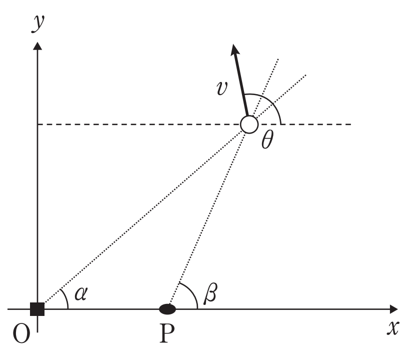

図３

問４　$f_0 = 7.0 \times 10^4$ Hz の音波を用いて小物体に反射された音波の観測を行ったところ，原点では $f_2 = 7.0 \times 10^4$ Hz，$\alpha = 30°$，点Ｐでは $f_2' = 6.8 \times 10^4$ Hz，$\beta = 60°$ が得られた。v〔m/s〕を求めよ。$c = 3.4 \times 10^2$ m/s とする。

音のドップラー効果を利用した観測装置は，医療機器，流量計，海洋探査など幅広い分野に応用されている。また波としての性質を持つ光にもドップラー効果が生じる。気象レーダーによる雨や雪の観測では，しばしば２つ以上の波源が用いられている。