

公募制推薦入試

数 学

I 【数学①・数学②，どちらも解答】

| | |
|---|---------------|
| ア | 4 |
| イ | $8\sqrt{5}$ |
| ウ | 3 |
| エ | $\frac{4}{9}$ |
| オ | $\frac{1}{3}$ |
| カ | 2 |
| キ | 128 |
| ク | 99 |

II 【数学①のみ解答】

| | |
|---|-----------------------|
| ア | $3x$ |
| イ | $\frac{1}{3}$ |
| ウ | $\frac{\sqrt{2}}{13}$ |
| エ | $6n-6$ |
| オ | $4n-3$ |
| カ | 12 |

III

【数学①のみ解答】(解答においては、答えだけでなく計算過程も書きなさい)

(1) $f'(x) = \sin x + (x - a) \cos x - \sin x = (x - a) \cos x$

(2) $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で $f'(x) = 0$ を解くと、 $x = a, \frac{\pi}{2}$

よって、増減表は次のようになる。

| | | | | | | | |
|---------|---|-----|----------------|-----|---------------------------|-----|-------|
| x | 0 | ... | a | ... | $\frac{\pi}{2}$ | ... | π |
| $f'(x)$ | | - | 0 | + | 0 | - | |
| $f(x)$ | 1 | \ | 極小 $\cos a$ | / | 極大 $\frac{\pi}{2} - a$ | \ | -1 |

(3) (2) の増減表より、

$\frac{\pi}{2} - a > 1$ のとき、 $x = \frac{\pi}{2}$ で最大値 $\frac{\pi}{2} - a$

$\frac{\pi}{2} - a = 1$ のとき、 $x = 0, \frac{\pi}{2}$ で最大値 1

$\frac{\pi}{2} - a < 1$ のとき、 $x = 0$ で最大値 1

よって、 $0 < a < \frac{\pi}{2}$ より、

$0 < a < \frac{\pi}{2} - 1$ のとき、最大値 $\frac{\pi}{2} - a$

$\frac{\pi}{2} - 1 \leq a < \frac{\pi}{2}$ のとき、最大値 1

(4) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = \frac{3}{2}$ が共有点をもつのは

$0 < a < \frac{\pi}{2} - 1$ かつ $\frac{\pi}{2} - a \geq \frac{3}{2}$ のときである。

よって、 $0 < a \leq \frac{\pi - 3}{2}$

IV

【数学②のみ解答】

| | |
|---|-----------------------|
| ア | 75 |
| イ | $3n^2 - 2n$ |
| ウ | 6 |
| エ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| オ | $\frac{7}{12}\pi$ |
| カ | $\sqrt{5}$ |

V

【数学②のみ解答】(解答においては、答えだけでなく計算過程も書きなさい)

(1) $f(x) = -x$ より, $f'(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$

よって, 接線 l の方程式は $y = -\sqrt{3}(x - \sqrt{3}) + 1$

よって, $y = -\sqrt{3}x + 4$

(2) $OP^2 = p^2 + \frac{1}{4}(p^4 - 10p^2 + 25) = \frac{1}{4}(p^4 - 6p^2 + 25) = \frac{1}{4}(p^2 - 3)^2 + 4$

したがって, $p = \pm\sqrt{3}$ で最小となる。

(3) (2) より C_1 と C_2 の共有点は $A(\sqrt{3}, 1)$ と $(-\sqrt{3}, 1)$ の2点のみであり,

$B(-\sqrt{3}, 1)$ とおくと, $\angle AOB = \frac{2}{3}\pi$ である。

よって, 求める面積を S とすると,

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2} \right) dx - \pi \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{3} - 2 \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{3}x^3 + 5x \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} - \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} \\ &= 3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi \end{aligned}$$