数独パズルの難易度判定
— 解法ロジックを用いた数値化の提案 —

土出　智也*1　・　真貝　寿明*2

情報科学部　情報システム学科
（2011 年 5 月 24 日受理）

Difficulty Levels of *SUDOKU*
– Proposals of *D*-Score based on Solving Logics –

by

Tomoya DODE and Hisa-aki SHINKAI

Department of Information Systems, Faculty of Information Science and Technology

(Manuscript received May 24, 2011)

Abstract

SUDOKU (or *Number-Place*) is one of the most popular grid-puzzles in the world today. We propose a "score" which represents the difficulty level of each *SUDOKU* puzzle matching with puzzlers' experiences. We first categorize the types of logic for solving *SUDOKU*, and determine the order of applicability of them by examining over 1600 puzzles. We then define the difficulty score (*D*-score) as the total iteration number for searching solutions or sweeping candidate numbers in each column, row, and block according to the order of the types of logics. In comparison with the previously proposed difficulty indices (like the counting method of blank-cells, or like the "*SUDOKU* entropy" which uses candidate number of each blank-cell), our *D*-score corresponds to every step of solving process, thus it enables us to evaluate realistic difficulty levels.

キーワード:　数独パズル, ロジック，難易度

Keyword:　Sudoku puzzle, Logic, Difficulty levels

---

*1 現　兵庫県養父市立大屋中学校．puzzlertomo@hotmail.co.jp
本稿は，土出の卒業研究論文 (2011 年，情報科学部コンピュータ科学科卒) をもとにしている．

*2 shinkai@is.oit.ac.jp
本稿は，大阪工業大学紀要（理工編）[Memoirs of the Osaka Institute of Technology, Series A]，56 (2011), pp. 1-18 掲載原稿です．

数独（あるいはナンバープレース）は世界的にもブームになっているペンシルパズルである．本稿では，数独の難易度を表す「スコア」を提案する．我々は，あくまでも人間が解く場合の難易度を想定し，まず，数独パズルの解法ロジックを分類し，それらの汎用性に順位をつけた．そして，各パズル問題に対する難易度を，そのロジック順に解くときの処理数をカウントすることにして，その総和を難易度「スコア（$D-$ スコア)」として定義した．これまでに，パズル問題の空きマス数や，空きマスに入る候補数字数を使う数独パズルの難易度判定方法も提案されているが，初期盤面での情報を用いるこれらより，現実に近い判定ができると考えられる．

1　予備知識

1.1　数独，SUDOKU，ナンバープレイス

本稿で扱う数独は 3×3 のブロックで区切られた 9×9 のマスで構成され，ヒントの数字を頼りにマスの中に 1 から 9 の数字を重複なく当てはめるパズルである．“数独”という名前は，『問題には一桁の数字しか使わない』『数字は独身に限る』という理由で付けられた[*3]．ナンバープレースやナンプレの名でも知られ，現在では専門雑誌はもちろん，ポケットサイズの書籍や携帯ゲーム機・携帯電話のアプリなどでも数独を楽しむことができる．

数独の問題例を図 1 に示す．ルールはいたってシンプルで，次の 3 点だけである[*4]．

1. **ヨコ列のどの列にも** $1 \sim 9$ **の数字が 1 つずつ入る**
2. **タテ列のどの列にも** $1 \sim 9$ **の数字が 1 つずつ入る**
3. **太線で囲まれた** 3×3 **のどのブロックにも，**$1 \sim 9$ **の数字が 1 つずつ入る**

市販されている雑誌や書籍に掲載されている各パズル問題には，簡単なものから複雑難解なものまであり，「初級・中級・上級」とか「Easy, Hard, Spicy」などいろいろな呼び名で難易度が示されている（これらを本稿では**公称難易度**と呼ぶ)．数独の解法も「基本テクニック」と呼ばれるものから「高級」とされるものまで，さまざまなものが存在する．しかし，公称難易度は，パズル作者の経験によることが多いようで，基本的な解き方を用いて問題を解いた場合，簡単とされる難易度の問題はもちろん解けるが，中級とされる問題でも時間さえかければ解けてしまうものも多く存在する．

			3	8			9	4
8		4	2	7				
9	3	5	6	4			7	2
1	6	9				3	8	
			8		3			
	4	8				7	2	1
2	8			3	7	5	6	9
				6	8	2		7
6	9			5	2			

図 1　数独の問題例．［文献[8)] の Question 001，UltraEasy とされるレベル］
Fig.1 Sample of SUDOKU puzzle.

そこで我々は，どの解法を使えばどれだけの問題が解けるのか，解法ロジックの順を分析し，その結果を総合して，パズルの難易度を判定するスコアを提案する．

[*3] アメリカのパズルマガジンに掲載されていたナンバープレイスというパズルを，(株) ニコリの鍛冶真起氏が日本に持ち帰り，ニコリが発行しているパズル雑誌『月刊ニコリスト』1984 年 4 月号で掲載したのが始まりである．国内では「数独」はニコリ社の登録商標であり，他社は「ナンバープレース」と呼ぶ．世界では「SUDOKU」として親しまれている．

[*4] この他に，2 本の対角線にも $1 \sim 9$ を 1 つずつ入れなければならない問題や，複数の盤面が重なった問題などさまざまなバリエーションが存在するが，本稿では対象外とする．

1.2　問題は枯渇しないのか

数独は n 行 n 列の表に n 個の異なる数字を，各数字が各行，各列に 1 回だけ現れるように並べたラテン方陣の一種である．9×9 の一般的な数独の解答として有効なパターンは

$$6670903752021072936960 \quad (6.67 \times 10^{21})$$

であるという[1]．行や列の入れ替え，盤面の回転，転置，数字の置き換えなどで同一となるパターンが存在するため，実際の有効解はこれよりも少なくなるが，パズルを作る際は空きマスを設ける必要があり，数独の問題としてのパターンは有効解の個数よりずっと多くなるため，問題が枯渇することはないだろう．

数独のヒント数字に対称性をもたせるなどの美しさの追究が，問題作者の腕の見せ所にもなっている．

1.3　行，列，ブロック

本稿では，数独の盤面を i 行 j 列の行列 (i, j) として扱う．たとえば，上から 2 つめのヨコ列は 2 行，右から 3 つめのタテ列は 7 列となる．ブロックについても 3 行 3 列の行列として扱う．したがって左上のブロックは 1 行 1 列，右下のブロックは 3 行 3 列となる．またブロックについてはブロック $[i, j]$ などと表記する．

2　難易度判定の試み

数独は，埋めるべき空白マス（以下**空きマス**と呼ぶ）を減らしてゆくパズルである．したがって，空きマスが多いほど問題は難しくなると予想される．

また，各マスには 1~9 の数字が入るが，そのマスが属する行，列，ブロックで既に使用されている数字は入ることはないため，候補が絞りこまれていく．したがって，それぞれの空きマスに，入る可能性のある数字（以下**候補数字**と呼ぶ）の個数が多いほど，それだけ数字の選択肢が増えるため難解な問題であると予想される．

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(1,7)	(1,8)	(1,9)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	(2,7)	(2,8)	(2,9)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(3,7)	(3,8)	(3,9)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)	(4,7)	(4,8)	(4,9)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)	(5,7)	(5,8)	(5,9)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)	(6,7)	(6,8)	(6,9)
(7,1)	(7,2)	(7,3)	(7,4)	(7,5)	(7,6)	(7,7)	(7,8)	(7,9)
(8,1)	(8,2)	(8,3)	(8,4)	(8,5)	(8,6)	(8,7)	(8,8)	(8,9)
(9,1)	(9,2)	(9,3)	(9,4)	(9,5)	(9,6)	(9,7)	(9,8)	(9,9)

図 2　各マスの添字
Fig.2　Indices of cells.

[1,1]	[1,2]	[1,3]
[2,1]	[2,2]	[2,3]
[3,1]	[3,2]	[3,3]

図 3　各ブロックの添字
Fig.3　Indices of blocks.

2.1　空きマス数と公称難易度

空きマス数と公称難易度の関連を図 4 に示す．笠倉出版の「世界基準ナンプレ 300」の 2 冊[8),9)]に掲載された 600 問を分析したもので，図の横軸に空きマス数と公称難易度をとり，縦軸に問題数をプロットした．

公称難易度が「UltraEasy」側に近づくほどピークが横軸の左側にあり，「Spicy」側に近づくほどピークが右側になっている．空きマス数と公称難易度には相関がみられる．実際，公称難易度を「UltraEasy」$= 1$,「Spicy」$= 8$ となるように数値化して，相関係数 r を求めると，$r = 0.87$ となる．強い相関である．

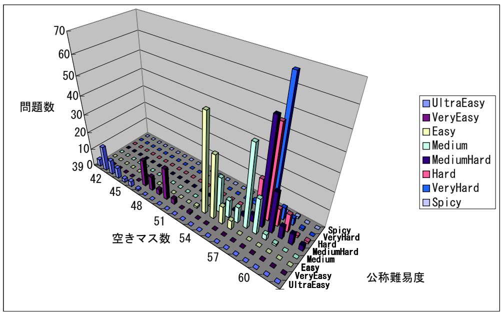

図 4　公称難易度別の空マス数の分布
Fig.4　Numbers of puzzles are plotted in terms of initial blank-cells and the “official” difficulty levels by the puzzle writers.

ただし空きマス数は，埋めなければならない数字の個数に等しい．また空きマス数が多いほど解く際に時間がかかることから，この結果は当然であるとも考えられ，空きマス数が多くても簡単な問題や，空きマス数が少なくても難しい問題などの難易度の判定は，空きマス数だけでは難しい．

2.2　候補数字数と難易度

難易度の指標として，Chen は，数独エントロピーという量を提案している[2]．初期盤面でのマス (i,j) に入る可能性のある候補数字数を $|v_{ij}|$ として，

$$H_G = -\frac{1}{81}\sum_{i,j}\log\frac{1}{|v_{ij}|} \qquad (1)$$

と定義する量で，候補数字が多いほど難易度が高いだろう，というアイデアである（最初から数字が入っているマスは $|v_{ij}| = 1$ として計算する.）．

先と同じく「世界基準ナンプレ 300」[8),9)]の 600 問に対して数独エントロピー H_G を計算した結果を表 1 に示す．

Chen の計算結果では，（サンプルが異なるが）「Easy」「Intermediate」「Hard」の順に有意に H_G の値が増加したが，残念ながら上記のサンプルでは難易度が高いとされるところでは H_G にそれほど差が見られない．しかし，相関係数は $r = 0.89$ となり，空きマス数を使う方法より若干強い相関が見られた．

表 1　「世界基準ナンプレ 300」[8),9)]掲載の 600 問の公称難易度と数独エントロピー H_G
Table 1　The official difficulty levels and these *SUDOKU* entropy H_G (minimum, maximum, and average). We take 600 puzzles in[8),9)] as samples.

公称難易度	問題数	H_G 最小値	H_G 最大値	H_G 平均値
UltraEasy	38	0.1983	0.4324	0.3509
VeryEasy	48	0.3581	0.6397	0.5179
Easy	104	0.6520	0.8363	0.7304
Medium	108	0.7199	0.9793	0.8379
MediumPlus	100	0.8252	1.0466	0.9241
Hard	100	0.8165	1.0244	0.9175
VeryHard	100	0.8387	1.0326	0.9156
Spicy	2	0.8956	0.9840	0.9398

候補数字の個数は同じ空きマス数でも，数字の配列によって変わってくる．このことから，公称難易度と空きマス数との関係よりもより細かく難易度を指し示すことができると考えられる．

2.3　難易度判定の問題点

以上の 2 つの指標は，どちらも解き始める前の盤面の状態から数独の難易度を判定したものだ．実際に，解いている途中のプロセスを含めての難易度判定ではない．そこで我々は，実際に数独を解くロジックを用いて，数字の埋まりやすさや思考の難しさなどを難易度の指標に取り込むことを試みる．

3　数独の解法ロジック

数独にはさまざまな解法ロジックが存在するが，本研究で用いる解法はロジックそのものがややこしくならないよう，数独の専門雑誌や書籍に記載されているものをベースに独自に分類した．解法の呼び名については独自に命名したものもあるが，対応する別名については Appendix

にて示す．

3.1　解法の２分類

数独の解法には，大きく分けて，

- **数字の入るマスを絞り込む方法** (CRBE 法)
- **マスに入る可能性のある数字の候補を絞り込む方法**

の 2 つがある．後者を行うには，それぞれの空きマスについて，候補となる数字をすべて書き出すプロセスが必要である (これを**ペンシルマークをつける**という)．したがって，まず，前者から解きはじめるのが普通であろう．数独の専門誌には必ず載っているのも前者（CRBE 法）であり，実は多くの問題がこのロジックで解けてしまう．そこで，CRBE 法の説明から始めよう．

3.2　CRBE 法 (CRBE method)

3.2.1　基本的な CRBE 法

ある数字が入る可能性のあるマスを，周辺の**行** (row)，**列** (column)，**ブロック** (block) から**絞り込む** (eliminate=消去する) 方法で，CRBE 法と呼ばれている．

図 1 の問題を考えよう．CRBE 法では数字が多く出現しているほど有効に絞り込むことができるため，出現している数の多い数字に注目して適用するほうが効率よく数字を埋めることができる．図 1 の盤面の数字の中では，8 が 7 個と一番多いので，8 に注目しよう．

ブロック [1, 3] を見ると，空きマスは (1, 7), (2, 7), (2, 8), (2, 9), (3, 7) の 5 箇所である．ルール 1 の“**ヨコ列のどの列にも** 1 ∼ 9 **の数字が 1 つずつ入る**”を用いて，8 が入る可能性のある場所を考えてみると，

- マス (1, 5) に既に 8 が入っているので，1 行目には 8 は入らない．
- 同様にマス (2, 1) にも 8 が既に入っているので，2 行目には 8 は入らない．

以上より 8 はマス (3, 7) に入ることがわかる (図 5）．続けてブロック [3, 3] に注目すると，ルール 2 より，7 列目の (3, 7) に 8 があり，8 列目にも 8 があることから，マス (9, 9) に 8 が入ることがわかる．

			3	8			9	4
8		4	2	7				
9	3	5	6	4		8	7	2
1	6	9				3	8	
			8		3			
	4	8				7	2	1
2	8			3	7	5	6	9
				6	8	2		7
6	9			5	2			8

図 5　図 1 の問題で，ブロック [1, 3] と [3, 3] で数字 8 に CRBE 法を適用後

Fig.5　For the puzzle of Fig. 1, after applied the CRBE-method on number 8 for the blocks [1, 3] and [3, 3].

3.2.2　探索対象の数字の選び方

上述したように，探索の対象にする数字はその時点で一番多く出現しているものを選ぶのが効率的である．ただし，盤面の数字を数え，

- 数字が既に 9 つ埋まっているもの
- 直近の探索で埋まらなかったもの

の 2 つは除外し，複数の数字が同数であれば，小さい数字から対象とすることにしよう．

図 1 の問題で，8 を埋めてゆく作業を繰り返す．9 つのブロックすべてで 8 の位置が確定するか，途中で絞り込めなくなるまで続けることにしよう．この例では，8 はすべて確定し，図 6 のようになる．この時点で，盤面の数字は多い順に，8 = 9 個，2 = 6 個，$\cdots$ である．そこで，次に多い 2 を探索対象の数字として，CRBE 法を適用する．

2 に対して CRBE 法を行うと，1 つだけ埋まる（図 7）．この時点で盤面の数字は，8 = 9 個,

2 = 7 個，3,6,7,9 = 5 個⋯ となる．2 はこれ以上埋まらないのだから，3 に注目して CRBE 法を行う．3 も 1 つ確定する（図 8）．

			3	8			9	4
8		4	2	7				
9	3	5	6	4		8	7	2
1	6	9				3	8	
			8		3			
	4	8				7	2	1
2	8			3	7	5	6	9
				6	8	2		7
6	9			5	2			8

図 6　図 5 に続けて，8 を埋めた後．
Fig.6　Filling number 8, after Fig. 5.

			3	8			9	4
8		4	2	7				
9	3	5	6	4		8	7	2
1	6	9		2		3	8	
			8		3			
	4	8				7	2	1
2	8			3	7	5	6	9
				6	8	2		7
6	9			5	2			8

図 7　図 6 に続けて，2 を埋めた後．
Fig.7　Filling number 2, after Fig. 6.

この時点での盤面の数字は 8 = 9 個，2 = 7 個，3 = 6 個，6，7，9 = 5 個⋯ である．3 が決まったことで，再度 2 を探索数字として選び，CRBE 法を繰り返す．この問題の場合，2 は確定せず，（盤面の変化がないので 3 の探索は不要なので）次に 6 を対象として選ぶことになる．

このように数字が埋まらない状態が続けば探索の対象から除外となり，新しく数字が埋まれば盤面の変化により埋まる可能性が出てくるので対象に含める．この方法を繰り返して CRBE 法を続けることになる．

			3	8			9	4
8		4	2	7				
9	3	5	6	4		8	7	2
1	6	9		2		3	8	
			8		3			
3	4	8				7	2	1
2	8			3	7	5	6	9
				6	8	2		7
6	9			5	2			8

図 8　図 7 に続けて，3 を埋めた後．
Fig.8　Filling number 3, after Fig. 7.

3.2.3　CRBE 法の改良

CRBE 法をより効率良いものにするために，人間の思考に合わせて新たに 2 つのルールを付け加えよう．

- **「残り 1 つ」なら速効ルール**
  各行，列，ブロックで空きマスがただ 1 つになった場合は必然的にそのマスに入る数字が確定するため，注目している数字でなくても強制的にマスを埋める．
- **「残り 2 つ」は記憶して後回しルール**
  対象として探索した数字が残り 2 つ（マスの可能性 4 箇所）となった場合，そのマスを記憶しておき，そのマスが他の数字の探索で埋まらない限り，探索数字としない．

1 つ目は，図 9 の 3 行目のような場合である．3 行目ではマス (3,6) だけが空白であり，この行には 1 が入ることがすぐ分かる．先ほどの対象数字を選ぶ規則では，盤面数字の中では 1 は 2 個と最も少なく，探索の順がなかなか回ってこない．しかし実際に人が解く場合は，このようなマスを見つけるとすぐに埋めるのが当たり前である．

			3	8			9	4
8		4	2	7				
9	3	5	6	4		8	7	2
1	6	9		2		3	8	
			8		3			
3	4	8				7	2	1
2	8			3	7	5	6	9
				6	8	2		7
6	9			5	2			8

図 9　3 行目が残り 1 マスの盤面（図 8 と同じ盤面）.
Fig.9　Only one cell is left in the third row (The same with Fig.8).

2 つ目は，記憶を用いる方法である．例えば前の節では以下のような順で探索を行った．

8 を対象数字に (すべて埋まる)
→ 2 を対象数字に (1 個埋まり 2 個残る)
→ 3 を対象数字に (1 個埋まり 2 個残る)
→ 2 を対象数字に (1 つも埋まらず 2 個残る)
→ 6 を対象数字に　···

このとき 4 行目の探索数字の選定で 2 は 1 つも新たに埋めることが出来ていない．これは 2 の入る可能性のあるマスが他の数字によって埋まっていないためである．図 10 は図 7 と同じものだが，2 を埋めた後の状態である．2 は残り 2 つとなり，入る可能性のあるマスも，$(1,2)$, $(1,3)$ のどちらか，$(5,2)$，$(5,3)$ のどちらかの計 4 箇所に絞り込まれている．そのため，これら 4 つのマスが 2 以外の数字で埋まるか，関係する行，列，ブロックの残り 1 マスとなり 8 個目の 2 が埋まらない限り，2 を探索する意味はない．よって，この場所を記憶しておき，他の数字や残り 1 マスとなった数字が埋まる度に照合し，記憶した場所に数字が埋まっていない限り探索対象から除外しよう．記憶を残り 2 個に限定したのは，実際に人が解く場合と比較したとき，4 箇所程度なら覚えておくことが可能と考えられるからである．

			3	8			9	4
8		4	2	7				
9	3	5	6	4		8	7	2
1	6	9		2		3	8	
			8		3			
	4	8				7	2	1
2	8			3	7	5	6	9
				6	8	2		7
6	9			5	2			8

図 10　4 つのマスに記憶の適用（図 7 と同じ盤面）.
Fig.10　Applying your memory to four cells (The same with Fig. 7).

以上の 2 つの工夫で，探索する数字選定の無駄がなくなり，効率良く CRBE 法を行うことができるようになる．

3.3　ペンシルマーク (pencil-mark)

CRBE 法で問題が解けなかった場合，今度は，各空きマスに入り得る候補数字を書き込む作業を行い，次のロジックへと進むことになる．候補数字は各マスに小さく記入すると分かりやすく，これを「ペンシルマーク」と呼ぶ．

もともと, 初期状態では各マスのペンシルマークは 1~9 の 9 つと考えても良い．いろいろな解法ロジックでペンシルマークが絞り込まれ，最後に 1 つに絞りこまれたマスはその数字で確定する，と理解することもできる．

図 1 の問題について，（CRBE 法を適用せずに）ペンシルマークを書き入れた例を図 11 に示す．

3.4　ペンシルマークを確定するロジック

ペンシルマークを書き出したあとは，ペンシルマークを絞り込み, 確定させてゆく作業を行うことになる．まず，確定させる基本的なロジッ

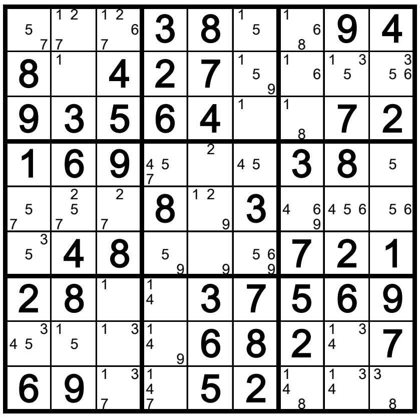

図 11　ペンシルマークの記入例．図 1 の問題に（CRBE 法を適用せず）ペンシルマークを記入した盤面．

Fig.11　Filling pencil-marks for the puzzle Fig. 1 instead of applying the CRBE-method.

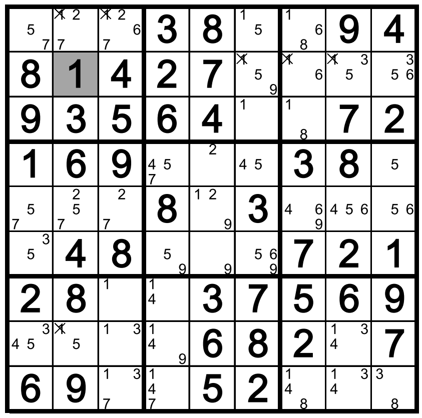

図 12　図 11 に対して，単一候補法をマス $(2,2)$ に適用後．

Fig.12 Apply the unique-candidate method to the cell $(2,2)$ for Fig. 11.

クを 2 つ挙げておく．

3.4.1　単一候補法 (unique-candidate)

1 つのマスに 1 つのペンシルマークしかなければそのマスは確定である．確定後，関連するペンシルマークを消去するまでのロジックを**単一候補法**と呼ぶことにする．

たとえば，図 11 のマス $(2,2)$ は，ペンシルマークは数字 1 しか残っていない．すなわち，1 で確定である．マス $(2,2)$ が 1 と確定すると，図 11 の 2 行目・2 列目およびブロック $[1,1]$ の $(2,2)$ 以外の箇所にあるペンシルマーク 1 が消去される（図 12）．

3.4.2　単一マス法 (unique-cell)

それぞれの行，列，ブロックにおいて特定の数字 n の候補が 1 つのマスにしか存在しない場合，そのマスに入っている数字 n 以外の候補は消去される．これを**単一マス法**と名付ける．

たとえば図 13 上 で，ブロック $[2,3]$ に注目すると（7 行目に注目してもよいが），このブロック内では候補 9 はマス $(5,7)$ にしかない．したがってマス $(5,7)$ は 9 で確定し，9 以外のペンシルマーク 4，6 は消える．

同様に 5 行目に注目すると候補 1 はマス $(5,5)$ にしかないので，マス $(5,5)$ は 1 で確定し，その他のペンシルマークは消える（図 13 下）．

3.5　ペンシルマークを絞り込むロジック

3.5.1　双子法 (twins)

行，列，ブロックの中からペンシルマークのペア (双子) を見つけ，それを用いて候補を絞り込んでいく方法を**双子法**と呼ぶことにする．次の 2 つのパターンがある．

- **独立双子法 (independent-twins)**
  1 つの行・列あるいはブロックの中で，2 つのマス p_1 と p_2 に，2 つの数字 n_1，n_2 の同じ組が存在するとき，その行・列あるいはブロックにある p_1，p_2 以外のマスから n_1 と n_2 の候補は消える．
- **居候双子法 (dependent-twins)**
  1 つの行・列あるいはブロックの中で，2 つの数字 n_1，n_2 が，2 つのマス p_1 と p_2 にのみ存在するとき，p_1，p_2 の 2 つのマスでは，n_1，n_2 以外の候補は消える．

独立双子法の例を図 14 に示す．図 14 上 の 2 行目に注目すると，マス $(2,5)$ と $(2,6)$ のペン

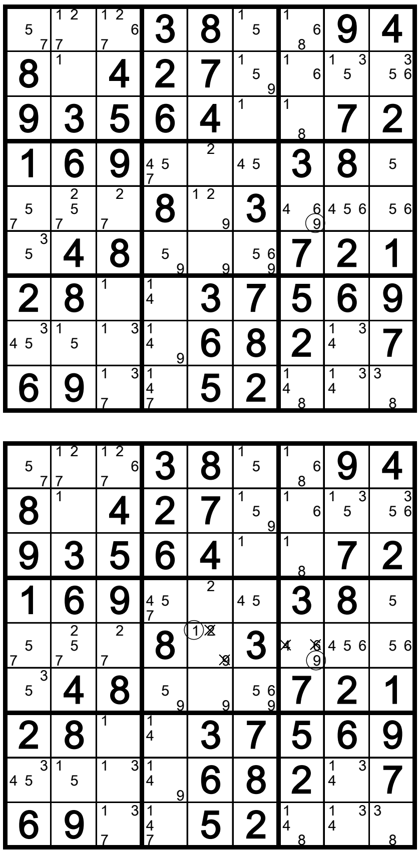

図 13　（上）図 11 と同じ盤面．単一マス法をマス $(5,7)$ に適用前．（下）マス $(5,5)$ と $(5,7)$ に単一マス法を適用後．
Fig.13 (Top) The same with Fig. 11. Before applying the unique-cell method to the cell $(5,7)$. (Bottom) Applying the unique-cell method to the cell $(5,5)$ and $(5,7)$.

シルマークはどちらも 2 と 3 のみである*5．したがって，どちらか一方に 2，他方に 3 が入るので，２行目の他のマスには 2 も 3 も入らないことになるので，候補から消える（図 14 下）．

図 14 下 では 2 行目のみの結果を示したが，さらに独立双子法を使うとブロック $[1,1]$ から 4，5 が，ブロック $[1,2]$ から 8，9 や 2，3 がペアとして見つかり，さらに候補が消えることになる．

*5 **“マス** $(2,5)$ **と** $(2,6)$ **の候補は** 2，3 **のみである”** であって，**“マス** $(2,5)$ **と** $(2,6)$ **にのみ** 2，3 **がある”** ではないことに注意．

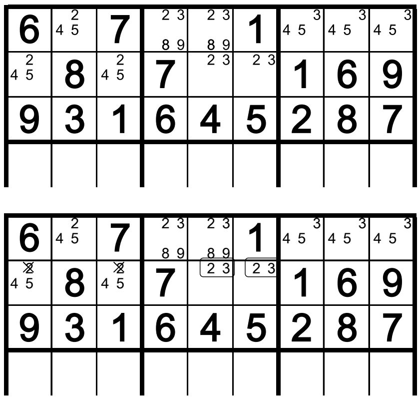

図 14　（上）独立双子法適用前．（下）独立双子法適用前．[文献3) p.95 より]
Fig.14 (Top) Before and (Bottom) after applying the independent-twins method.

独立双子法の例を図 15 に示す．独立双子法と同じ図であるが，独立双子法は適用しない前提で説明を進める．図 15 上 の 1 行目に注目すると，8，9 のペアは，マス $(1,4)$ と $(1,5)$ のみにある．したがって，8，9 はこの 2 つのマスのどちらかで確定するはずだ．したがって，マス $(1,4)$ と $(1,5)$ から 8，9 以外の候補は消える (図 15 下)．

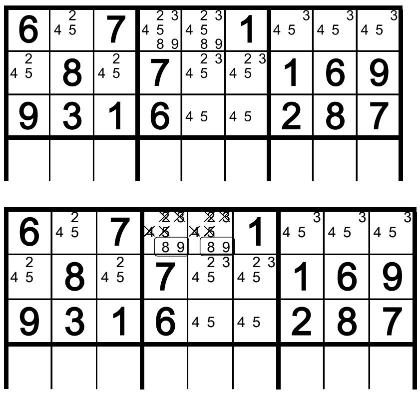

図 15　（上）居候双子法適用前．（下）居候双子法適用前．[文献3) p.99 より]
Fig.15 (Top) Before and (Bottom) after applying the dependent-twins method.

さらに同様に居候双子法を使うと，ブロック $[1,2]$ ではマス $(2,5)$ と $(2,6)$ にのみ存在する 2，

3 がペアとして見つかり，$(2,5)$ と $(2,6)$ にある他の候補 4 と 5 は消える．

3.5.2　三つ子法 (triplets)

双子法の拡張である．双子法と同様に，以下の 2 つのパターンがある．

- **独立三つ子法 (independent-triplets)**
  1 つの行・列あるいはブロックの中で, 3 つのマス p_1，p_2，p_3 に，3 つの数字 n_1，n_2，n_3 で構成される組が存在するとき，その行・列あるいはブロックにある p_1，p_2，p_3 以外のマスから n_1，n_2，n_3 の候補は消える．
- **居候三つ子法 (dependent-triplets)**
  1 つの行・列あるいはブロックの中で，3 つの数字 n_1，n_2，n_3 で構成される組が，3 つのマス p_1，p_2，p_3 にのみ存在するとき，p_1，p_2，p_3 のマスでは，n_1，n_2，n_3 以外の候補は消える．

3 種類の数字が 3 マスに分布している場合だが，実際には見落としやすいパターンがいくつかあるため注意が必要である．

図 16 左 は盤面の左下部分で，3 つのマスに，2，4，6 の 3 つの数字が収まっている．独立三つ子法を適用すると，図 16 右 となる．

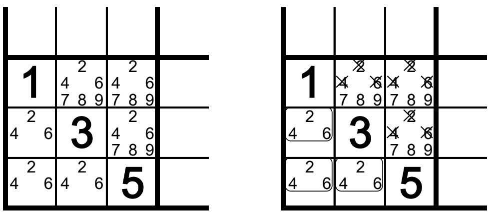

図 16　（左）独立三つ子法適用前．（右）独立三つ子法適用後．
Fig.16　(Left) Before and (Right) after applying the independent-triplets method.

この例では，3 つのマスに 2，4，6 が 3 つずつ存在していたが，3 つずつ存在する必要はなく，**3 種類の数字が 3 つのマスに存在**していればよい．そのため，図 17 の 3 種類のような場合でも **“マス $(8,1)$，$(9,1)$，$(9,2)$ に独立三つ子が存在する”** と言える．

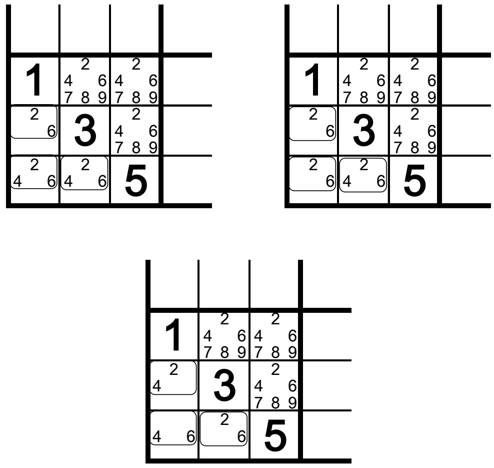

図 17　独立三つ子法パターン 1, 2, 3.
Fig.17　Independent-triplets patterns 1, 2, and 3.

居候三つ子法も同様である．図 18 左 は図 16 と同じであるが，独立三つ子法を使用しないとすれば，7，8，9 の 3 つの数字が 3 つのマスに収まっているので，居候三つ子法が適用できる（図 18 右）．

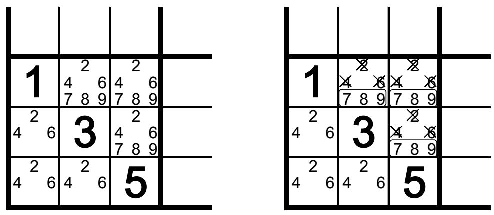

図 18　（左）居候三つ子法適用前．（右）居候三つ子法適用後．
Fig.18　(Left) Before and (Right) after applying the dependent-triplets method.

居候三つ子法の場合も 3 つの数字が 3 つのマスすべてに存在している必要はない．図 19 の 3 パターンも該当する．

3.5.3　共有候補法 (common-candidate method)

行，列，ブロックの候補を複合的に考える方法を**共有候補法**と呼ぼう．

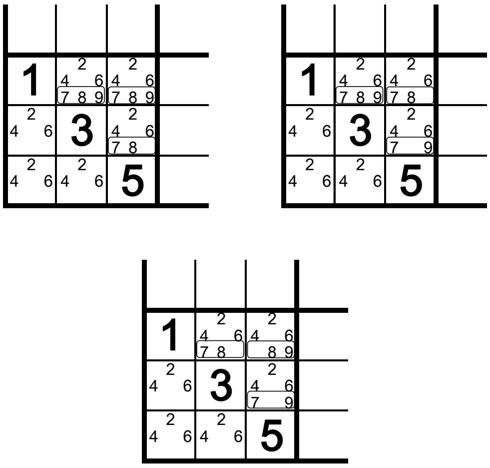

図 19　居候三つ子法パターン 1, 2, 3.
Fig.19　Dependent-triplets patterns 1, 2, and 3.

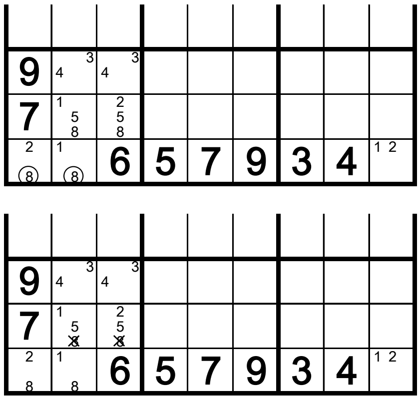

図 21　（上）共有候補法適用前.（下）共有候補法適用後. [文献[5] p.11 より]
Fig.21 (Top) Before and (Bottom) after applying the common-candidate method.

図 20 上 の中央のブロック $[3,2]$ の中で，候補 6 はマス $(9,4)$，$(9,6)$ にしか存在しない．したがって 6 はこのどちらかに入ることになる．そうすると，同じ 9 行目にある他の候補 6 は消える (図 20 下).

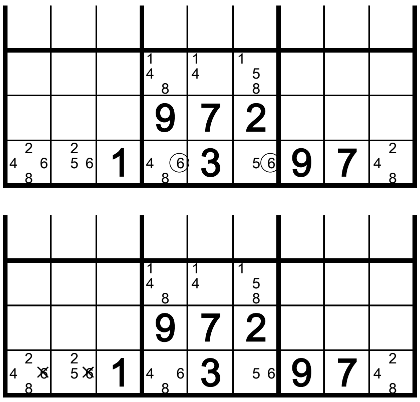

図 20　（上）共有候補法適用前.（下）共有候補法適用後. [文献[5] p.11 より]
Fig.20 (Top) Before and (Bottom) after applying the common-candidate method.

共有候補法は上で説明したブロックから行を消す場合のみでなく，ブロックから列を消す場合，行からブロックを消す場合，列からブロックを消す場合の計 4 種類が存在する．これらはそれぞれ，お互いに 3 つのマスを共有しているため上記と同じ論理で候補を消去することができる．

たとえば図 21 上 で 9 行目に注目すると，候補 8 はマス $(9,1)$，$(9,2)$ のどちらかで確定するはずである．そうなると，図の左のブロック $[3,1]$ で 9 行目以外にあった候補 8 は消えることになる (図 21 下).

3.5.4　対角線法 (diagonal-line method)

図 22 の 2 行目で候補 5 に注目すると，5 列目のマス $(2,5)$ と 9 列目のマス $(2,9)$ の 2 箇所にのみ存在している．また 6 行目でも候補 5 は 5 列目のマス $(6,5)$ と 9 列目のマス $(6,9)$ の 2 箇所にのみ存在している．

このとき，たとえば 2 行目で，マス $(2,5)$ に 5 が入ると，6 行目の 5 はマス $(6,9)$ に入ることになる．逆に 2 行目で 5 がマス $(2,9)$ に入ると，6 行目ではマス $(6,5)$ に入る．

つまり左上に入れば右下に，右上に入れば左下と，この 2 パターンのどちらかしか候補 5 の入る組み合わせはない．したがって，候補 5 がどちらのパターンで入ったとしても，5 列目と 9 列目の，2 行目と 6 行目と交差しているマス以外のマスから候補 5 は消える．このような対角

線関係の組み合わせを見つけるのを**対角線法**と呼ぼう．

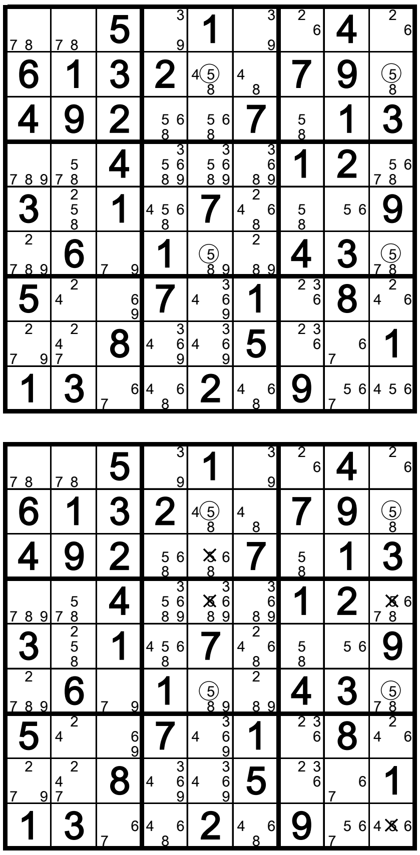

図 22　（上）対角線法適用前．（下）対角線法適用後．[文献[8] p.255 より]
Fig.22 (Top) Before and (Bottom) after applying the diagonal-line method.

候補ではなく確定数字が並んでいる場合でも，対角線法は適用できる．図 23 の 3 列目の中で 9 の数字はマス (3, 3)，(6, 3) のどちらかに入り，7 列目の中ではマス (3, 7)，(6, 7) のどちらかに入る．この場合でも対角線的に 9 の数字が入るはずなので，3 行目と 6 行目の 3 列目，7 列目以外のマスに 9 が入る可能性はなくなる（図 23 の ×印）．

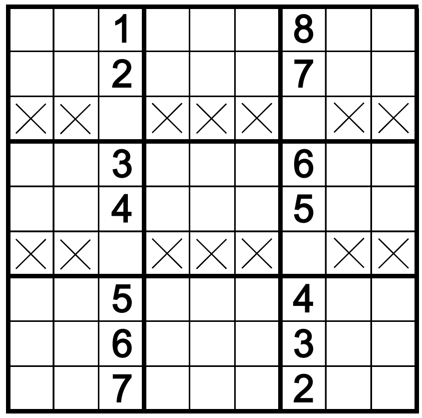

図 23　確定数字を用いる対角線法．[文献[6] p.13 より]
Fig.23　Example of the diagonal-line method using the filled numbers.

4　解法ロジックのレベル

4.1　レベル 1 とレベル 2 の特定

前章では 7 つの解法ロジックを示したが，どれがもっとも汎用的なのかレベル分けを考えよう．これまでに述べた解法を整理すると，次のようになる．

- 解法には数字の入るマスを絞り込む方法と，マスに入る可能性のある数字の候補を絞り込む方法とがあった．
- 数字の入るマスを絞り込む方法の場合，数字を確定させる方法は ① CRBE 法しかない．
- マスに入る可能性のある数字の候補を絞り込む方法では，そのマスに入る数字を確定させるための方法は ②単一候補法と ③単一マス法の 2 つになる．
- ④双子法，⑤三つ子法，⑥共有候補法，⑦対角線法は候補を絞り込むだけの解法であり，これらによってマスの候補が残り 1 つになった場合は単一候補法によって確定，マスの候補の数字が行や列，ブロックの中で 1 箇所のみになった場合は単一マス法で確定される．

そのため単一候補法と単一マス法は，双子法，三つ子法，共有候補法，対角線法を用いる前や後に必ず適用しなければならず，優先順位が双子法や対角線法よりも高くなる．

また CRBE 法と単一候補法，単一マス法を比べると，CRBE 法は候補数字（ペンシルマーク）を使用しないぶんだけ扱いやすい解法である．このことから①CRBE 法が最も簡単な解法，その後に②単一候補法と③単一マス法がその後に続く．

CRBE 法はレベル 1 とし，単一候補法と単一マス法はまとめてレベル 2 とする．残りの 4 つの解法のレベル付けは，完成できる問題数の多さから分類することを試みる．

表 2　統計対象としたパズル問題集.
Table 2 List of the puzzle sources.

タイトル（出版社，出版年）	問題数
超難問ナンプレ& 頭脳全開数理パズル 9.10 月号[5]	28
ナンプレファン 10 月号[6]	152
ナンプレメイト 10 月号[7]	181
世界基準ナンプレ 300 Vol.1[8]	300
世界基準ナンプレ 300 Vol.2[9]	300
最高段位認定 難問ナンプレ 220 題 vol.2[10]	220
実力検定 難問ナンプレ 250 問 vol.3[11]	250
西尾徹也の世界で一番美しくて難しいナンプレ 2[12]	100
数独の父 鍛冶真起が教える難問数独[13]	108
合計	1639

4.2　レベル 3 以降の特定

双子法，三つ子法，共有候補法，対角線法の 4 つを並べる順列は 24 通りあるが，できるだけ多くの問題が完成できるような解法順を見つけ，レベルを特定しよう．

表 2 に挙げた 1639 問のうち，レベル 2 までで完成できなかった問題 722 問のうち，双子法，三つ子法，共有候補法，対角線法を使うことで

表 3　レベル 2 で残された 722 問に対する使用解法別の完成数.
Table 3 Solved puzzles and combinations of used logics for the 722 puzzles which is not completed in Level 2.

使用した解法	完成した問題数
双子法	456
三つ子法	408
共有候補法	284
対角線法	134
双子法 & 三つ子法	513
双子法 & 共有候補法	597
双子法 & 対角線法	545
三つ子法 & 共有候補法	596
三つ子法 & 対角線法	504
共有候補法 & 対角線法	331
双子法 & 三つ子法 & 共有候補法	644
双子法 & 三つ子法 & 対角線法	596
双子法 & 共有候補法 & 対角線法	629
三つ子法 & 共有候補法 & 対角線法	629
4 つすべてを用いた場合	674

解くことのできた問題 674 問について，使う解法を限定した場合の完成数を表 3 に示す．そして，例えば，対角線法を除く 3 つについて，ベン図を描くと図 24 のようになる．

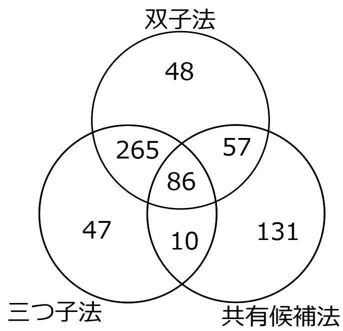

図 24　3 つの解法で完成できた問題数の内訳.
Fig.24 Solved puzzles with 3 logics.

4 つの解法の 24 通りの順列について，完成で

表 4　使用解法順別の完成できる問題の累積数．

Table 4　Order of logics and cumulative solved puzzles.

解法順	累積数
双子→共有→三つ子→対角線	2369
双子→共有→対角線→三つ子	2354
双子→三つ子→共有→対角線	2285
双子→三つ子→対角線→共有	2237
双子→対角線→共有→三つ子	2302
双子→対角線→三つ子→共有	2269
共有→双子→三つ子→対角線	2197
共有→双子→対角線→三つ子	2182
共有→三つ子→双子→対角線	2196
共有→三つ子→対角線→双子	2181
共有→対角線→双子→三つ子	1916
共有→対角線→三つ子→双子	1916
三つ子→双子→共有→対角線	2237
三つ子→双子→対角線→共有	2189
三つ子→共有→双子→対角線	2320
三つ子→共有→対角線→双子	2305
三つ子→対角線→双子→共有	2180
三つ子→対角線→共有→双子	2213
対角線→双子→共有→三つ子	1980
対角線→双子→三つ子→共有	1947
対角線→共有→双子→三つ子	1766
対角線→共有→三つ子→双子	1766
対角線→三つ子→双子→共有	1906
対角線→三つ子→共有→双子	1939

きる問題を単純に加算していくと表 4 の結果が得られた．できるだけ多くの問題が完成できる順序を特定すると，

双子法→共有候補法→三つ子法→対角線法

の順となった．この順は，パズル愛好者にも納得のいく順ではないだろうか．表 5 に決定した解法のレベルを改めて示す．

4.3　解法の適用順序

解法のレベルが決定したので，次に解法の適用順について述べる．解法の適用順を決めておくことで，数独を解く際にどのレベルまでの解法を用いないと解けないかを明確にすることができる．

表 5　解法のレベル．

Table 5　Concluded order of the logics.

レベル	解法
レベル 1	CRBE 法
レベル 2	単一候補法，単一マス法
レベル 3	双子法
レベル 4	共有候補法
レベル 5	三つ子法
レベル 6	対角線法

基本的には表 5 に示した解法レベルの低いものから適用し，あるレベルの解法で完成しなければ次のレベルの解法を適用する．また，ある解法を適用したときに候補が消えたり数字が埋まったりと盤面に変化があった場合は，レベルの低い解法に戻って解析を再開する．しかし単一候補法，単一マス法が候補数字確定のために必須となる解法であることから，実際の使用順はこれより複雑になる．

図 25 に解法使用順のフローチャートを示す．図中の**「候補使用」**とは，単一候補法，単一マス法の適用である．

解析は，最初に CRBE 法を実行する．CRBE 法だけで盤面が完成しなければ，ペンシルマークを書き込む．そして，単一候補法，単一マス法を適用してペンシルマークを確定する作業を行う．

単一候補法，単一マス法で盤面が完成しなければ双子法以降を実行する．ここからは少し厄介である．双子法以降では，候補を絞り込んだあとは単一候補法，単一マス法を実行して，数字が確定するかを調べる．このとき，候補の数字が消えたり，新しく数字が確定するなど，候補を含め盤面に変化があった場合は再び双子法に戻って解析を開始する．CRBE 法まで遡らない

のは，単一マス法が CRBE 法の代わりとして使用できるからである．また候補を書き込んだ場合，CRBE 法で探索するよりも書き込まれた候補から数字が埋まるかどうかを調べるほうが効率的であることも理由の一つである．なお，双子法実行後のみ盤面に変化があっても，再び双子法を実行しても意味がないため，盤面が完成するとき以外は次の共有候補法を実行する．

以上で代表的な 7 つの解法を紹介し，その順序付けを行ったが，実はこれらの 7 つの解法ですべての問題が完成できるわけではないこともすでに分かっている．ここで述べた以上に複雑な解法ロジックも存在する．また，問題によっては,『答えが 1 つに決まるためには，このマスにはこの数字が入らなければならない』というようなパズル成立のための条件を汲んだような候補数字の確定が必要になる場合もあるし，機械的に『総当たり戦』でしか解が見つけられないような場合もある．これらのロジックを含めることは将来の課題として，ここでは上述した 7 つの解法で数独パズルに挑むことにしよう．

5　難易度の数値化

5.1　難しさの要素

前章までで，数独の代表的な 7 つの解法について，汎用性からみた優先順位を特定することができた．どの解法までを用いるか，という視点に立てば，数独の各問題について 7 つのレベルに分類することができることになる．ただし，一番基本的な CRBE 法だけで 4 割強の問題が完成してしまうことから，我々は 7 つのレベル分けでは満足せず，より細かな数値化を考えてゆくことにする．

そもそも数独を解くパズラーが感じる難しさとは何だろうか．我々は

- 完成させるまでのステップ（探索回数や判定回数）が多いこと
- 完成させるまでに必要とされる解法ロジッ

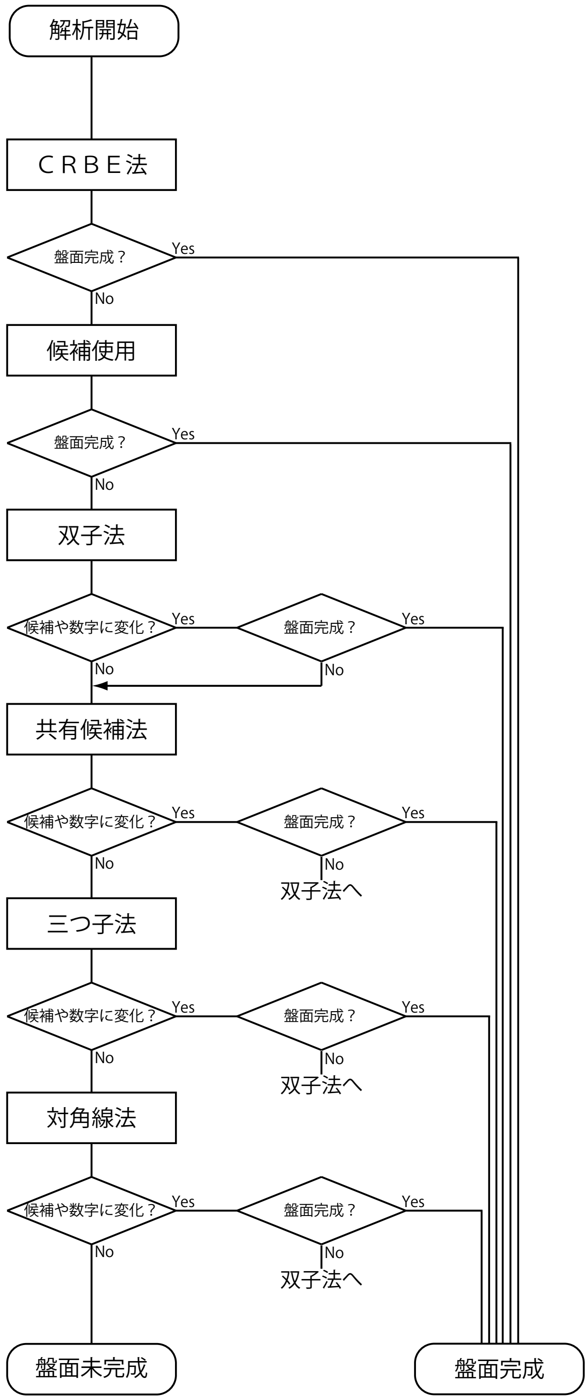

図 25　解法使用順のフローチャート．
Fig.25　Flowchart of the solver using the concluded order of the logics.

クのレベルが高いこと

の 2 点と考えた．これらは，空白マスの数やペンシルマークの数のような，初期の盤面だけから計算できる量ではない．実際に数独の問題を人間の思考に準じて解くプログラムを作成し，その「実行時間」や「実行ルーチン」を総合して算出できる量である．

ある程度人間の探索方法に似せたプログラムを組む必要があるのは当然だが，単純にプログラムの実行時間を実測するのであれば，プログラムの質に左右されやすいし，計算機環境にも依存する．実際には人間が行わないような機械的なループ処理や変数の初期化なども含まれてしまう．そこで，「実行時間」を評価する手段として，各解法ロジックごとに数字を確定するまでの処理数をなんらかの基準で設け，カウントしてゆく方法をとることにする．

レベル 2 以降では，候補数字（ペンシルマーク）を絞り込む作業になるが，ここで「確定した数字の個数に着目するのか，それとも消すことができた候補数字の個数に着目するのか」という疑問が生じる．前者ではパズル完成時には初期盤面の空きマス数と等しくなる．問題を解く側に立てば，候補数字を消してゆくステップが難易度に関連すると考えられるので，後者に着目することにする．

しかし後者の場合には，

- 消すことができた候補数字の個数が少ない場合は難易度を高く，多い場合には難易度を低く設定する

工夫も必要であろう．これは一見矛盾するように思えるが，候補数字が一度にたくさん消える場合よりは，『たくさん探してようやく候補を消すことが出来た』という場合に難しかったと考えるほうが自然だからである．そこで，我々は行／列／ブロックごとに数字を「探索する回数」をカウントし，その加算値を測ることにする．探索回数に着目することで，「完成しなかった問題にどう対応するのか」という問題も解決できる．最終的に問題が完成するか，あるいは 7 つの解法ロジックで解けないと判定された時点でのカウントの総和を用いれば，「難しいほど大きい数字」となる指標が定義できるはずだ．

5.2　難易度スコアの提案

我々は，7 つの解法ロジックを図 25 のフローチャートに応じて適用するプログラムを用い，次の手順で難易度を算出することにした．

- レベル 1 の CRBE 法では，探索する数字を選ぶごとに 1 カウントとする．
- 候補数字（ペンシルマーク）を見つける作業は，数字 1 つごとにカウントする．
- レベル 2 以降の各解法では，行／列／ブロックごとに探索する回数をカウントする．
- 各解法の探索は，無駄のないよう途中で打ち切る条件を設ける．

そして，最終的に問題が完成するか，7 つの解法ロジックで解けないと判定された時点でのカウント総和を各問題の難易度とみなし，その問題の**スコア**（*D*-スコア，difficulty level の頭文字として）と呼ぶことにする．

以下では，それぞれの解法ごとに，どのように処理数をカウントしていくかを説明する．

5.3　処理数カウント方法の詳細

■CRBE 法でのカウント

① CRBE 法では，探索数字の選定を 1 つの処理とみなし，カウントしていくことにする．こうすれば，どのような方法でプログラミングを行ってもカウントは一意に決まる．

§3.2.2 で説明したような探索する数字の選び方を用いたとすれば，具体的には，たとえば

1 が埋まる場所を探す
→ 7 が埋まる場所を探す
→ 4 が埋まる場所を探す→

というような探索を行うが，この回数をそのままカウントとして利用する．上記の場合は探索を行う前をカウント「0」とすると，カウント「3」まで経過したことになる．このようにすることで，一度にたくさんの数字が埋まるような問題の場合はスコアが低くなり，何度も巡回してようやく数字が埋まるような問題の場合はスコアが高くなるように設定できる．

■候補数字（ペンシルマーク）書き込みのカウント

CRBE 法で解けなかった場合，②単一候補法・③単一マス法以降の解法では，候補数字（ペンシルマーク）を絞り込む操作を行うことになる．候補は空きマスに対して書きこむものであるため，空きマスに候補を書きこむ度にカウント「1」を数える．

■初回候補使用 (単一候補法・単一マス法) のカウント

すべての空きマスに対して候補数字（ペンシルマーク）を書き込んだあと，それぞれの空きマスについて数字が確定するかどうかを調べる．数字を埋める時点では，これ以降の解法との兼ね合いのため，カウントしない．よって初回候補使用でのカウント数は，空きマス数と等しくなる．

■双子法でのカウント

④双子法は行，列，ブロックについて探索を行う．そこで各行，各列，各ブロックの探索でそれぞれカウントを「1」増やす．合計すると $9+9+9=27$ となる．双子法には独立双子法，居候双子法があったが，それぞれで行，列，ブロックの探索を行うため，双子法では合計「54」だけカウントが進む．

これ以降の解法にも言えることだが，このカウントの「54」は最小単位であり，候補を消すことによって数字が確定した場合はさらに候補を消すことができる可能性があるため，カウント数はこれより増える．これについては 5.4 節で説明する．

■共有候補法でのカウント

⑤共有候補法はブロックから行／列の候補を消去する場合と，行／列からブロックの候補を消去する場合の 4 パターンがある．前者は，あるブロックの中の候補が特定の行で揃っていれば行の候補の消去，特定の列で揃っていれば列の候補の消去ができる．行か列かは，候補が縦に並んでいるか横に並んでいるかの違いだけなので一度に確認することができる．したがってブロックから行, 列の候補を消去する場合はブロック中の候補を 1 つチェックするごとにカウントを「+1」とする．

一方，後者の場合は，行からブロック，列からブロックと，独立して行わなければならない．したがって各行で候補を 1 種類探索するごとにカウントを「+1」，各列で候補 1 種類探索するごとにもカウントを「+1」とする．

以上より共有候補法では少なくとも $(9\times9)+(9\times9\times2)=243$ だけカウントが進む．

■三つ子法でのカウント

⑥三つ子法は双子法同様，行／列／ブロックについて探索を行うので，各行／各列／各ブロックの探索でカウントを「1」増やす．三つ子法にも独立三つ子法，居候三つ子法があるため，三つ子法全体では少なくとも 54 だけカウントが進む．

■対角線法でのカウント

⑦対角線法は行から列をみる方法と，列から行をみる方法とがある．また行や列はそれぞれ 2 つを選ばなければならない．たとえば行を 2 本選ぶ場合は ${}_9\mathrm{C}_2=36$ 通りの選び方がある．それぞれについて，更に候補が 9 種類あるため，行から列を見る方法では $36\times9=324$ カウントが増える．列から行を見る場合も同様に 324 カウントかかるので，対角線法全体では少なくとも 648 カウントが進む．

5.4 探索の打ち切り方

解法レベルが双子法以降のものは基本的に 1 行目から 9 行目，1 列目から 9 列目というように順に探索を行う．

たとえば行だけの探索を考えた場合，行すべての探索を終えればカウントは「9」増えたことになるが，この探索によって数字が新たに確定した場合は，更に候補が消える可能性があるため，追加して行探索を続ける必要がある．列／ブロックについても同様である．

たとえば 4 行目の探索後に数字が新しく確定したとしよう．この場合，続けて探索を行い 9 行目まで探索をしたあと，再び 1 行目に戻り 3 行目まで探索を続ける．同じく 4 行目までに戻る間，一度も数字が新しく確定しないならば，これ以上探索する必要はない．したがって，最後に数字が確定してから 9 回（打ち切りカウント =9）で同種の探索を打ち切ればよい．

実際の解法では，たとえば双子法の場合，独立双子法の行／列／ブロック，居候双子法の行／列／ブロックの順で探索を行うので，打ち切りカウントは 54 となる．独立双子法の 3 列目で新しく数字が確定した場合，それ以降一度も数字が確定しなかった場合は，カウント「+54」後の独立双子法の 2 列目の探索で打ち切られることになる．

このように工夫することで無駄のない効率的な探索ができ，そのときの実行処理数を正確にカウントすることができる．

6 難易度スコアの特徴

この章では表 2 に挙げた 1639 問の問題について難易度スコア D の結果を示す．またスコアを空きマス数や数独エントロピー，予想タイムなどとも比較する．

6.1 解法ロジックとスコアの相関

まず，完成するまでに必要となった解法レベルとスコアの相関を表 6 に示す．

表 6 完成するまでに必要となった解法レベルとスコア D.
Table 6 D-score and the required levels of the logics.

解法レベル	完成問題数	D 平均値	標準偏差
①CRBE 法のみ	717	25.89	14.19
候補使用まで	200	72.49	9.83
④双子法まで	456	101.86	25.20
⑤共有候補法まで	142	329.53	187.58
⑥三つ子法まで	47	816.91	247.87
⑦対角線法まで	29	1306.21	620.59
未完成	48	1754.19	645.26
全数	1639	175.22	382.30

スコア D の値は，当然ながら解法レベル順に大きくなる．平均値の推移を見ると，たとえば，「双子法まで必要な問題は，CRBE 法だけで解ける問題の 4 倍難しい」などのように，具体的に数値表現が可能になったと考えられる．また未完成の 48 問についても D 平均値が 1754.19 と一番高くなっているので，他の問題のスコアと比較して，『スコアが高い，難しすぎて解けないかもしれない』というイメージを与えることができる．

ただし，D の増大とともに，標準偏差も大きくなるのも事実である．対角線法を使うレベルの問題は D のばらつきが非常に大きい．今回の調査では，このレベルまで必要とする問題数が少ないことも一因であるが，実際にこのレベルの問題を解く場合，「この 1 つのロジックに気づいたおかげでいきなりすべて解決した」というケースにも遭遇することも多く，その事実を反映しているとも考えられる．

6.2 空きマス数とスコアの関係

次に，2 章で示した空きマス数とスコア D の関係を調べる．

空きマス数と解法レベルの相関を調べると，空

きマス数が 47 以下のものは CRBE 法で解け，48 以上のものは，その他の解法がさまざまに必要となってくることがわかった．また，CRBE 法で解ける問題の空きマス数は，およそ 40～60 に広く分布しており，空きマス数が多い場合には，空きマス数と解法レベルには相関がみられない．この事実は，スコア D を用いるとより明確になる．図 26 に空きマス数とスコア D の関係を示す．

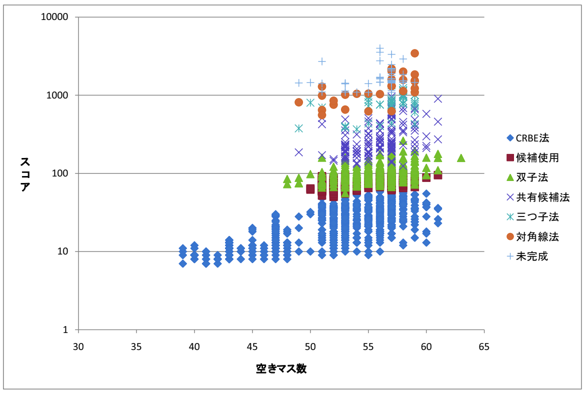

図 26　空きマス数とスコア D の関係．
Fig. 26　D-score and the numbers of initial blank-cells.

たとえば同じ空きマス数の問題でも，対角線法まで用いないと解けない問題と双子法までで解ける問題を比較した場合，スコア D を用いるとその数値に明確に差が出る．そのため，空きマス数から難易度を判定するよりも細かく正確に難易度を判定できるようになった．

6.3　数独エントロピーとスコアの関係

同じく，2 章で紹介した数独エントロピー H_G とスコア D の関係を図 27 に示す．分布は，図 26 と似た形となっている．すなわち，数独エントロピー $H_G < 0.6$ の問題は CRBE 法を用いて解けるが，$H_G > 0.6$ の問題では，その他の解法がさまざまに必要となる．また，また，CRBE 法で解ける問題の H_G は，広く分布しており，H_G が大きい場合には，H_G と解法レベルには相関がみられない．スコア D を用いた図 26 で

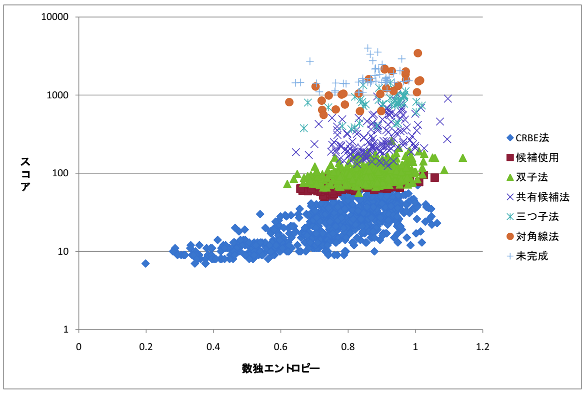

図 27　数独エントロピーとスコア D の関係．
Fig.　27　D-Score and $SUDOKU$ entropy H_G.

は，この事実が容易に理解できる．

図 26 と図 27 のどちらも右下の箇所に該当問題が多数ある．すなわち，空きマス数が大きくても H_G が大きくてもスコア D が小さい問題が多く存在する．これは見かけは難しくても実際に解くと優しい「見かけ倒し問題」が多いことを示している．

6.4　予想タイムとスコアの関係

最後に，数独の雑誌や書籍に記載されている完成予想タイムとスコア D を比較してみる．完成予想タイムとは，各雑誌・書籍が独自に記載している完成時間の目安や目標タイムである．算出根拠はどの雑誌でも不明で，パズル作者の経験に基づいていると考えられる．

図 28 に完成予想タイムとスコアの関係を示す．対象とした 1639 問のうち，完成予想タイムの記載がある文献[6),8)–11)] の 1222 問 に対して相関を見た．

我々のスコア D は，パズルを解く側の処理数をもとに算出しているので，完成予想タイムとスコアにはある程度の相関が見られると予想されたが，実際に相関係数 r を計算すると $r = 0.55$ であった．CRBE 法で解ける問題の予想タイムは最大で 60 分であったが，それ以上のレベルの問題は，さまざまな予想タイムで表示されてい

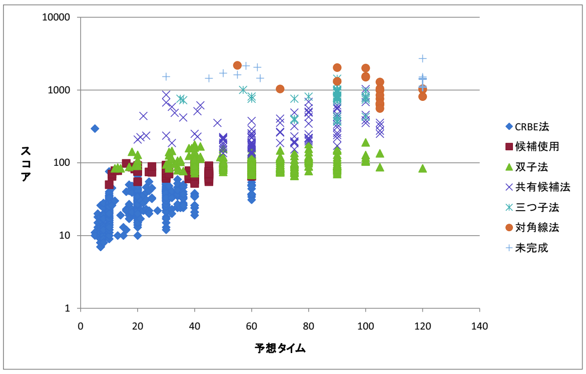

図 28　予想タイムとスコア D の関係.
Fig. 28 D-Score and expected solving time by puzzle writers.

た．スコア D の値を使うとこの事実が明確にわかる．したがって，雑誌や書籍に記載されている予想タイムは，レベルの高い問題に関しては「あてにできない」と結論できる．

7　まとめ

本稿では，数独の難易度を解法から判定し数値化する我々の試みを紹介した．

これまでに試みられている数値化の方法としては，問題の空きマス数や，空きマスに入る候補数字の数を用いた数独エントロピーがあったが，これらはどちらも初期盤面のみの情報でしかない．そこで，我々は，実際に解く場合の処理数をカウントする数値化を考案した．

まず，解法に用いられる代表的な 7 つのロジックについて，その使用順を確定した．そして，その順にしたがって，考察処理数を数値化するスコア D を定義した．この方法により，問題を解くプロセスで現実に感じる難易度を表現できると考えている．

実際に約 1600 問の問題に対して統計を取ると，問題の空きマス数や数独エントロピーによる判定は，レベルの高い問題に対しては必ずしも難易度を示さないことがわかった．スコア D の計算により，空きマス数や数独エントロピー判定以上に，正確な難易度を知ることができるようになったと考えられる．パズルを解く人にとっても，パズルの作者にとっても励みとなる指標にご利用いただければ嬉しく思う．

今回用いた代表的な 7 つのロジックだけでは，全体の 3% ほどの問題は未完成となる．今後は，もっと複雑なロジックや問題整合性の視点を含めた改良も必要と考えている．また，今後は，数独問題自身の幾何学的な配列や対称性・美しさなども指標として取り入れ，「見て美しい，解いて難しい」数独を判定することも面白いかもしれない．

最後に，土出の卒論完成時にさまざまな有益なコメントをくださった株式会社タイムインターメディアの早川友康さんに感謝いたします．

付録 A　解法ロジックの呼び名

本稿で名付けた数独の解法ロジックは，必ずしも一般的なものではない．いくつか入手した名称を比較のため表 7 にまとめた．

表 7　解法ロジックの呼び名の比較
Table 7 List of names of solving logics of *SUDOKU*.

本稿での名称	他の呼び名
① CRBE 法	Elimination 法[3]，ブロッケン，レッツミー[4]
② 単一候補法	CRME 法[3]，マスミ[4]，推論規則 1[14]
③ 単一マス法	Lone Rangers 法[3]，推論規則 2[14]
④ 双子法	Twins[3]，予約[4]，推論規則 4,5[14]
⑤ 共有候補法	いずれにしても理論[4]，推論規則 3[14]
⑥ 三つ子法	Triplets[3]，予約[4]，推論規則 4,5[14]
⑦ 対角線法	井桁理論[4]

参考文献

[1] B. Felgenhauer & F. Jarvis, URL: `http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/sudoku/`

[2] Z. Chen，arXiv:0903.1659 (2009)

[3] W-M. Lee，*Programming Sudoku*, Apress (2006)

[4] 数独通信 11 年春号 Vol.20, ニコリ (2011)

[5] 超難問ナンプレ& 頭脳全開数理パズル 9.10 月号，学研パブリッシング (2010)

[6] ナンプレファン 10 月号, 世界文化社 (2010)

[7] ナンプレメイト 10 月号，マガジン・マガジン (2010)

[8] 世界基準ナンプレ 300 Vol.1，笠倉出版社 (2010)

[9] 世界基準ナンプレ 300 Vol.2，笠倉出版社 (2010)

[10] 最高段位認定 難問ナンプレ 220 題 vol.2, 白夜書房 (2010)

[11] 実力検定 難問ナンプレ 250 問 vol.3，コスミック出版 (2010)

[12] 西尾徹也，西尾徹也の世界で一番美しくて難しいナンプレ 2，世界文化社 (2010)

[13] 鍛冶真起，数独の父 鍛冶真起が教える難問数独，ニコリ (2010)

[14] 松原康夫，数独の推論規則と難易度に関する考察, 情報処理学会研究報告, 134, pp.1-6 (2006)