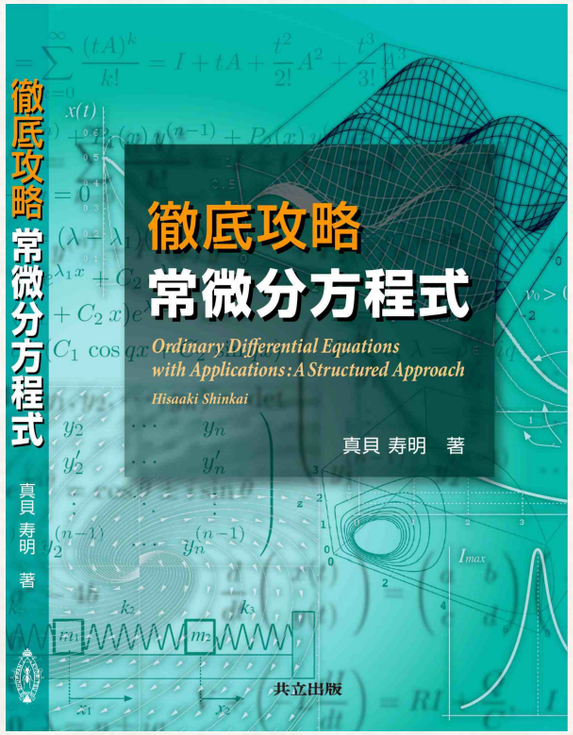
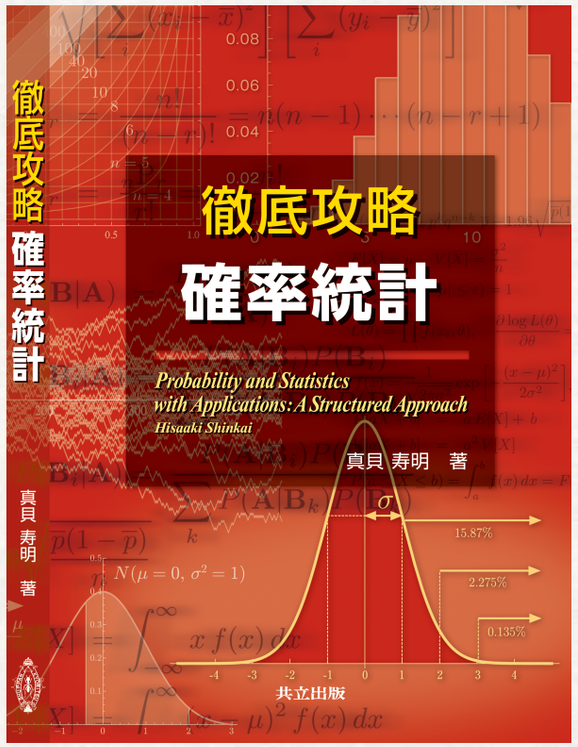
私が教科書執筆で心がけたこと

事例1：大阪工業大学（数学）
事例2：武庫川女子大学（物理・宇宙物理）
事例3：西宮市生涯教育（物理）

大阪工大 情報科学部
真貝寿明
www.oit.ac.jp/is/~shinkai/





自己紹介

大阪工大 情報科学部
真貝寿明
www.oit.ac.jp/is/~shinkai/

専門：一般相対性理論
（ブラックホール，ワームホール，高次元時空，
インフレーション宇宙，重力波，数値解析方法論）

1995　早稲田大，学位取る
早稲田(助手)，Washington U. (PD), Penn State U. (海外学振),
理研(基礎特研)，稲盛財団

2006　大阪工大

大阪工業大

私立大，偏差値50前後

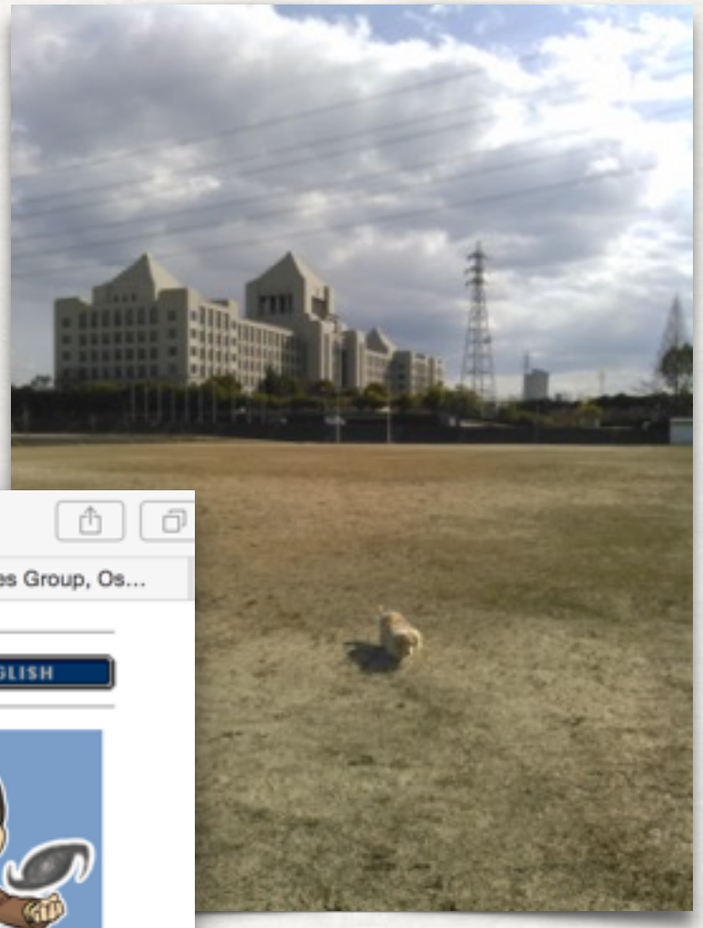
工学部・情報科学部・知的財産学部・

　＋ロボティクス&デザイン工学部(2017設置予定)

学生数　total 7000，2キャンパス（+1キャンパス，2017）

大阪工業大情報科学部

4学科（100人x4）



最近よく耳にする教育用語

「アクティブ・ラーニング」

座学で終わらせない．手を動かして学ばせよう．議論させよう．

「反転授業」

しっかり予習させて，授業ではその確認を主としよう．

「ICT教育」 Information and Communication Technology

オンライン教育と対面教育を融合させよう．

「教師+コーディネーター+ファシリテーター」

授業を上手く仕切るスキルを身につけよ．

教科書の役割？？

事例1：大阪工業大学（数学）

私の担当授業

「微積分学I」　（1年生前期）3クラス　約200名

「微分方程式」（1年生後期）2クラス　約120名

「確率統計」　（3年生前期）2クラス　約180名

「情報ゼミナール」「卒業研究」「情報科学特論」．．．

多様な入試形態で，入学時の学力がバラバラ

公募制推薦入試（○○方式，○○方式），指定校推薦，AO入試

一般入試（前期○日程，後期），センター試験（○○型，○○型）

ノートを取り慣れていない

そもそも勉強することに慣れていない，壁を感じている，

先の展望が見えないので「勉強はつらいもの」と思う

事例1：大阪工業大学（数学）

私の担当授業

「微積分学I」　（1年生前期）3クラス　約200名

「微分方程式」（1年生後期）2クラス　約120名

「確率統計」　（3年生前期）2クラス　約180名

「情報ゼミナール」「卒業研究」「情報科学特論」．．．

多様な入試形態で，入学時の学力がバラバラ

公募制推薦入試（○○方式，○○方式），指定校推薦，

一般入試（前期○日程，後期），センター試験（○○型

ノートを取り慣れていない

そもそも勉強することに慣れていない，壁を感じている，

先の展望が見えないので「勉強はつらいもの」と思う

事例1：大阪工業大学（数学）

多様な入試形態で，入学時の学力がバラバラ

→ 高校の内容を含んだ教材が必要
ついていけない学生を早期に選別してリメディアル教育へ誘導

ノートを取り慣れていない

→ 「中間テストは手書きノート参照可」

そもそも勉強することに慣れていない，壁を感じている，先の展望が見えないので「勉強はつらいもの」と思う

→ 「いま習ったことが，どこで役に立つのか」

→ 「内容のレベルを明記，飛ばして良いところを明記，」

事例1：大阪工業大学・情報科学部（数学）

4月　新入生テスト・クラス分け・イエローカード発行

「微積分学I」

1年次前期

微積分学I
定期試験
単位認定

不合格の場合

1年次後期

微積分学I （再履修）
定期試験
単位認定

「基礎力向上講座」

4月のテスト結果等により，「受講推奨カード」が発行されます

基礎力向上講座 （月，微積分演習）	基礎力向上講座 （木，数学基礎）
修了証発行	修了証発行

前期の成績により，「受講推奨カード」が発行されます

後期の月曜木曜は同じ内容です.

基礎力向上講座 （月，微積分演習）	基礎力向上講座 （木，微積分演習）
修了証発行	修了証発行

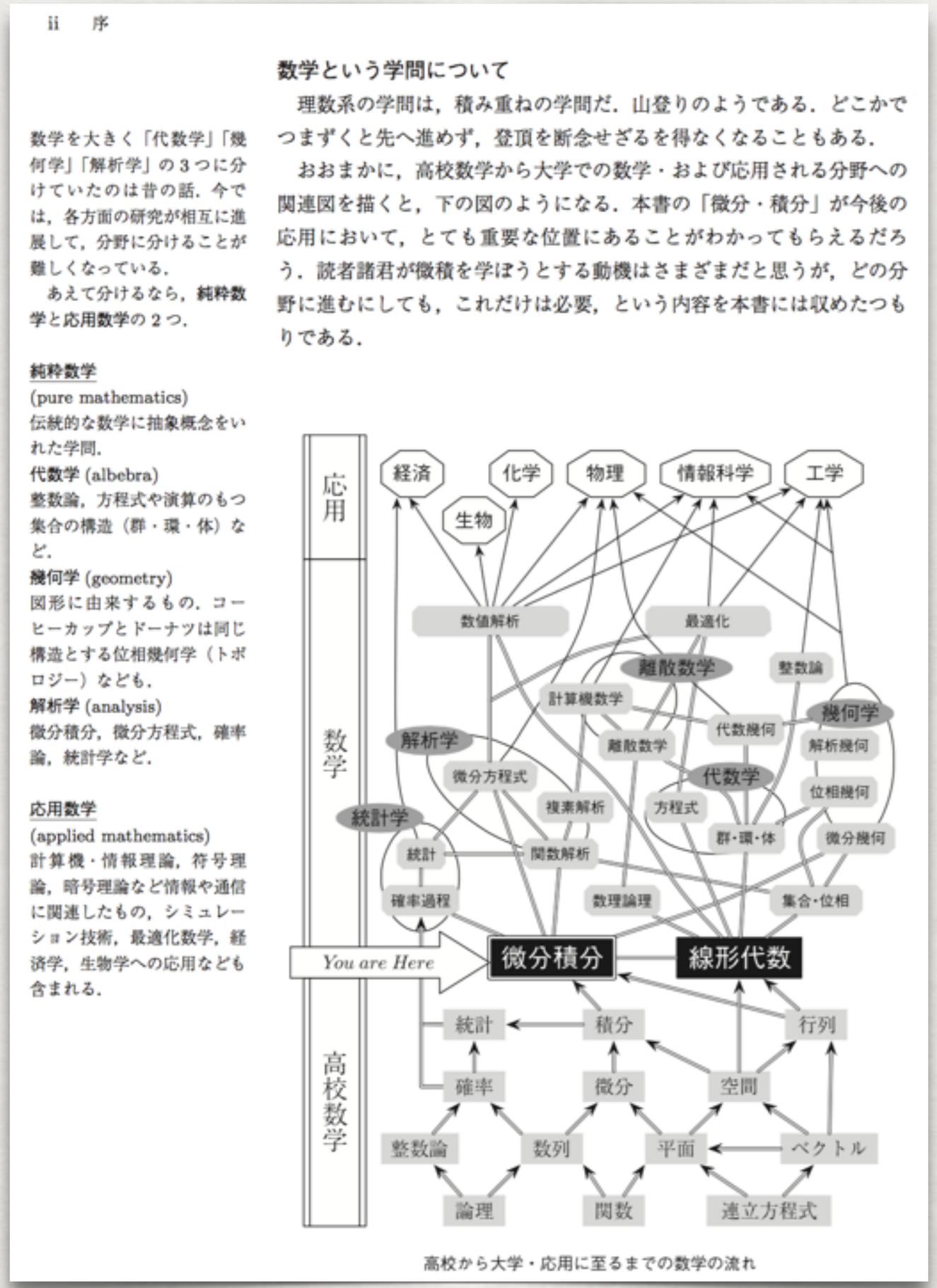
再履修クラスの単位認定には，基礎力向上講座の修了証が1枚以上必要.

2年次以降に再履修の場合も，同様です.

とにかく，見通しが良い教科書を書く

「いま説明したことが，どこでどう使われるのか」

全体構成図を描く



ii　序

数学を大きく「代数学」「幾何学」「解析学」の３つに分けていたのは昔の話．今では，各方面の研究が相互に進展して，分野に分けることが難しくなっている．

あえて分けるなら，**純粋数学**と**応用数学**の２つ．

純粋数学
(pure mathematics)
伝統的な数学に抽象概念をいれた学問．
代数学 (albebra)
整数論，方程式や演算のもつ集合の構造（群・環・体）など．
幾何学 (geometry)
図形に由来するもの．コーヒーカップとドーナツは同じ構造とする位相幾何学（トポロジー）なども．
解析学 (analysis)
微分積分，微分方程式，確率論，統計学など．

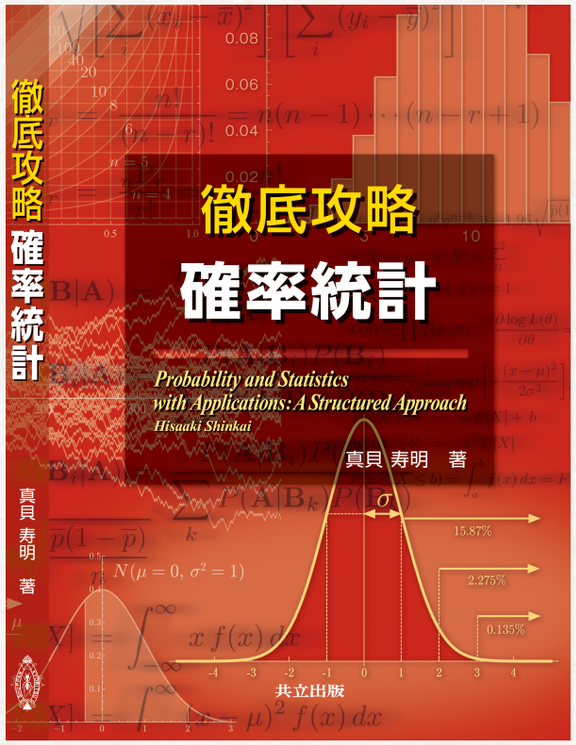
応用数学
(applied mathematics)
計算機・情報理論，符号理論，暗号理論など情報や通信に関連したもの，シミュレーション技術，最適化数学，経済学，生物学への応用なども含まれる．

数学という学問について

理数系の学問は，積み重ねの学問だ．山登りのようである．どこかでつまずくと先へ進めず，登頂を断念せざるを得なくなることもある．

おおまかに，高校数学から大学での数学・および応用される分野への関連図を描くと，下の図のようになる．本書の「微分・積分」が今後の応用において，とても重要な位置にあることがわかってもらえるだろう．読者諸君が微積を学ぼうとする動機はさまざまだと思うが，どの分野に進むにしても，これだけは必要，という内容を本書には収めたつもりである．

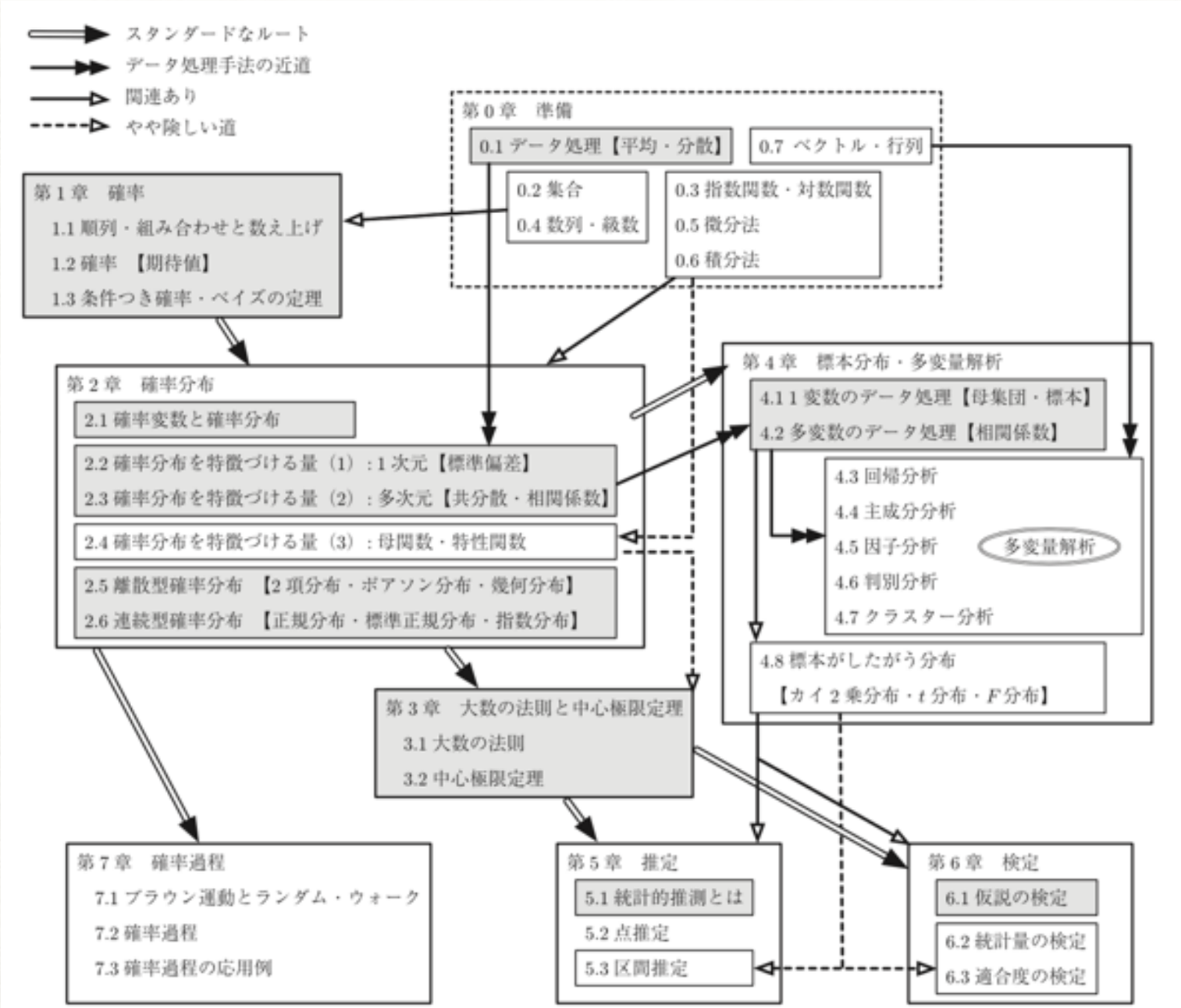
高校から大学・応用に至るまでの数学の流れ



とにかく，見通しが良い教科書を書く

「いま説明したことが，どこでどう使われるのか」

全体構成図を描く



本書の各章の関連図
（アミ掛けした項目は確率・統計のメインルート）

「つまずいたら，ここへ戻れ」

高校の復習事項を含む

「第0章：準備」

指数関数の説明にムーアの法則

対数関数の説明に計算尺

対数グラフ

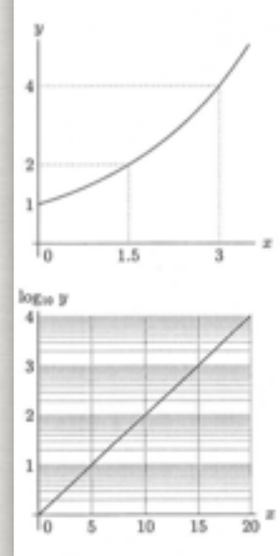
対数は桁が大きく広がっていくデータを扱うときに威力を発揮する．あるデータが，x を変数として，$y = a^x$ のように変化しているとき，単純に (x, y) 座標でグラフを描くと，y の範囲が広すぎて有用なデータがグラフから読み取れないことが起こり得る．そのようなときは，対数をとるとよい．例えば，常用対数をとって $\log_{10} y = (\log_{10} a)x$ とすると，$(x, \log_{10} y)$ を座標とするグラフは，傾き $\log_{10} a$ の直線になる．

このような用途に応じて，「片対数グラフ」「両対数グラフ」がある．

対数グラフ用紙は文房具屋で販売されているが，表計算ソフトで簡単に描くことができる．

例題 0.4
コンピュータの処理能力は，1.5 年で 2 倍になるという Moore（ムーア）の経験則がある．この法則が永久に続くとすると，10 年後，20 年後にはおよそどのくらいの能力になるか，横軸を年数とするグラフで示せ．また，あるときから 1000 倍の能力になるまでに何年かかるか．$\log_{10} 2 = 0.3010$ を用いてよい．

G. Moore は Intel 社の設立者の一人．



$y = 2^{x/1.5}$ のグラフを描けばよい．縦軸を線形に描いたグラフ（上）と縦軸を対数で描いたグラフ（下）を示す．線形のグラフでは縦軸の値がすぐに大きくなるので 20 年後まではとても正確に表すことができない．対数グラフで描くと，x 軸の広い範囲で関係を描くことができ，指数関数的な関係が直線になることから，x–y の関係が明確になる．10 年後は約 10^2 倍，20 年後は約 10^4 倍であることがわかる．

1000 倍になるまでに，x 回の周期が繰り返されるとすると，$2^x = 1000$ が成り立ち，両辺の常用対数をとって，$x \log_{10} 2 = 3$ より，$x = 3/\log_{10} 2 = 9.966$．したがって，$1.5 \times 9.966 = 14.95$ 年．

問題 0.5　厚さ 1 mm の紙を n 回折り曲げると，2^n mm の厚さになる．以下では紙が何回でも折り曲げられるとしよう．

(1) 10 回折り曲げたときは約何 m の厚さか．
(2) 20 回折り曲げたときは約何 km の厚さか．
(3) 地球と太陽の距離（約 1 億 5000 万 km）に達するのは，何回目に折り曲げたときか．

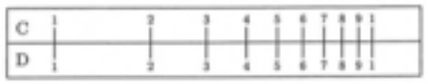
必要ならば，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ を使ってよい．

コラム 1

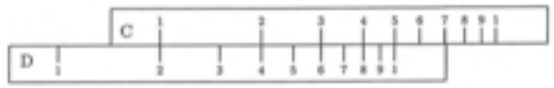
計算尺

電卓が登場する 70 年代まで，科学者は計算尺と呼ばれる計算器具を重宝していた．目盛りのついた 2 つのモノサシをずらしていくだけで，いろいろな計算ができる道具で，用途に応じていろいろなヴァージョンがあった．ここではその仕組みの 1 つを紹介しよう．

計算尺で，$2 \times 3 = 6$ という乗算を行うときを説明しよう．計算尺で，C 尺・D 尺と呼ばれている目盛りの尺に注目する．この 2 つのモノサシは左右に移動することができる．



2×3 の計算のときには，C 尺の 1 を，D 尺の 2 に合わせる．



そうすると，C 尺の 3 に対応する D 尺の値は 6 である．この値が 2×3 の答え，というわけだ．

トリックは，目盛りが対数関数で書かれていることである．対数の性質から，

$$\log_{10} AB = \log_{10} A + \log_{10} B$$

と，乗算 AB は対数目盛りでは，加算に化ける．だから，対数目盛でモノサシを作っておくと，モノサシをずらすだけで乗算の答えになる，ということなのだ．

ところで，上記の例で，2×8 の計算結果を知ろうとしても，桁があがって表示外になる「目外れ」という現象も起きる．そんなときは，今度は D 尺の 8 に C 尺の右側の 1 を合わせ，C 尺の 2 に対応する D 尺の目盛り 1.6 を読み取ることになる．桁があがったことを最終的に調整するのは人間の役目である．

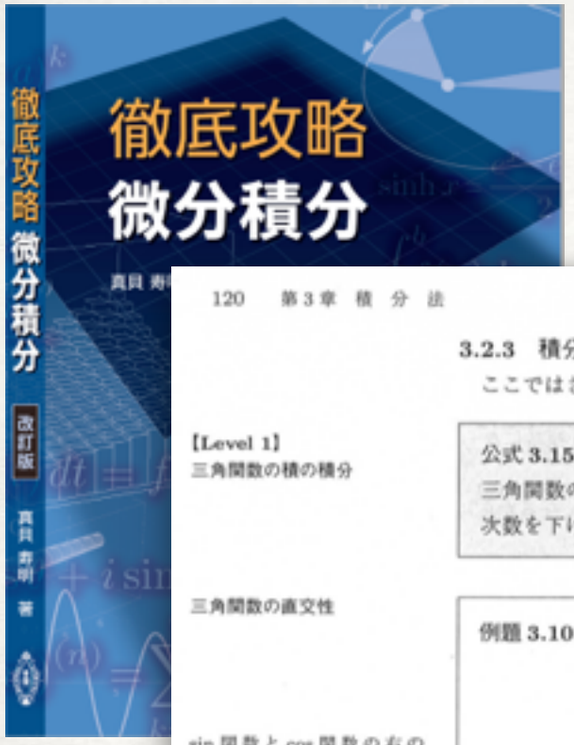
この他，計算尺には，三角関数目盛りや円周率の倍数目盛りなどの尺も準備されていて，必要に応じて組み合わせの計算もできるようになっている．また，スケールの読み取りから，計算尺の計算結果の有効数字は 3 桁程度である．これは実用上は円周率が 3.14 で十分なように，実生活では問題のない精度であった．4 桁以上が必要とされる計算は筆算や数表を用いることになっていた．

かつては学会などで，発表者の講演を聞きながら，その計算をポケットに忍ばせていた計算尺を使って確かめる人も多かったという．電卓が発売された当初の宣伝ポスターには，「技術者 150 人分の能力」というコピーに，計算尺を使う人 150 人分の絵柄が添えられたこともあった．

現在では販売する文房具店も減り，骨董品の仲間になってしまった感もある計算尺だが，計算結果に対する数的感覚を養うのには非常に教育的な道具だったとも思われ，残念な気もする．

なぜこの計算が必要になるのか

三角関数の積の積分は，フーリエ級数解析へ



3.2.3　積分の計算方法（2）進んだテクニック

ここではさらに進んだテクニックを紹介しよう．

【Level 1】
三角関数の積の積分

公式 3.15（三角関数の積の積分）
三角関数の積の式を積分する場合，和や差に変形する公式を用いて次数を下げるなどの工夫を行う．

三角関数の直交性

例題 3.10　次の公式を求めよ．n, m は自然数とする．

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} \pi & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \tag{3.2.29}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} \pi & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases} \tag{3.2.30}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0 \tag{3.2.31}$$

sin 関数と cos 関数の右の関係を合わせて「直交性」と呼ぶ．これらの公式は，Fourier 級数展開という数学で中心的な役割を果たす．
⇒ コラム 11

- はじめに，次の 2 式を直接計算して示しておこう．

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = 0 \tag{3.2.32}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = \left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n}(\sin n\pi - \sin(-n\pi)) = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = \left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{n}(\cos n\pi - \cos(-n\pi)) = 0$$

- (3.2.29) は，三角関数の積を和に直す公式 (0.2.61) より，

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x) \, dx$$

これより，$m \neq n$ のときは，(3.2.32) より，この式の値は 0 となる．$m = n$ のときは，最後の項だけ残り，

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 0 \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi$$

- (3.2.30)，(3.2.31) も，それぞれ三角関数の積を和に直す公式 (0.2.60) および (0.2.58) より，同様の考察で示される．

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x) \, dx,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin(m+n)x + \sin(m-n)x) \, dx.$$

Jean Baptiste Joseph Fourier
フーリエ (1768-1830)

コラム 11

Fourier 級数展開

「周期的な関数は，すべて三角関数の和として表現することができる」これが Fourier が提案した「Fourier 級数展開 (Fourier series)」である．いわゆる「波」の現象があるとき，その波の性質を数学的に解析する手段として重宝されており，数理物理分野だけではなく，データ解析や信号処理など工学的なあらゆる分野で登場する概念である．以下に少しだけ，あらすじを紹介しよう．

簡単のため，周期が 2π の関数 $f(x)$ があるとする．Fourier の主張は，$f(x)$ が三角関数の重ね合わせ（1 次結合）として，

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{3.2.33}$$

と分解できるというものだ．ここで，$a_0, a_1, \cdots, b_1, b_2, \cdots$ は係数である．ただし，後の議論を簡単にするため，はじめの項だけ係数を 2 で割っている．

$f(x)$ を与えたとき，どのように係数を決めたらよいか．方法は簡単で，(3.2.33) に三角関数を乗じて積分し，π で割ればよい．すなわち，

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = \cdots = a_m \tag{3.2.34}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx = \cdots = b_m \tag{3.2.35}$$

となる．この式のトリックは，左のページで示した三角関数の直交性 (3.2.29)-(3.2.32) である．$m \neq n$ の項はすべて消え，$m = n$ の一致する項だけ残ることで，目的の係数だけ積分の結果残るのである．

例として，右上図のようなパルス波

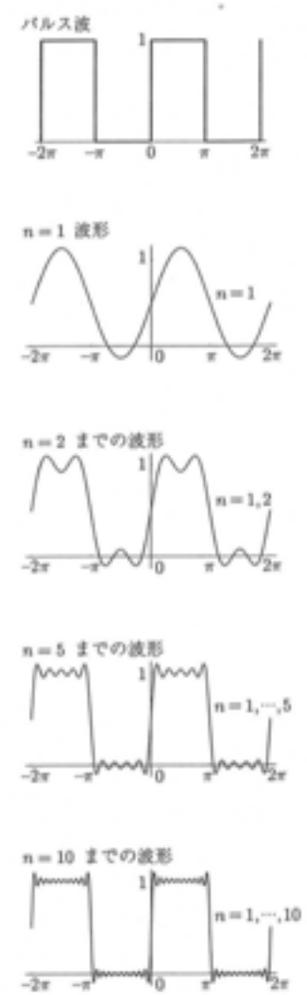
$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0) \\ 1 & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

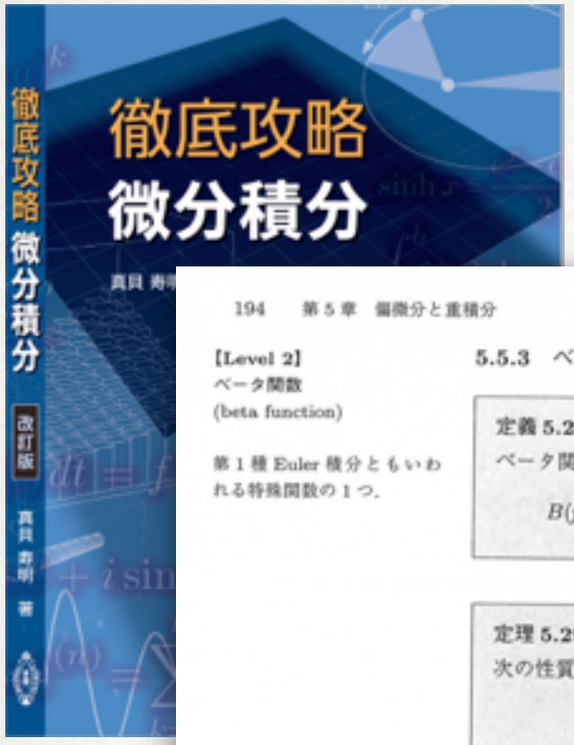
を Fourier 級数で表してみよう．上記の方法で係数を計算すると，

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

となる．$n = 1, 2, 5, 10$ までの和をグラフにしてみると，確かにもとのパルス波に近づいていくことがわかる．

Euler の式 (2.6.53) を用いると Fourier 級数展開は sin, cos をまとめて複素数で簡単に表すことができる．また，Fourier 級数展開は，三角関数を用いて関数を展開したものだが，これは Taylor 展開のベキ級数展開を発展させたものだ．さらにこの考えを発展させた，ウェーブレット展開が 1980 年代にいろいろ開発されている．





レベル表示で，個人に合わせる

レベル0からレベル3．ときには「趣味のページ」

[Level 2]
ベータ関数
(beta function)

第 1 種 Euler 積分ともいわれる特殊関数の 1 つ．

5.5.3　ベータ関数

定義 5.28（ベータ関数）
ベータ関数は，次式で定義される．

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \quad (p>0, q>0) \tag{5.5.69}$$

定理 5.29（ベータ関数の性質 (1)）
次の性質をもつ．

$$B(p,q)=B(q,p) \tag{5.5.70}$$

$$B(p,q)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\,d\theta \tag{5.5.71}$$

第 2 式は，$a,b>-1$ に対して，次のようにも書ける．

$$\int_0^{\pi/2}\sin^a\theta\cos^b\theta\,d\theta=\frac{1}{2}B\left(\frac{a+1}{2},\frac{b+1}{2}\right) \tag{5.5.72}$$

証明　(5.5.69) において，$t=1-x$ とおくと，$dt=-dx$ より，

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx=\int_1^0(1-t)^{p-1}t^{q-1}(-dt)$$
$$=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}\,dt=B(q,p)$$

これが (5.5.70) である．また，(5.5.69) において，$x=\sin^2\theta$ とおくと，$dx=2\sin\theta\cos\theta d\theta$ より，

$$B(p,q)=\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2(p-1)}(\cos\theta)^{2(q-1)}(2\sin\theta\cos\theta)d\theta$$

となる．これが (5.5.71) である．
(5.5.72) は，(5.5.71) で，$a=2p-1, b=2q-1$ とすれば明らかであろう．■

証明は省略する．

定理 5.30（ベータ関数の性質 (2)）
次の関係が導かれる．

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{5.5.73}$$

$$B(p,1-p)=\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin\pi p} \tag{5.5.74}$$

これらにより，三角関数の積の積分は，Γ 関数の値を用いて計算することができる．結果だけ示しておくと，(5.5.72) と (5.5.73) より，a,b をどちらも自然数としたとき，

$$\int_0^{\pi/2}\sin^a\theta\cos^b\theta\,d\theta=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\dfrac{(a-1)!!\,(b-1)!!}{(a+b)!!} & a,b\text{ ともに偶数}\\ \dfrac{(a-1)!!\,(b-1)!!}{(a+b)!!} & \text{少なくとも一方が奇数}\end{cases} \tag{5.5.75}$$

また，a,b どちらかをゼロにすることにより，

$$\int_0^{\pi/2}\sin^a\theta\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\cos^a\theta\,d\theta$$
$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right)}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} & (a=2n)\\ \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!} & (a=2n+1)\end{cases} \tag{5.5.76}$$

三角関数の n 乗の積分は例題 3.12 で漸化式を使って求めている．区間が $[0,\pi/2]$ であれば，この式が便利．

!! 記号の定義 ⇒ (5.5.68)

5.5.4　n 次元空間での球

[Level 3]
やや趣味の世界のページ．
(♯)n 次元といわれても想像しにくいかもしれない．

- 2 次元球とは，
  $x^2+y^2\le r^2$
  すなわち円の内部．
- 3 次元球とは，
  $x^2+y^2+z^2\le r^2$

半径 r の n 次元の球 (♯) を $\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in \boldsymbol{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^n x_i^2\le r^2\right\}$ と定義し，体積 $V_n(r)$ と表面積 $S_n(r)$ を求めよう (♭)．

体積の定義から，1 つの軸（例えば動径座標 R 軸）に沿って断面を考えると，

$$\text{体積 } V=\int \text{断面積 }(R)\,dR$$

が成り立つ．断面積は次元を 1 つ低くした立体の体積なので，一般に

$$V_n=\int_0^r S_n(R)\,dR=\int_0^r V_{n-1}(R)\,dR,\ \text{すなわち}\ S_n=V_{n-1}$$

である．また，半径 1 の球と半径 r の球とでは明らかに

$$V_n(r)=r^nV_n(1) \tag{5.5.77}$$

が成り立つ．さて，Gauss 積分 $I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx$ の n 個の積

$$I^n=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx\right\}^n=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)}\,dx_1\cdots dx_n \tag{5.5.78}$$

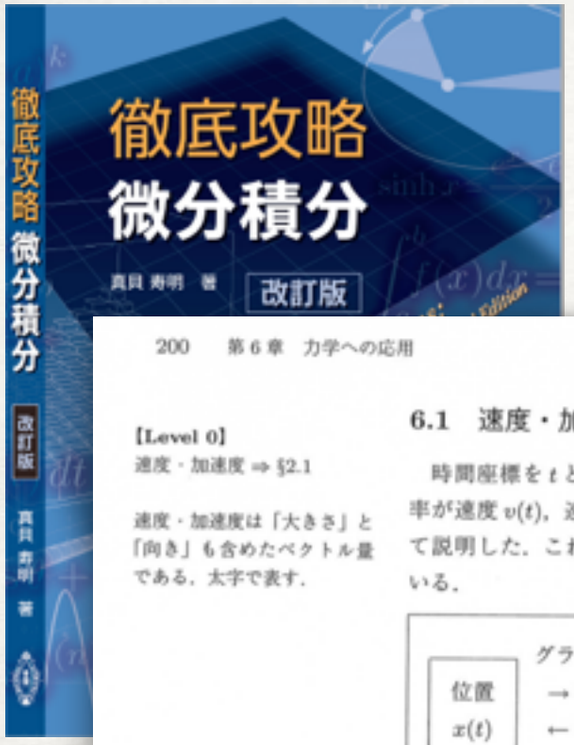
を考えよう．この積分領域は n 次元空間全体であるが，n 次元空間を「動径座標 r」と半径 r の「n − 1 次元球面」の積として考えることにより，I^n を半径 $r\sim r+\Delta r$ の薄い球殻上に限定した次の $\bar{I}^n(r)$ を使って $I^n=\int_0^{\infty}\bar{I}^n(r)dr$ と表そう．

ここでは同様に n 個の成分をもつ空間に拡張していくことを考えている．n は $n\ge 2$ の整数とする．
(♭) ここでは n 次元球の表面積を S_n としたが，n 次元球の境界は (n − 1) 次元球と考えて S_{n-1} と表記する流儀も多い．

Gauss 積分 ⇒ (5.4.57)

微積の応用例としてケプラーの3法則

「趣味のページ」→「ゼミのページ」



【Level 0】
速度・加速度 ⇒ §2.1

速度・加速度は「大きさ」と「向き」も含めたベクトル量である．太字で表す．

6.1　速度・加速度

時間座標を t として，物体の運動を考えよう．位置 $x(t)$ の時間変化率が速度 $v(t)$，速度の時間変化率が加速度 $a(t)$ であることは，§2.1 にて説明した．これらの 3 つの量は，微分・積分で次のように対応している．

位置		速度		加速度
$x(t)$	グラフの傾き → 微分 → ← 積分 ← グラフの面積	$v = \dfrac{dx}{dt}$	グラフの傾き → 微分 → ← 積分 ← グラフの面積	$a = \dfrac{dv}{dt}$

これは x 方向のみの話であるが，平面なら (x, y) の 2 成分で，空間なら (x, y, z) の 3 成分でそれぞれ位置・速度・加速度の関係が成り立つ．

次元 (dimension)

物理量には単位がある．数式を書くときは両辺の単位が必ず一致しているはずである．これを「次元が合う」という．国際単位系（SI）では，長さ x を m（メートル），時間 t を s（秒）で表す．したがって，速度 $v = \dfrac{\Delta x[\mathrm{m}]}{\Delta t[\mathrm{s}]}$ の単位は，[m/s] であり，加速度 $a = \dfrac{\Delta v[\mathrm{m/s}]}{\Delta t[\mathrm{s}]}$ の単位は，[m/s^2] となる．

6.2　近代物理の幕開け

【Level 0】

Tycho Brahe
ティコ・ブラーエ
(1546-1601)

Galileo Galilei
ガリレオ・ガリレイ
(1564-1642)

Johannes Kepler
ヨハネス・ケプラー
(1571-1630)

近代の物理学は，ルネサンス期の Tycho Brahe と Galileo Galilei による精密な天体観測から始まった．当時，キリスト教的世界観に支配されていた自然観に対して，Brahe は「超新星の発見（1572 他）」によって天動説への疑いを揺るぎないものにし，惑星や彗星の運動に関する膨大な観測データを残した．Galilei は望遠鏡の発明により「月面のクレーターの発見」や「木星の衛星の発見」などで地動説へ大きく潮流を変えることに貢献するとともに「物体の自由落下の法則」や「振り子の等時性」など基礎的な発見をした．

Brahe の弟子であった Kepler は，当時謎であった火星の運動の観測データ解析を担当した．膨大な計算の結果，Kepler がたどり着いた結論は，火星の軌道は円ではなく，太陽を焦点の 1 つとする楕円である，というものだった．この結論は，宇宙を「神の創造物」と考える社会にとって当然と考えられていた（完全な形の）「円」軌道ではなかった，という意味をもち，その後の世界観に大きな衝撃を与えるものだった．Kepler のたどり着いた 3 法則をまとめると次のようになる．

法則 6.1（Kepler の惑星の運動についての 3 法則）

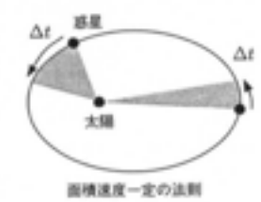
第 1 法則　楕円軌道の法則
惑星は太陽を 1 つの焦点とする楕円軌道を描く．

第 2 法則　面積速度一定の法則
太陽と惑星を結ぶ線分が単位時間に描く扇形の面積（面積速度）は，惑星それぞれについて一定である．

第 3 法則　T^2/R^3 一定の法則
惑星の公転周期 T の 2 乗と，惑星の描く楕円の長軸半径（長軸の長さの半分）R の 3 乗の比 T^2/R^3 は，惑星によらず一定である．

Kepler の惑星の運動法則
(1609, 1618)
1. 楕円軌道の法則
2. 面積速度一定の法則
3. T^2/R^3 一定の法則

面積速度



特筆すべきは，この 3 法則は観測事実をまとめたものであり，「何故こうなるのか」を説明するものではなかった，という点である．Kepler の法則に対して，運動方程式と万有引力の仮定を用い，数学的に原因を説明したのが，Newton であった．

Isaac Newton
アイザック・ニュートン
(1642-1727)

6.3　Newton の運動方程式

Newton は，1687 年に出版した「自然哲学の数学的諸原理（プリンキピア）」の中で，運動法則と万有引力の法則について述べている．

"Philosophiae Naturalis Principia Mathematica"

法則 6.2（Newton の運動法則）

第 1 法則　慣性の法則
力を加えなければ，物体は等速直線運動を行う．

第 2 法則　運動の法則（運動方程式）
物体に力 $\boldsymbol{F}$ を及ぼすと，物体の質量 m に反比例した加速度 $\boldsymbol{a}$ が生じる．

第 3 法則　作用反作用の法則
物体に力 $\boldsymbol{F}$ を及ぼすと，その物体は同じ大きさで逆向きの反作用 $-\boldsymbol{F}$ を作用物体に及ぼす．

【Level 0】
Newton の運動法則
(1687)
1. 慣性の法則
2. 運動の法則
3. 作用反作用の法則

力を入れると速度が生じると考えるのが凡人だが，Newton は加速度が生じると考えることで自然の仕組みを解明した．
力の単位は，SI 単位系で [N]（ニュートン）．
1 [N] = 1 [kg m s^{-2}]

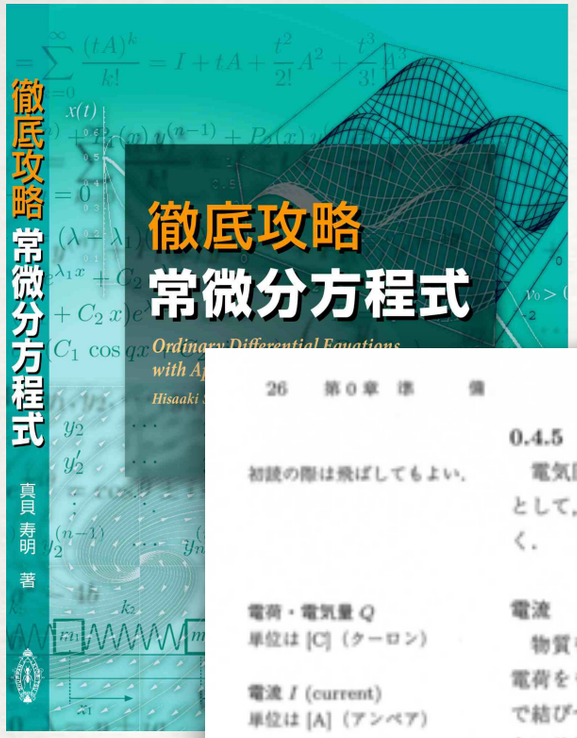
第 2 法則は式で書くと，

$$\boldsymbol{F} = m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} \tag{6.3.1}$$

となる．この式は，原因 (F) があれば，結果（加速度）が生じることを示す因果律である．

微分方程式の応用例として電気回路問題

「第0章：準備」　　見開きで理解する



初読の際は飛ばしてもよい．

0.4.5　電気回路と素子

電気回路も微分方程式で記述できることを本書で説明する．その準備として，電気回路の基本法則と回路を構成する素子についてまとめておく．

電荷・電気量 Q
単位は [C]（クーロン）

電流 I (current)
単位は [A]（アンペア）

現在では電流の正体は電子の移動ということがわかっているが，歴史的な事情があり，電流の流れる向きは，＋の電荷が移動していく方向として定義される．

電流

物質を構成する単位である原子には，－の電荷をもった電子と，＋の電荷をもった陽子が同数存在して，電気的につりあっている．共有結合で結びついている金属は，隣り合う原子間を互いの電子が自由に運動できる状態になっており，外部から電気的な力を加えると，電子は移動していく．電子の移動を**電流**という．

電荷・電気量（Q とする）の単位は，[C]（クーロン）である．電流 I の大きさは，導線の断面積を 1 秒あたりどれだけの電荷が通過するかで定義される．したがって，電流の値は，電荷の時間変化分として，微分

$$I = \frac{dQ}{dt} \qquad [\mathrm{A}] = \frac{[\mathrm{C}]}{[\mathrm{s}]} \tag{0.4.81}$$

で与えられる．電流の単位は，[A]（アンペア）である．

起電力 V
単位は [V]（ボルト）

起電力

電流を引き起こそうとする外力は，起電力（V とする）といわれる．単位は [V]（ボルト）である．乾電池など常に一定の起電力

$$V = \text{一定}$$

を提供するものを**直流電源** といい，コンセントから供給される電源は時間とともに振動する**交流電源**

$$V = V_0 \sin(2\pi f t)$$

である．f は 1 秒あたり何回振動するかを示す周波数で，単位は [Hz]（ヘルツ）である．角振動数 $\omega = 2\pi f$ を用いて表すことも多い．

直流電源

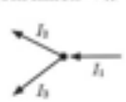
交流電源

Gustav Robert Kirchhoff
キルヒホフ (1824–87)

Kirchhoff の法則

電気回路は，1 つの起電力源の＋極からスタートし－極でゴールする閉回路で定義される．回路の途中で電流が抵抗やコンデンサ・コイルなどを通過すると，そこでエネルギーを消費し**電圧降下**が生じる．Kirchhoff の法則は，回路を流れる電流を計算する基本法則である．

Kirchhoff の第 1 法則



- Kirchhoff の第 1 法則
  複数の導線が 1 点で結ばれていても「その点に入る電流（向きを＋とする）と出ていく電流（向きを－とする）の総和は等しい」（電荷の保存則）．式で表すと

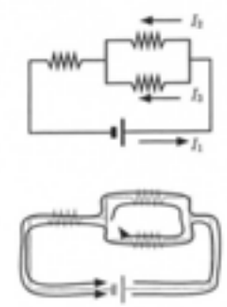
$$\sum_n I_n = 0 \tag{0.4.82}$$

- Kirchhoff の第 2 法則
  どのような閉回路をとったとしても，「閉回路を一周した電圧降下の代数的な和はゼロになる」，すなわち，

$$\sum_{\text{閉回路}} (\text{起電力}) = \sum_{\text{閉回路}} (\text{電圧降下}) \tag{0.4.83}$$

  これは，起電力を位置エネルギーとみなせば，回路一周を経た後には位置エネルギーを使い果たした，とも理解できるので，エネルギー保存則と解釈できる．

Kirchhoff の第 2 法則



上図の場合，未知数は I_1, I_2, I_3 であるが，第 1 法則より $I_1 = I_2 + I_3$ と，閉ループをどれか 2 つ考えた式を立てればよい．

複雑な回路であっても，各部分に流れる電流を定義し，未知数の数だけ上記の 2 法則を適用して立式すればよい．

基本的な 3 つの回路素子

電気回路に使われる 3 つの素子を列挙しておく．

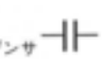
- 抵抗
  電流の流れを妨げることで熱や光を発生させる素子．電流の流れにくさを抵抗値 R で表す．両端で生じる生じる電圧降下は，$E_R = RI$ となる．

抵抗

抵抗値 R (resistance)
単位は [Ω]（オーム）

- コンデンサ（またはキャパシタ）
  電荷を一時的に蓄える素子．蓄えられ得る電気容量を C とすると，電気（電荷）量 Q だけ蓄えたときには，両端で $E_C = \dfrac{Q}{C}$ の電圧降下が生じる．コンデンサが容量一杯の電荷をもてば，両端に電流は流れなくなる．

コンデンサ



蓄電器 (capacitor)
容量 C (capacity)
単位は [F]（ファラッド）

- コイル（またはインダクタ）
  定常電流なら単なる導線だが，電流の大きさが変化すると，電磁誘導により，その変化を妨げる誘導起電力が発生する素子になる．生じる電圧降下は，$E_L = -L\dfrac{dI}{dt}$ となる．L は，コイルがもたらす電流の流れにくさで，インダクタンスと呼ばれる．マイナスがつくのは，電流の大きさの変化に対して反対向きの起電力となることを示すためである．

コイル

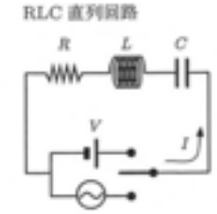
英語で inductor
インダクタンス L
(inductance)
単位は [H]（ヘンリー）

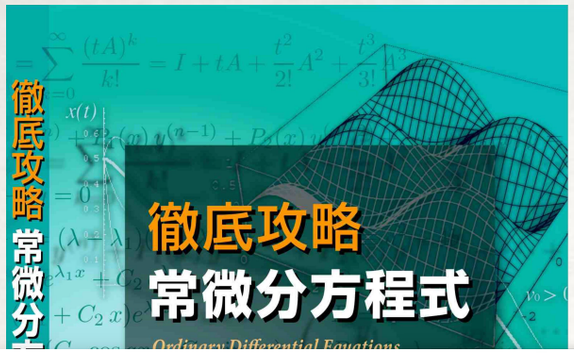
例えば，これら 3 つの素子を直列に接続した RLC 直列回路を作ったとき，Kirchhoff の第 2 法則は，起電力を $V(t)$ として，

$$V + \left(-L\frac{dI}{dt}\right) = RI + \frac{Q}{C}, \quad I = \frac{dQ}{dt} \tag{0.4.84}$$

という微分方程式として表されることになる．例題 2.19，問題 2.20，例題 3.15 で考える．この保存則に関しては例題 2.27 で考える．

RLC 直列回路





微分方程式の応用例

興味を持ってもらえる題材を並べる

コラム 5

フェルメールの贋作事件

19 世紀，絵画研究家 Thoré Bürger（トレ・ビュルガー）が Vermeer（フェルメール）の作品として認定した絵画は 70 点以上にのぼる．しかし，これらの作品の多くは，その後の研究によって別人の作であることが明らかになり，次々と作品リストから取り除かれていった．20 世紀に入ると，このような動きと逆行するように Vermeer の贋作が現れてくる．中でも最大のスキャンダルといわれるのが Han van Meegeren（ハン・ファン・メーヘレン）による一連の贋作事件である．

この事件は 1945 年ナチス・ドイツの国家元帥 Hermann W. Göring（ヘルマン・ゲーリング）の妻の居城から Vermeer の贋作『キリストと悔恨の女』が押収されたことに端を発する．売却経路の追及によって，Meegeren が逮捕された．オランダの至宝を敵国に売り渡した売国奴としてである．ところが，Meegeren はこの作品は自らが描いた贋作であると告白した．そしてさらに多数の Vermeer の贋作を世に送り出しており，その中には『エマオのキリスト』も含まれていると述べた．『エマオのキリスト』は 1938 年にロッテルダムのボイマンス美術館が購入したものであり，購入額の 54 万ギルダーはオランダ絵画としては過去最高額であった．当初 Meegeren の告白が受け入れられなかったため，彼は法廷で

コラム 6

ロケットが多段式な理由

上で得られた (2.6.49) をもう少し詳しく考えてみよう．

地球を周回軌道させるのに必要な速度（第 1 宇宙速度）V_1 は，$V_1 = 7.8$ [km/s]，地球の重力圏を脱出するのに必要な速度（第 2 宇宙速度・脱出速度）V_2 は，$V_2 = 11.2$ [km/s] である．ロケットの推進力が $V = 3$ [km/s] 程度であるとすると，

$$V_1 = 7.8 = 3\log\left(\frac{M_0}{M_F}\right) \quad \text{のとき} \quad M_0 \sim 13.5 M_F$$

$$V_2 = 11.2 = 3\log\left(\frac{M_0}{M_F}\right) \quad \text{のとき} \quad M_0 \sim 41.8 M_F$$

となり，地球を周回する人工衛星軌道に行くだけでも必要な本体質量の 13 倍もの大きなロケットを設計しないといけないことがわかる．

できるだけ効率良く最終速度を得るためには，燃料を使い果たした時点で燃料タンクや推進エンジンは分離して落下させるのが望ましい．ロケットが多段式で造られているのはこのような理由による．

2009 年 9 月，国際宇宙ステーション（ISS）への物資補給のため，日本が開発した H-IIB ロケットの第 1 号機が打ち上げられ，無事に成功を収めた．H-IIB の打ち上げ能力は，ISS 軌道へ 16.5 [t] と設計されている．H-IIB 第 1 号機の総重量は 531 [t] で，2 段式・燃料ブースターは 4 基の構造である．

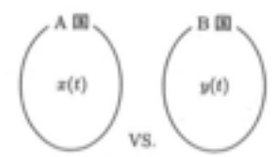
4.6 発展的応用

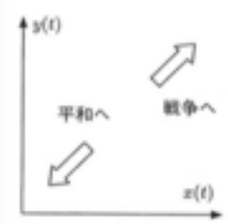
4.6.1 軍備競争モデル

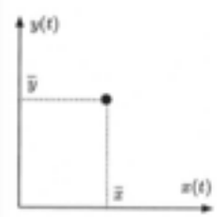
戦争と平和の条件を微分方程式でモデル化してみよう．

軍備競争モデル
（Richardson モデル）
【Level 1】

Lewis Fry Richardson
リチャードソン (1881–1953)
数学者・気象学者・心理学者．フラクタルの先駆的研究も行った．







例題 4.10 A 国と B 国の軍備規模をそれぞれ時間 t の関数として $x(t), y(t)$ とする．この量が増大すれば戦争へ，減少すれば平和になると考えて，次のように数学モデルを構築しよう．

- 両国とも相手の国が軍備規模を増大させるならば，それに対抗して自国も軍備増強を行うとする．この効果は，$a_1, a_2\ (\geq 0)$ を比例定数として，次式で表される．
$$\frac{dx}{dt} = a_1 y, \qquad \frac{dy}{dt} = a_2 x$$
- 自国の軍備規模が異常に拡大すれば，それを抑制する作用が働くだろう．この効果は，$b_1, b_2\ (\geq 0)$ を比例定数として，
$$\frac{dx}{dt} = -b_1 x, \qquad \frac{dy}{dt} = -b_2 y$$
- 相手国に潜在的な不満があれば，軍備を拡張する基盤が生じる．この効果は，$c_1, c_2\ (\geq 0)$ を比例定数として，
$$\frac{dx}{dt} = c_1, \qquad \frac{dy}{dt} = c_2$$

以上 3 つの効果をすべて含めると，次の連立微分方程式になる．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -b_1 x + a_1 y + c_1 \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2 x - b_2 y + c_2 \end{cases} \tag{4.6.37}$$

(1) 相手国に潜在的な不安がない ($c_1 = c_2 = 0$) とき，非武装の平和（$x = y = 0$）が成り立つことを確かめよ．

(2) 相手国に潜在的な不安があると，相互非武装は長続きしないことを確かめよ．

(3) A, B 両国の軍備拡張が平衡状態になった $\left(\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dy}{dt} = 0\right)$ とする．このときの (x, y) の値 $(\bar{x}, \bar{y})$ を求めよ

(4) $u = x - \bar{x}$, $v = y - \bar{y}$ として，(u, v) に対する微分方程式を求め，それらの解は，どちらも共通の微分方程式

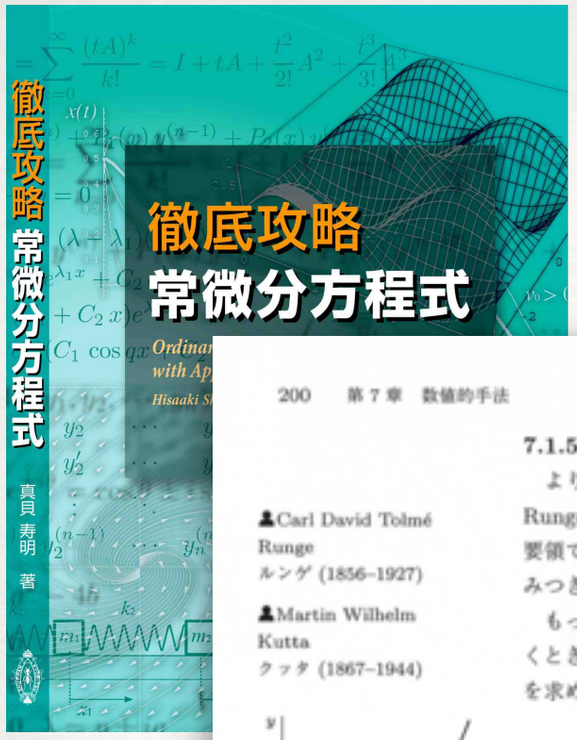
$$\frac{d^2 z}{dt^2} + (b_1 + b_2)\frac{dz}{dt} + (b_1 b_2 - a_1 a_2) z = 0 \tag{4.6.38}$$

の解であることを示せ．

(5) 微分方程式 (4.6.38) を解いて，平和を得るための条件を論ぜよ．

教える側にとっても「使えるネタ」を

「Runge−Kutta法」「Mathematica」



7.1.5　Runge-Kutta 法

Carl David Tolmé Runge
ルンゲ (1856–1927)

Martin Wilhelm Kutta
クッタ (1867–1944)

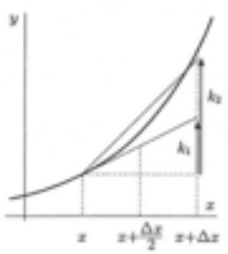
より高精度な計算を簡単に行う方法として，常微分方程式に対しては Runge-Kutta 法がよく使われている． Runge-Kutta 法は，Euler 法の要領で 1 ステップ Δx 進むときに，何回か推測値を出して，それらの重みつき平均をとる，というアイデアである．

もっとも簡単な **2 次の Runge-Kutta 法**は，微分方程式 (7.1.7) を解くときに，点 (x_n, y_n) から次の点 $x_{n+1} = x_n + \Delta x$ における y_{n+1} の値を求める計算を，

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \tag{7.1.13}$$

ただし　$k_1 = \Delta x\, f(x_n, y_n)$

$k_2 = \Delta x\, f(x_n + \Delta x, y_n + k_1)$



とする方法である．k_1 は x_n での右辺を用いた y_{n+1} の推測値，k_2 は k_1 を利用した第 2 の推測値で，それらの平均をとる形になっている．このときの局所的な計算誤差は，$O\left((\Delta x)^3\right)$ であり，2 次精度といえる．

理論的には，1 ステップを多段階に分割し，さらに各段階での y_n の予測値を加重平均で算出することが可能である．一般的な表現として，Runge-Kutta 法は，

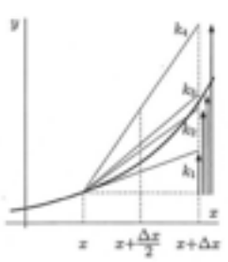
$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{s} b_i k_i \tag{7.1.14}$$

ただし　$k_i = \Delta x\, f\left(x_n + c_i \Delta x,\ y_n + \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j\right)$

と書くことができる．a_{ij}, b_i, c_i は係数であり，段数と呼ばれる s と，これらの係数に応じてさまざまなスキームが可能になる．

よく使われる 4 次精度の Runge-Kutta 法は，次のようになる．

Runge-Kutta 法
(4 次精度)



公式 7.5 (Runge-Kutta 法 (4 次精度))
微分方程式 (7.1.7) を解くときに，点 (x_n, y_n) から次の点 $x_{n+1} = x_n + \Delta x$ における y_{n+1} の値を求める計算を，次の公式に基づいて行う．

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{7.1.15}$$

ただし

$$k_1 = \Delta x\, f(x_n, y_n) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(a)}$$

$$k_2 = \Delta x\, f\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(b)}$$

$$k_3 = \Delta x\, f\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(c)}$$

$$k_4 = \Delta x\, f(x_n + \Delta x, y_n + k_3) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(d)}$$

(a) 式の k_1 は，単純に x_n での微分値 $f(x_n)$ を用いて x_{n+1} での値を推測したものである．(b) 式は，$x_n + \frac{\Delta x}{2}$ の位置で関数値が (a) の増分の半分だけあったとした場合にそこでの微分値 $f\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$ を用いて x_n からの増加分を推測した値．(c) 式も (d) 式もそれぞれ同様の推測を繰り返し，4 回の推測値 $k_1, \cdots, k_4$ を (7.1.15) のように重みつきで加えるというのが Runge-Kutta 法である．誤差は，$O\left((\Delta x)^5\right)$ のオーダーであり，差分法よりも格段によい．また右辺が陽的なので，プログラムもしやすい．

問題 7.6　$y(x)$ に対する微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = \sin x \tag{7.1.16}$$

を初期条件 $y(0) = 1$ のもとに，Runge-Kutta 法を用いて解け．解析解と比較して精度を調べよ．

Erwin Fehlberg
フェールベルグ (生年不明)

この方法の発表は 1969 年．

コラム 15

Fehlberg 法（5 次精度の Runge-Kutta 法）

Runge-Kutta 法の精度をさらに 1 次上げる場合，次のような係数をとるのが Fehlberg 法である．すなわち，微分方程式 (7.1.7) を解くときに，点 (x_n, y_n) から次の点 $x_{n+1} = x_n + \Delta x$ における y_{n+1} の値を求める計算を，次の公式に基づいて行う．

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6\right) \tag{7.1.17}$$

$$k_1 = \Delta x\, f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = \Delta x\, f\left(x_n + \frac{1}{4}\Delta x,\ y_n + \frac{1}{4}k_1\right)$$

$$k_3 = \Delta x\, f\left(x_n + \frac{3}{8}\Delta x,\ y_n + \frac{1}{32}(3k_1 + 9k_2)\right)$$

$$k_4 = \Delta x\, f\left(x_n + \frac{12}{13}\Delta x,\ y_n + \frac{1}{2197}(1932k_1 - 7200k_2 + 7296k_3)\right)$$

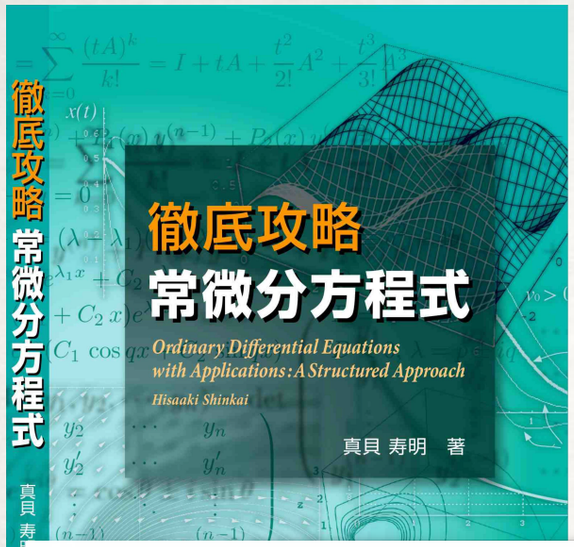
$$k_5 = \Delta x\, f\left(x_n + \Delta x,\ y_n + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right)$$

$$k_6 = \Delta x\, f\left(x_n + \frac{1}{2}\Delta x,\ y_n - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right)$$

ところで上記の係数 k_1, k_3, k_4, k_5 を使うと次のように 4 次精度の Runge-Kutta 法を構成できるので計算の精度チェックなどで便利である．

$$y_{n+1} = y_n + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5 \tag{7.1.18}$$

学生に安心感を与える



円形の膜の振動

一般に，2 次元 (x, y) 平面を伝播する振動は，時刻 t での変位を $u(x, y, t)$ として，波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u \qquad (6.6.48)$$

で記述される．円形のドラムなど，振動面が z 軸に対して回転対称であれば，直交座標 (x, y) よりも極座標 (r, θ) で運動を考えるのが便利である．両者の対応は，次式と右図で与えられる．

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

(6.6.48) を極座標で表示すると，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right\}$$

となる．以降，簡単のため，解として

$$u(t, r, \theta) = \hat{u}(t, r) = T(t)\,R(r)$$

すなわち，θ に依存せず，変数分離できる解を考えよう．(6.6.49) の右辺第 2 項はゼ

$$\frac{1}{a^2 T}\frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{1}{rR}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)$$

となる．右辺は r だけ，左辺は t だけの式であるから，この式の値を定数 c とおくと

$$\frac{d^2 T}{dt^2} - ca^2 T = 0$$

となり，この解が有界であるならば，$c = -\omega^2$ $(\omega > 0)$ でなければならない．このと
あるいは $T(t) = C_1 \sin a\omega t + C_2 \cos a\omega t$ となる．

一方，$R(r)$ を定める式は，

$$\frac{d^2}{dr^2}R + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}R + \omega^2 R = 0$$

これは，$\bar{r} = r\omega$ と座標変換すると，$n = 0$ の Bessel（ベッセル）方程式 (6.5.31) その
うか，そのために，Bessel 方程式が開発された）．したがって，原点で有界となる解は
となる．

ドラムの半径を ρ とし，境界条件として，$\hat{u}(t, \rho) = 0$ としよう．$J_0(\rho\omega)$ が零点
λ_n $(n = 1, 2, \cdots)$ のときだけが許される解になるから，$R(r) = J_0(r\lambda_n/\rho)$ $(n = 1$
る．したがって一般解は，C_n, D_n を定数として

$$\hat{u}(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0(r\omega_n)\,(C_n \sin a\omega_n t + D_n \cos a\omega_n t), \quad \omega_n = \frac{\lambda_n}{\rho}$$

と求められる．中心部分が最大振幅となる振動解が得られた．

コラム 12

球面調和関数

Laplace（ラプラス）方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi = 0 \qquad (6.4.26)$$

は，多くのモデルで登場する微分方程式である．(6.4.26) をみたす関数 ψ を調和関数という．球対称な力が働くときなどは，直交座標 (x, y, z) よりも球座標 (r, θ, φ) で運動を考えるのが便利なことが多い．両者の対応は，

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

で与えられる．(6.4.26) を球座標で表示すると，

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = 0 \qquad (6.4.27)$$

となる．以降，簡単のため，解 $\psi(r, \theta, \varphi)$ が

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\,y_n(\theta, \varphi) = R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi) \qquad (6.4.28)$$

のように変数分離できると仮定しよう．このとき，$y_n(\theta, \varphi)$ を球面調和関数とよぶ．さらに $R(r) = r^n$ とおくと，(6.4.27) の第 1 項は，$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)\Theta\Phi = \frac{n(n+1)}{r^2}R\Theta\Phi$ となるので，(6.4.27) は

$$\frac{\sin^2\theta}{\Theta}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + n(n+1)\Theta\right\} = -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} \qquad (6.4.29)$$

となる．右辺は φ だけ，左辺は θ だけの式であるから，この式の値を定数 c とおくと，$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + c\Phi = 0$ となり，$\Phi(\varphi) = e^{i\sqrt{c}\varphi}$ あるいは，$\Phi(\varphi) = C_1 \sin\sqrt{c}\varphi + C_2 \cos\sqrt{c}\varphi$．座標系の取り方から φ の関数は 2π の周期性 $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$ をもつはずなので，定数 $\sqrt{c}$ は整数 m に等しくなければならない．したがって，$\Theta(\theta)$ を定める式は，

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left\{n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right\}\Theta = 0 \qquad (6.4.30)$$

これは，$\cos\theta = \mu$ とすれば，Legendre（ルジャンドル）の随伴微分方程式 (6.4.23) そのものである（というか，このために，Legendre の随伴微分方程式が開発された）．$\Theta(\theta)$ は，$P_n^m(\mu)$ または $Q_n^m(\mu)$ で表されるが，$Q_n^m(\mu)$ は，$\theta = 0$ で連続ではないから不適．したがって，

$$\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi) = P_n^m(\cos\theta)e^{im\varphi} \equiv Y_n^m(\theta, \varphi)$$

の $2n + 1$ 個の球面調和関数が得られる．

Laplace 方程式の解を $\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y_n^m(\theta, \varphi)$ と仮定すれば，$R(r)$ のみたす方程式は，

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} - n(n+1)R = 0$$

この基本解は，r^n と r^{-n-1} となるので，Laplace 方程式の一般解は，原点 $r = 0$ を除いて

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}(a_n^m r^n + b_n^m r^{-n-1})\,Y_n^m(\theta, \varphi) \quad (a_n^m, b_n^m : \text{定数})$$

と得られる．

コラム 11

Legendre 多項式と多重極展開

物理や工学で特別の目的のために開発された関数を特殊関数 (special function) という．本章で紹介している Legendre（ルジャンドル）微分方程式や Bessel（ベッセル）方程式は，さまざまな場面で登場するため，級数解を用いて導出した解が公式として定着している．

例えば，Legendre 微分方程式の解は，電磁気学での静電場の解析に登場する．電荷 Q が 1 点にある
r の位置では電気的な位置エネルギー（クーロンポテンシャル）$\phi(r) = k\frac{Q}{r}$（k は
は高校物理で習う．電荷 Q が球対称に分布していても同じである．しかし，球対称
たらどうなるだろうか．
離 r から見れば，電荷はやはり 1 つの点のように近似でき，電荷に近づくにつれ
らのずれが生じてくるはずだ．このような具合をうまく表現する近似を多重極展開
ion) という．電荷が位置ベクトル $\boldsymbol{x}$ のところに密度 $\rho(\boldsymbol{x})$ で分布しているとき，観
，クーロンポテンシャルは，

$$\frac{\rho(\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}|}d^3x \qquad (*)$$

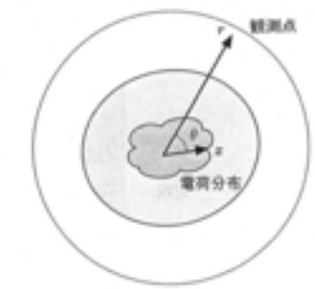
$|\boldsymbol{r}| = r$, $|\boldsymbol{x}| = x$，さらに $\boldsymbol{r} > \boldsymbol{x}$

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2 - 2rx\cos\theta}}$$

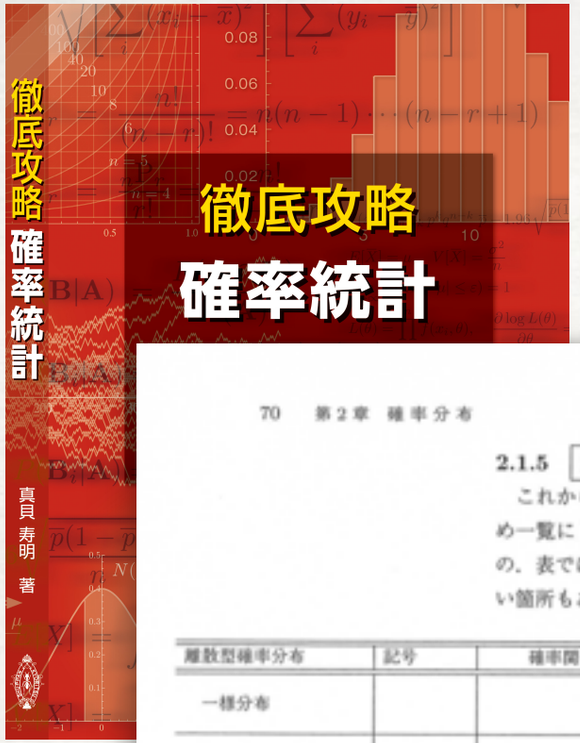
ベキ級数に展開すると，

$$\left(\frac{x}{r}\right)^\ell P_\ell(\cos\theta) \qquad (\#)$$

というよりは，「となるように Legendre 多項式を定義した」といえる．）これは，
(3) の式である．
入すると，次のことがわかる．
は，$\phi_0(r) = k\frac{Q}{r}$ となり，あたかも点電荷のような第 0 近似を与える．
は，$\phi_1(r) = k\frac{1}{r^2}\boldsymbol{p}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ となり，球対称からのずれの主要成分を表している．ここ
$\rho(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}d^3x$ は双極子モーメント (dipole moment) と呼ばれる量である．
$= 2$ は四重極モーメント (quadrupole moment), $\ell = 3$ は八重極モーメント (octapole
$\cdots$ を与える．
ンシャルへの影響は，r のベキで明確に分けられる．したがって，電荷に近づくにつ
ϕ_0 の効果に加えて順に $\phi_1, \phi_2, \cdots$ と，より高次の電荷分布の構造が見えるような，
れたことになる．



見通しをよくするための「ガイド」



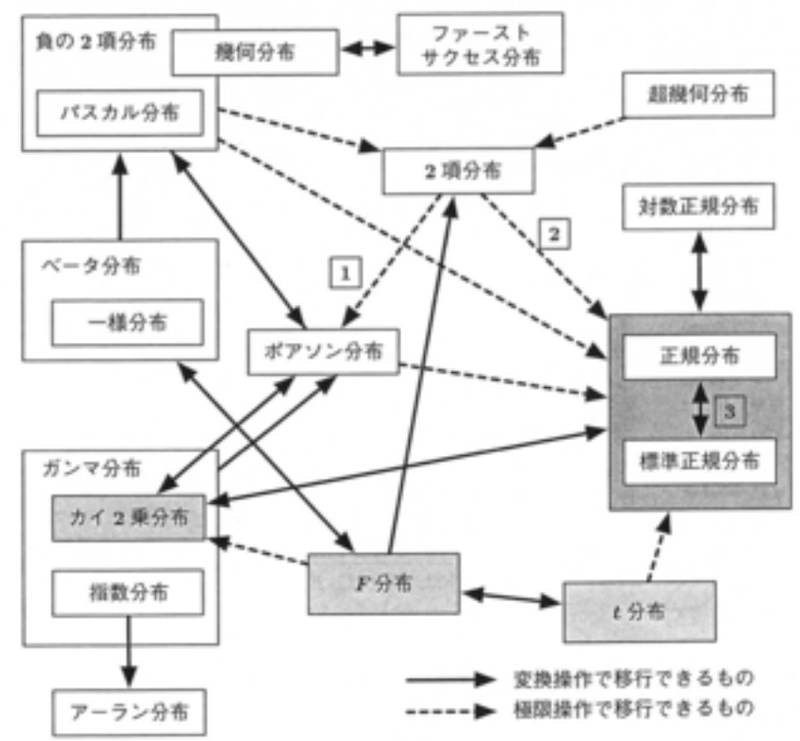
2.1.5 ガイド いろいろな確率分布

これから本書でいろいろな確率分布を紹介するが，それらをあらかじめ一覧にしておこう．★印は特に重要なもの．☆印はその次に重要なもの．表では，$q=1-p$ とする．スペースの関係で記号の説明が十分でない箇所もあるが，該当する説明を見ていただきたい．

離散型確率分布	記号	確率関数 $P(X=k)$	定義域	平均	分散	参照
一様分布		$\frac{1}{n}$	n 標本点	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	§2.1.4
ベルヌーイ分布	$\mathrm{Ber}(p)$	0 または 1		p	pq	§2.5.2
★2項分布	$B(n,p)$	${}_n\mathrm{C}_k p^k q^{n-k}$	$k=0,1,\cdots,n$	np	npq	§2.5.3
★ポアソン分布	$\mathrm{Po}(\lambda)$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	$k=0,1,2,\cdots$	λ	λ	§2.5.4
☆幾何分布	$G(p)$	pq^k	$k=0,1,2,\cdots$	q/p	q/p^2	§2.5.5
ファーストサクセス分布	$\mathrm{FS}(p)$	pq^{k-1}	$k=1,2,\cdots$	$1/p$	q/p^2	§2.5.5
パスカル分布	$\mathrm{Pas}(p,r)$	${}_{k-1}\mathrm{C}_{r-1}p^r q^{k-r}$	r：回数	r/p	rq/p^2	§2.5.6
負の2項分布	$\mathrm{NB}(r,p)$	${}_{r+k-1}\mathrm{C}_k p^r q^k$	r：回数	rq/p	rq/p^2	§2.5.7
超幾何分布	$H(N,n,p)$	$\frac{{}_{Np}\mathrm{C}_k \times {}_{Nq}\mathrm{C}_{n-k}}{{}_N\mathrm{C}_n}$	$k=0,1,\cdots,Np$	np	$\frac{npq(N-n)}{N-1}$	§2.5.8
連続型確率分布	**記号**	**確率密度関数 $f(x)$**	**定義域**	**平均**	**分散**	**参照**
一様分布	$U(a,b)$	$\frac{1}{b-a}$	$a\le x\le b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	§2.1.4
★正規分布	$N(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$	x 全域	μ	σ^2	§2.6.1
★標準正規分布	$N(0,1^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]$	x 全域	0	1	§2.6.2
対数正規分布	$\Lambda(\mu,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp\left[-\frac{(\log x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$	$x\ge 0$	$e^{(\mu+\frac{\sigma^2}{2})}$	定義 2.47	§2.6.5
ペキ分布		$Cx^{-\alpha}$	$x\ge x_{\min}$	$\frac{\alpha-1}{\alpha-2}x_{\min}$	定義 2.48	§2.6.6
☆指数分布	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$x\ge 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	§2.6.7
アーラン分布	$E_k(\lambda)$	$\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda x}x^{k-1}$	$x\ge 0$	k/λ	k/λ^2	§2.6.8
カイ2乗分布 自由度 n	$\chi^2_{(n)}$	$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{n/2-1}e^{-x/2}$	$x>0$	n	$2n$	§4.8.1
t 分布 自由度 n	$t_{(n)}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{B\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$	x 全域	0	$\frac{n}{n-2}$	§4.8.2
F 分布 自由度 (m,n)	F^m_n	$\frac{(m/n)^{\frac{m}{2}}}{B\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)}\frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{\frac{m+n}{2}}}$	$x>0$	$\frac{n}{n-2}$	(4.8.13)	§4.8.3

最後の3つ（χ^2 分布，t 分布，F 分布）は，統計で活躍する．

これらの確率分布の間にある関係を図として示しておこう．



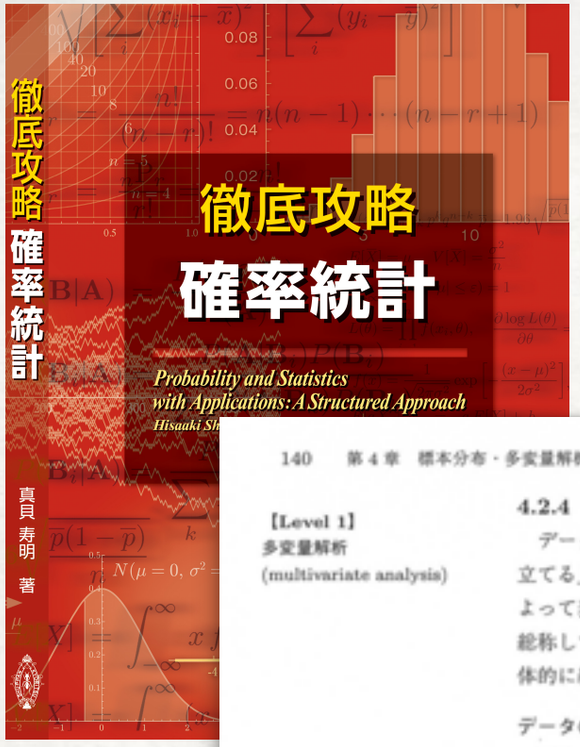
確率分布間の関係図

上の図の中で，現れる極限操作の代表的なものとして，

1. 2項分布 $B(n,p)$ において，p が小さく，n が大きいときには，分布は近似的に Poisson 分布 $\mathrm{Po}(\lambda)$ に近づく．ただし，$\lambda=np$．　1 ⟹ §2.5.4
2. 2項分布 $B(n,p)$ において，n が大きいときには，分布は近似的に正規分布 $N(np,npq)$ に近づく．ただし，$q=1-p$．　2 ⟹ §3.2.1
3. 正規分布と標準正規分布は，標準化変換で結ばれている．　3 ⟹ §2.6.2

という関係は，本書でよく登場する．

見通しをよくするための「ガイド」



4.2.4 ガイド 多変量解析の概略

【Level 1】

多変量解析 (multivariate analysis)

データを手に入れたとき，我々が行うのは，そのデータから「予測を立てる」か「要約を行う」作業をすることである．複数の変量（変数）によって表されているデータから，「予測」や「要約」を行う統計的手法を総称して**多変量解析**と呼ぶ．本書では次節以降，いくつかの解析法を具体的に紹介するが，ここでは概略を記しておこう．

データの種類

扱うデータについて，量的データか質的データか，という区別がある．

質的	名義尺度 (nominal scale)	『分類』を目的としたデータで『順序』に意味がないもの．「男女」「職業」「居住地区」など．
質的	順序尺度 (ordinal scale)	『順序』に意味があるが『間隔』が等しいとは限らないもの．「長男・次男」「1 位・2 位・3 位」など．
量的	間隔尺度 (interval scale)	『順序』も『間隔』も意味があるが『原点』の位置はどこでもよいもの．比較して何倍大きいなどといえないもの．「摂氏温度 °C」など．
量的	比率尺度 (ratio scale)	間隔尺度であり，『原点』に意味があるもの．比較して何倍大きいなどといえるもの．「距離」「大きさ」「金額」「絶対温度 K」など．

多変量解析の種類

解析であるから，当然インプット（入力）とアウトプット（出力）がある．

- 解析に用いるデータを**説明変数**（独立変数）という．
- 解析結果として得られるデータを**基準変数**（従属変数）という．

説明変数（独立変数） (explanatory variable, independent variable)

基準変数（従属変数） (criterion variable, regressand)

これらの組み合わせや目的に応じてさまざまな多変量解析がある．本書で説明しないものを含め，一般によく用いられるものの一覧を表で記す．

目的		基準変数	説明変数 量的		説明変数 質的
予測	関係式をつくりたい	量的	回帰分析	§4.3	数量化 1 類
予測	関係式をつくりたい（量の推定）	量的	正準相関分析		数量化 1 類
予測	グループ分けしたい（質の推定）	質的	判別分析	§4.6	数量化 2 類
予測	グループを構成したい	質的	クラスター分析	§4.7	クラスター分析
要約	変量を統合して整理したい	–	主成分分析	§4.4	数量化 3 類
要約	代表的な変量を発見したい	–	因子分析	§4.5	数量化 4 類

6.2 統計量の検定

6.2.1 ガイド 検定方法の概略

【Level 1】

ここからは，いくつか具体的な検定の手順を紹介する．大きく分けて，手元の 1 つの標本について仮説検定を行う場合と，2 つの標本を比較して検定する場合がある．後者は例えば

- A と B の 2 つの薬の効果を知るために，それぞれ被験者のデータを集めた．どちらが効果があったのか．
- 毎年入学してくる学生に，同じテストを課しているが，今年の学生は昨年の学生よりも賢い集団になったのかどうか．

などの比較である．「差がある（ない）」ことを対立仮説にして検定する方法である．

χ^2 検定 (χ^2-test)
　χ^2 分布 ⟹§4.8.1
t 検定 (t-test)
　t 分布 ⟹§4.8.2
F 検定 (F-test)
　F 分布 ⟹§4.8.3

χ^2 分布にしたがう検定統計量を用いる検定法を総称して **χ^2 検定**と呼ぶ．同様に，t 分布・F 分布にしたがう検定統計量を用いる検定法をそれぞれ **t 検定**，**F 検定**と呼ぶ．

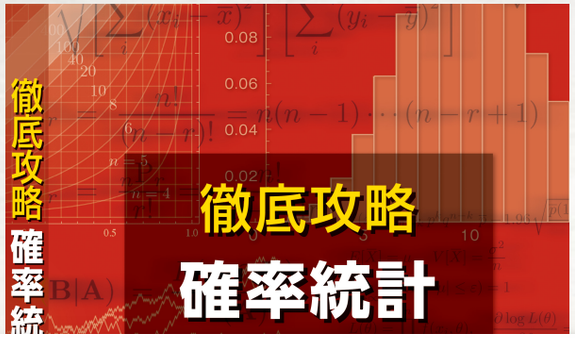
これから本書で紹介する検定法を「逆引き辞典」的に列挙しておこう．

標本の数	検定したい統計量	その他の統計量	検定名称	
1 つ	母平均 μ	母分散 σ^2 が既知	u 検定	§6.2.2
		母分散 σ^2 が未知	t 検定	§6.2.2
	母分散 σ^2	母平均 μ が既知	χ^2 検定	§6.2.3
		母平均 μ が未知		§6.2.3
	相関係数 r			§6.2.6
			無相関検定	§6.2.6
	母比率 p			§6.2.7
2 つ	母平均 μ の差	母分散 σ^2 が既知		§6.2.5
		母分散 σ^2 の等しさは既知，値は未知	2 標本 t 検定	§6.2.5
		母分散 σ^2 が未知	Welch の t 検定	§6.2.5
	母分散 σ^2 の差		F 検定	§6.2.4
	相関係数 r の差			§6.2.6
	母比率 p の差			§6.2.7

この節 (§6.2) ではほとんどの場合で，母集団は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがうものとする．「はたして正規分布にしたがっているのかどうか」という検定は，§6.3 で述べる．

検定目的	母集団	属性	検定名称		
どのような分布にしたがうか	1 つ	1 つ	適合度検定	χ^2 検定	§6.3.1
分類に用いた属性は独立か	1 つ	2 つ	独立性検定	χ^2 検定	§6.3.2
母集団は同じ分布か	2 つ	1 つ	比率一様性検定	χ^2 検定	§6.3.3

目的別のインデックスをつくる



興味を持たせる具体例

コラム 17

少子化と学力低下

大学生の学力低下が言われて久しい．その理由を分布関数で考えてみよう．仮定は単純である．

- 18 歳の学力の分布は，今も昔も変わらずに，Gauss 分布 $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ とする．
- すなわち，平均学力は今も昔も不変で ±0 であるとする．また標準偏差も不変とする．

大学の入学試験の合格最低点を X 点とすれば，合格者の割合 $A(X)$ は，

$$A(X) = \int_X^\infty F(x)dx$$

である．また，合格者の入試テストの平均点 M は，総得点 $S(X)$ が

$$S(X) = \int_X^\infty x\,F(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-X^2/2}$$

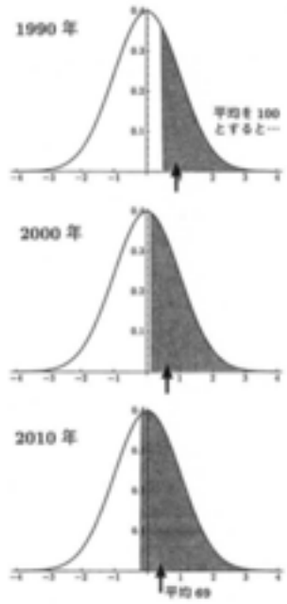
だから，

$$M = \frac{S(X)}{A(X)}$$

となる．つまり，昔と今で同じ試験をしたときの平均点の推移が，各年度の大学生の率から予想できることになる．

いま，右のような 18 歳人口と大学入学率のデータがあるとき，1990 年の平均点を 100 とすれば，各年度での平均点はどうなるだろうか．

	18 歳人口	大学短大進学者	大学短大進学率
1990 年	201 万	73 万	36%
1995 年	177 万	80 万	45%
2000 年	151 万	74 万	49%
2005 年	137 万	71 万	52%
2010 年	122 万	68 万	57%
2015 年	120 万	?	?



1990 年は大学入学者は人口の 36%なので，$A(X) = 0.36$ である．正規分布表より，この値を与える X は，$X = 0.3585$ であるから，

$$M_{1990} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-0.3585^2/2}}{0.36} = \frac{2.604}{\sqrt{2\pi}}$$

である．この値を 100 と考えて，各年度の平均点を算出すればよい．1995 年は $A(X) = 0.45$，この値を与える X は $X = 0.1257$ なので，

$$M_{1995} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-0.1257^2/2}}{0.45} = \frac{2.205}{\sqrt{2\pi}}$$

したがって，1995 年のテストでは平均点が 84.68 点になってしまう．同様に 2000 年では 78.38 点，2005 年では 73.94 点，2010 年では 68.91 点である．

こう考えると，「昔の大学生はもっと賢かった」という教授の嘆きももっともである．少子化でしかも大学進学率が上昇しているのにもかかわらず，大学入学者定員の削減が不十分なのが原因なのである．学力低下は，大学の大衆化が原因なのだ．

筆者が大学生だった頃も「昔の大学生はもっと勉強した」と言われた．きっと，その頃の教授たちも同じことを言われたはずである．きっとその前の世代も同じことを言われていたはずだ．日本に大学ができた明治のはじめは，大学生であることは，ほんの一握りのエリートだったからだ．

（有馬朗人「大学の物理教育」誌 (日本物理学会，1999) を参考にデータを最近のものに置き換えた．）

例題 2.26 あるスーパーコンピュータは，8 万台の CPU を持つシステムである．1 つの CPU の故障頻度は 10 年に一度の割合（1 時間あたりの故障率 $p = 1/(10 \times 365 \times 24)$）である．システム全体では，1 時間あたり，故障頻度はどのくらいか．

理化学研究所が推進する次世代スーパーコンピュータ「京」は，8 万台の CPU を用いた並列計算を可能にする．

確率 $p = 1/(10 \times 365 \times 24)$ であり，頻度は非常に少ないので，Poisson 分布を適用して考える．$n = 80000$ であるから，$\lambda = np = 1.027 \simeq 1$ と対応し，Po (1) の分布を当てはめる．巻末の付表 1 より，右表の数字を得る．

k	Po(1)
0	0.3679
1	0.3679
2	0.1839
3	0.06131
4	0.01533

これより，1 時間あたり故障が 0 台なのは 36.8%であり，残りの 63.2%は故障が存在していることになる．

- 実際，常にメンテナンスを行い，故障している箇所は並列計算に利用しない，などの管理ソフトウェアで対応するそうである．

コラム 24

競馬の勝因分析を卒業研究した学生

筆者の専門は物理だが，卒業研究のゼミにはさまざまな学生がやってくる．ある年には「競馬が好きなので競走馬の勝因分析を卒業研究にしたい」という強い意志をもつ H 君がいた．筆者は競馬を全く知らなかったが，H 君は「競馬は血統がすべてで騎手にはよらないはずだ．それを証明したい．」と主張する．主成分分析と因子分析というツールの存在を教え，後は見守ることにした．

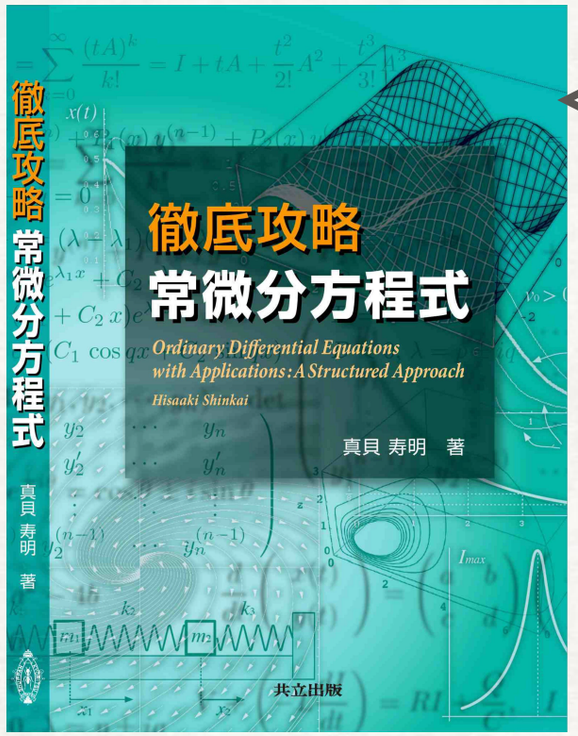
H 君は，過去 4 年分の有馬記念レースと，その開催地である中山競馬場のレースで勝った馬のデータから，それぞれの馬の右回りレース・左回りレースの勝敗，競馬場の状態（芝か土か），距離での勝率，重賞競争の成績などから 3 要素を選び出し，馬ごとの勝因を判定するプログラムを作成した．そして，競馬好きが年度末最大の楽しみとする有馬記念の出走馬が 2 日前に発表されるや否や，そのプログラムで馬の着順を予想したのである．彼の予想は，オッズでいうと『1 番人気，4 番人気，10 番人気』の馬の順だった．人気を集める馬が 2 頭と穴馬が 1 頭である．

はたしてレースは H 君の予想通りに展開し，最終的には 1 着と 3 着の馬をその順で当てた．2 着予想の馬はゴール直前で遅れて 8 着となった．H 君の「馬好きは 3 連単（上位 3 着の順で馬を当てること）で馬券を買うものです」との忠告にしたがって研究室の皆で彼の予想通りに応援したのだが，残念ながら外れてしまった．H 君予想の 3 連単馬券のオッズは 551 のもので，この年のレースの当たった 3 連単馬券はオッズ 9855（1052 番人気）のものだった．このレース自体が番狂わせだった．

「惜しかったね」とレース後に会ったときに話しかけたが，彼はホクホク顔だった．H 君本人は他のレースでは当てていて，自分のプログラムの正しさを実感したそうである．（ちなみに，20 歳未満の人は馬券を買ってはいけないことになっています．ご注意ください．）

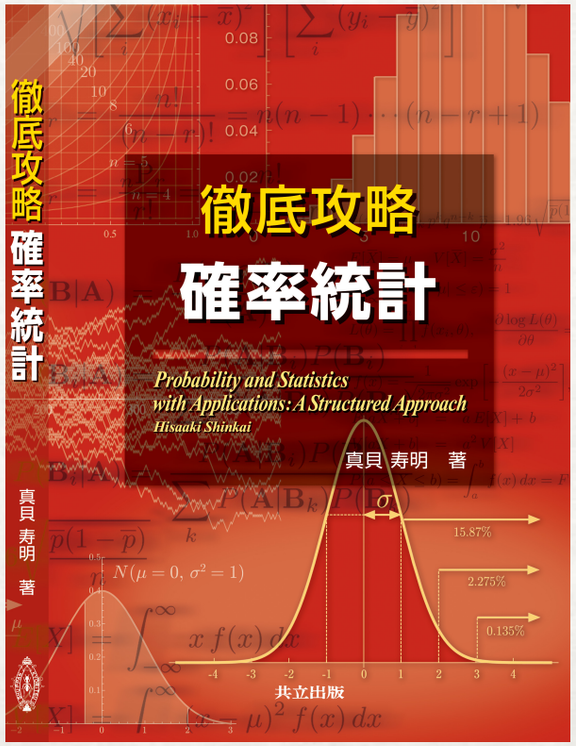
教科書ご採用校　（共立出版調べ　2015/8）

北海道教育大，東北大，山梨大学，
杏林大学，東京工科大学，工学院大学ほか



宇都宮大，電気通信大学，上智大学，
日本大，工学院大，近畿大，富山県立大学，
愛媛大，福岡工業大，岡山県立大，
岡山理科大，宮崎大，津山工専，津田塾大，
仙台高専ほか

東京工業大，関西学院大，
青山学院大学，近畿大，
豊橋技術科学大，千葉商科大ほか



事例2：武庫川女子大学（物理・宇宙物理）

私の担当授業（共通教育科目，全学科・全学年）

「生活の中の物理学」　　1クラス　50名

「最先端物理学が描く宇宙」1クラス　100名

文系・理系（建築/薬）混合で，学力も興味も広範囲

フィードバックは「ミニッツペーパー」で得られる

わからないことを「自分の勉強不足」と考えてくれる

理系的な話の展開に慣れていない

計算はまったくダメ

事例2：武庫川女子大学（物理）

文系向けの大学教養レベルの教科書がない．．．

一般向けのトピック仕立ての雑学本はたくさんある
体系立てて教えるのに適した本が見当たらない

実験もしたい．
少しだけ式も提示したい．
こんな計算もできるよ，と示したい．
資料集としても使いたい．．．．

問題も欲しい．
研究課題も欲しい．

事例2：武庫川女子大学（物理）

文系向けの大学教養レベルの教科書がない．．．

一般向けのトピック仕立ての雑学本はたくさんある
体系立てて教えるのに適した本が見当たらない

実験もしたい．
少しだけ式も提示したい．
こんな計算もできるよ，と示したい．
資料集としても使いたい．．．．

問題も欲しい．
研究課題も欲しい．

森北出版，2015年9月刊

興味を持たせる具体例

日常の「なぜ」に答える物理学

Physics answers to "why?" in your daily life

角運動量保存則と猫の落下問題

図 2.116　フィギュア選手の回転

図 2.117　飛び込み選手の回転

角運動量保存則の例として，次のような現象がある．

- 手を広げて回転を始めたフィギュアスケート選手が，広げた手を体に付けると回転する速さは大きくなる．
- 水泳の飛込競技では，体を小さく丸めると，回転速度が上がる．
- 惑星が太陽の周りを公転運動するときには，楕円軌道となるが，太陽の近くにあるときは，遠いときよりも速く進む．

角運動量保存則は，ケプラーの惑星運動の第 2 法則と同じことを述べている．

Topic　ジャイロスコープ

ジャイロスコープとよばれる装置は，重心が中心にある円板状のコマをつくり，上下左右どの方向にも回転できるようになっている．一度コマが回転を始めると，慣性の法則と角運動量保存の法則によってコマはその状態を維持する．回転面を傾ける外力が加わると，もとの状態を維持しようとして慣性力がはたらくので，逆にわれわれは角速度を検出することができる．航空機や人工衛星に搭載されて自律航行に利用されている．

ジャイロスコープ (gyroscope)

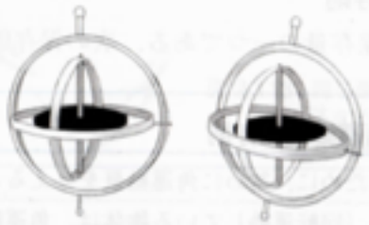


図 2.118　コマの回転は全体が傾いても同じ向き

実験 8　よく回り続けるコマ

CD 盤の中央にビー玉をつけるとコマになる．安定して長い時間回り続けるようにするには，トルクを大きくすればよい．CD 盤におもりを貼り付けておくと，安定して回るようになる．おもりの位置を中心付近，端の部分と変えてものをつくり，比較してみよう．

図 2.119　角運動量が大きいコマ

コラム 13　猫の落下問題

猫を持ち上げて落とすと，どんな向きから落としたとしてもきちんと足から着地する．何でもないような話だが，物理学的には大問題だった．角運動量保存則に違反する現象だからである．

角運動量保存則は「初めに与えた回転エネルギーがずっと保存する」という法則である．猫を投げるときに，猫を固定したまま手を離すのならば，角運動量はゼロである．だから猫は回転することができないはずだ．しかし，実際には猫は回転して着地する．どうしてだろうか．

この，猫の落下問題 (cat falling problem) に解答が与えられたのは，1969 年のことだった．答えは簡単で，猫は一つの固い物質（物理用語で剛体）ではなく，柔軟に曲がることができるからだというものだ．猫を前後二つの筒からできているとモデル化し，お腹を丸めて足を伸ばして回転することで，猫は「全角運動量 = 0」の条件を保ったまま全身を上下に修正できることが学術論文で示された．図 2.120 は左から順にその様子を描いた図である．

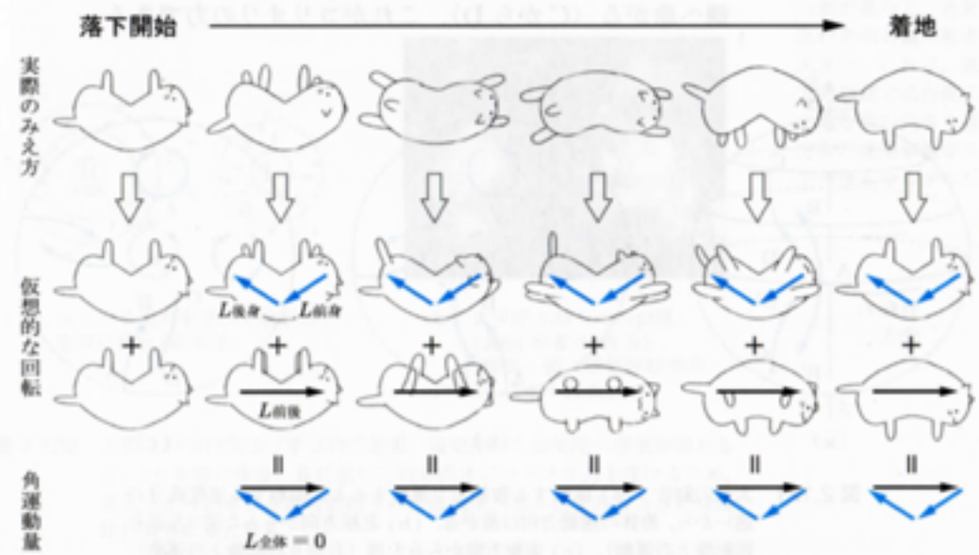


図 2.120　猫の落下問題の解決　図は左（落下開始）から右（着地）への時間変化を示し，上段は，実際の猫の体勢である．2 段目と 3 段目は，猫の回転を分解して示した図である．猫は「く」の字に体を曲げ，前身と後身でそれぞれ体を回転させる（2 段目の図）ことで，全体の角運動量をゼロにしたまま水平軸方向の回転（3 段目の図）を得ていた．最下段は，すべての回転ベクトルの合成がどの瞬間でももとに戻る（すなわち，和はゼロに保たれている）こと，すなわち全角運動量はゼロのままに保たれていることを示している．

参考：Kane, T R & Scher, M P., "A dynamical explanation of the falling cat phenomenon", Int. J. Solids Structures, 55(1969) 663–670.

興味を持たせる具体例

コリオリ力と天気予報

2.6.4　コリオリの力（転向力）

■コリオリの力 力8

力8
コリオリの力・転向力
(Coriolis force)
コリオリ
Gaspard-Gustave
Coriolis
(1792–1843)

地球など回転している座標系では，運動する物体を考えるとき，回転に応じた慣性力として**転向力**を考える必要がある．コリオリが 1828 年に発見した力で，**コリオリの力**ともよばれる．

図 2.121 は，地球上を移動する大気の動きである．赤道付近の A から高緯度地帯に向かって風が吹くと，地球の自転に伴う回転速度が高緯度では相対的に小さな値であるため，A からの風は右向きに曲がる（B）．逆に高緯度から低緯度に向かって進む風は，進むにつれて自転の速度成分が大きいため，やはり右側へ曲がる（C から D）．これがコリオリの力である．

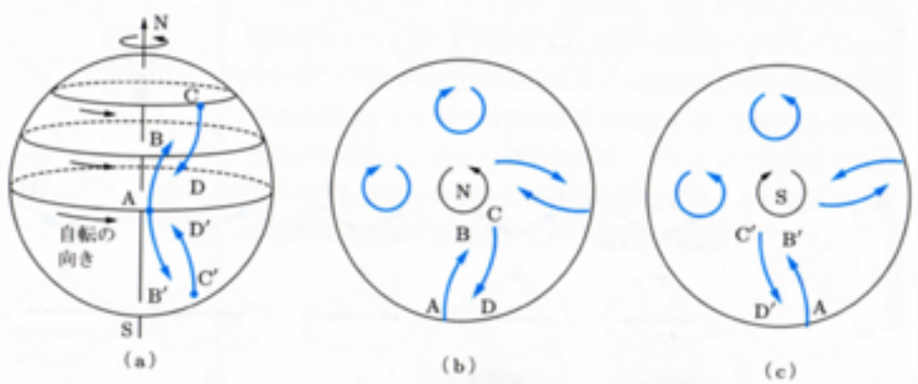


図 2.121　大気の動き　(a) 回転する物体上で運動すると，回転する速度成分の違いから，物体の運動方向は曲がる．(b) 北極方向からみた図（左回り回転盤上の運動）．(c) 南極方向からみた図（右回り回転盤上の運動）．

北極方向からみると地球は反時計まわりに回転しているが，北半球でのコリオリ力は進行方向に対して右向きにはたらく．南極方向からみると地球は時計まわりに回転しているが，南半球でのコリオリ力は進行方向に対して左向きにはたらく．

回転していない立場で運動方程式を立てて解くならばコリオリ力は不要だが，直観的に理解するには便利な説明である．

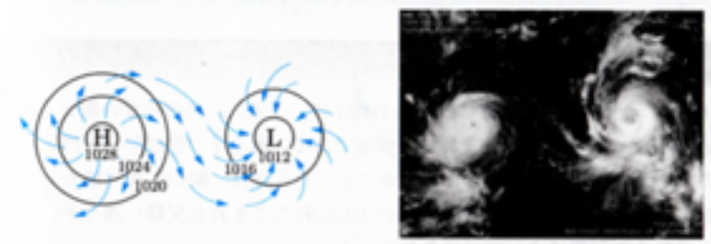
法則　**コリオリの力（転向力）**

回転運動をする物体に沿って運動を考えるときには，慣性力としてコリオリ力が加わる．反時計まわり（時計まわり）に回転する盤上では，運動する物体は進行方向に対して右向き（左向き）に力を受ける．

コリオリ力は非常に弱い力だが，地球規模なら，大きな流れとしてその影響をみることができる．海流は，日本海流（黒潮）もメキシコ湾流も，大きく時計まわりに流れる．偏西風が吹くのもコリオリ力の影響である．

コリオリ力により，高気圧から風が流れ，低気圧に風が流れ込むときに，北半球では常に時計回りになるように風が進む．低気圧の近くでは，全体として反時計回りに風が巻き込まれていく（図 2.122）．台風がいつも反時計回りなのは，このような理由による．南半球の台風は逆回りであり，赤道上で台風は発生しない†．

† ちなみに，北半球で台風が進むと，台風の進行方向右側の被害が大きい．これは，進行方向右側では台風に巻き込む風の向きと進行方向の速度が重なり風力が強くなるからだ．



(a) コリオリの力を受けて曲がる空気の流れ（北半球）

(b) 太平洋上の二つの台風（2004 年 6 月 28 日）（提供：国立情報学研究所「デジタル台風」）

図 2.122　大気にみられるコリオリ力の効果　高気圧から低気圧へ空気が流れると，（北半球の場合）常に進行方向右向きにコリオリ力を受けるため，高気圧から出るときは時計回りの，低気圧へ巻き込まれるときには反時計回りの風になる．

Topic　**風呂の栓を抜いて水が回り込む方向**

風呂や洗面台に水を溜め，栓を抜いて流れる様子を確認してみよう．「低気圧と同じように吸い込まれていく水は，北半球では，反時計回りになっている」…という説明が書かれている本がよくあるが，コリオリの力はとても弱く，地球規模の運動でようやく出現するものである．風呂や洗面台では，栓の場所や初期の水の回転運動などがその後の回転運動を決めてしまうようだ．洋式水洗トイレの水の流れの向きも構造上のものである．

コリオリ力と
風呂の栓

日常の「なぜ」に答える物理学

歴史的な背景にも触れる

最速降下線の懸賞問題

フーコー
Jean B. L. Foucault
(1819–68)

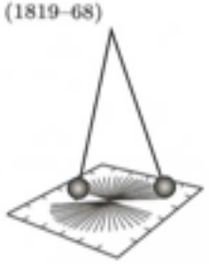


図 2.123　フーコーは，地球の自転を振り子で証明した

Topic　フーコーの振り子

地球が自転していることを証明した実験として，フーコーが行った振り子が有名である．長いひもにおもりを付けて長時間振り子を振れさせると，振動方向が見かけ上回転していくという現象である．1851 年，パリ天文台とパンテオンにて公開実験が行われ，人々を感心させた．パンテオンの実験では，全長 67 m のワイヤーで 28 kg のおもりを吊るしたものが使われたそうだ．回転する原因はコリオリ力である．北半球では右回りに振動面が回転し，1 周するのに必要な時間 T は，緯度 θ の地点では，$T = 24$ 時間$/\sin\theta$ になる．北極点では 24 時間，赤道上では回転しない．北緯 35 度ではおよそ 41.8 時間である．

コラム 14　「吾輩は猫である」に登場する物理

夏目漱石 (1867–1916) のデビュー作『吾輩は猫である』(1905) は，主人公の名前のない猫が，飼い主の英語教師・珍野苦沙弥（ちんのくしゃみ）先生のまわりの人物を描いた作品である．教え子で物理学を専門とする水島寒月君の影響もあり，小説中には物理の話もよく登場する．たとえば，隣の広場で騒がしい学生に対して苦沙弥先生が怒鳴り込むと，学生からボールが自宅に打ちこまれる反撃に遭うが，その場面では，ニュートンの運動法則が猫によって解説されている．

> 今しも敵軍から打ち出した一弾は、照準誤たず、四つ目垣を通り越して桐の下葉を振い落して、第二の城壁即ち竹垣に命中した。随分大きな音である。**ニュートンの運動律第一**に曰くもし他の力を加うるにあらざれば、一度び動き出したる物体は均一の速度をもって直線に動くものとす。もしこの律のみによって物体の運動が支配せらるるならば主人の頭はこの時にイスキラスと運命を同じくしたであろう。幸にしてニュートンは第一則を定むると同時に第二則も製造してくれたので主人の頭は危うきうちに一命を取りとめた。**運動の第二則**に曰く運動の変化は、加えられたる力に比例す、しかしてその力の働く直線の方向において起るものとす。これは何の事だか少しくわかり兼ねるが、かのダムダム弾が竹垣を突き通して、障子を裂き破って主人の頭を破壊しなかったところをもって見ると、ニュートンの御蔭に相違ない。（吾輩は猫である（八）より）

また，ちょっとグロテスクだが，10 人の囚人を同時に絞首刑にするには，どのようにしたらよいのかを議論する『首縊りの力学』の解説もある．

寒月君のモデルは，漱石のよき話相手だった物理学者の寺田寅彦 (1878–1935) といわれており，『首縊りの力学』も 1866 年にイギリスの物理学会誌 (Philosophical Magazine) に掲載された学術論文が元ネタだということがわかっている．

コラム 15　最も短時間で転がり降りる曲線の形は？

エネルギー保存則は，ある高さ H から転がり始めたボールは，地面に到達したときには，どんなルートを取ったとしても，速さ v が同じ値 $v = \sqrt{2gH}$ になることを示している．しかし，坂道の形状によって，地面に到達する時間は違ってくる．どんな形状の坂道が最短時間でボールを地面に到達させるのだろうか．

この問題は，**最速降下線問題**とよばれ，ヨハン・ベルヌーイ (Johann Bernoulli, 1667–1748) が，1696 年に「世界中の数学者への挑戦状」として提示した問題である．この問題は，微分方程式を解く必要があるが，その答えは美しく，**サイクロイド曲線**といわれる曲線になる．これは，自転車のタイヤの一点にライトを付けて，タイヤの動きとともにライトが描く軌跡と同じ曲線である．

この挑戦状には，出題者本人を含め，兄のヤコブ (Jacob Bernoulli, 1654–1705)，ライプニッツ (Leibniz, 1646–1716)，ロピタル (de l'Hopital, 1661–1704) のほかに匿名者の計 5 名がサイクロイドであることを証明した．匿名で応募したのはニュートン (Newton, 1642–1727) だったが，ベルヌーイはニュートンと見抜いていたという．

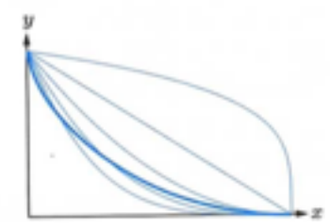


図 2.124　ボールが最短時間で転がる曲線　同じ高さから地面の一点へ結ぶ曲線はいろいろ考えられるが，一番短い時間でボールが転がるのは，図の太線で示したサイクロイド曲線である．

ちなみに，仮に東京から大阪まで 500 km をサイクロイド形でトンネルを掘ったとすると，最深部の深さは $H = 500/\pi = 159$ km になる．重力加速度が一定であるとすれば，トンネルの通過時間は，$T = \pi\sqrt{H/2g} \sim 566$ 秒=約 9 分の弾丸移動手段ができる．動力は不要で重力による作用のみでよい．ただし，最深部の速さは $v = \sqrt{2gH} \sim 1765$ m/s で，音速の 5.1 倍となる．

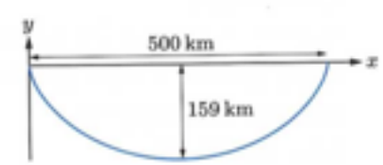


図 2.125　サイクロイド曲線でトンネルをつくる？

漱石と寺田寅彦

日常の「なぜ」に答える物理学

ペットボトルで雲

■飽和水蒸気量

空気中に溶け込める水蒸気の量は，温度によって変わる．1 m^3 の空気が含むことのできる水蒸気の最大質量を g で表したものを**飽和水蒸気量**という．グラフにすると，図 4.20 の温度 100% の線のようになる．

表 4.2　飽和水蒸気量

気温 [℃]	飽和水蒸気量 [g/m^3]
35	39.6
30	30.4
25	23.1
20	17.3
15	12.8
10	9.4
5	6.8
0	4.8

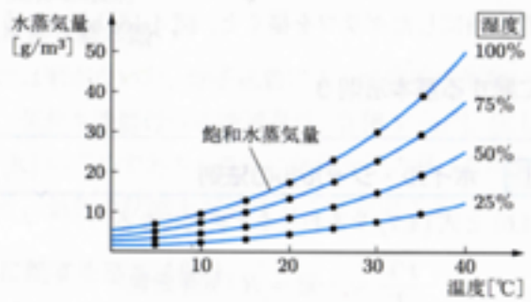


図 4.20　水蒸気量の温度変化の様子

飽和水蒸気量を 100 として，空気中に含まれている水蒸気の量が**湿度**（相対湿度）である†．気温 30℃ のとき，1 m^3 の空気が 10 g の水蒸気を含んでいれば，湿度は 32.7% になる．この空気がそのまま冷えると，温度 $T_0 = 11$℃ で飽和し，この温度 T_0 以下では**結露**する．このような温度 T_0 を**露点**という．

たとえば，夏に冷たい飲み物をコップに入れて放置すると，コップの外側に水滴がつく．これは，コップの周囲で冷やされた空気が，それまでに含んでいた水蒸気をため込めずに結露したものだ．干していた洗濯物をしまい損なうと夜には湿気を帯びてしまうのも，冬に水蒸気が多い室内の空気が窓の近くで結露するのも同じ理由である．

湿度 (humidity)

† 正確には重量比ではなく，飽和水蒸気圧に対する水蒸気圧の分圧で定義されるが，ほぼ同じである．

図 4.21　ビールジョッキも汗をかく

図 4.22　冷蔵庫のミイラ

Topic　冷蔵庫の中はなぜ乾燥するのか

冷蔵庫内は −40℃ 程度にまで冷却機で冷やされた空気が循環し，庫内の温度を下げる．冷気は周囲から熱を奪い，自分自身の温度は 0℃ 程度にまで上昇する．そうなると飽和水蒸気量は増えるので，冷蔵庫内の食材から水分を奪い取ることになる．最近の冷蔵庫には，密閉することで水分を逃がさない野菜室などがある．

冷蔵庫の乾燥

実験 15　雲をつくってみよう

ペットボトル内で雲をつくることができる．大きなペットボトルと，フィズキーパーとよばれる炭酸抜けを防止する栓を用意しよう．ペットボトルの中を少し湿らせ（霧吹きでひと吹き），線香の煙を入れておく（雲の種となる）．フィズキーパーを取り付け，中の空気の圧力を上げる．圧力を上げると，閉じ込められた空気の温度が上がり，ペットボトルの中は透明になるが，そこで一気に栓を開けると，急に圧力が下がり，温度が下がって，露点に達し，雲が発生する．

図 4.23　ペットボトルに雲

コラム 24　天気予報で出される「○○指数」

夏場になると「不快指数」という言葉を耳にする．アメリカの旅行天気会社が考え出した値といわれるが，気温 T と湿度 H をもとにして，露点温度 T_0 を計算し，

$$\text{不快指数}\quad D = 0.72(T + T_0) + 40.6 \tag{4.10}$$

として計算する値だという．だが，この値は，風の影響を含めていないので，必ずしも体感と一致するわけではなく，気象庁の統計種目でもない．

最近では天気予報会社が付加価値を出すために「洗濯指数」，「お出かけ指数」，「ビール指数」，「鍋もの指数」，「のど飴指数」など，さまざまな数値を予報して出している．各社が，気温，湿度，風速，日射量などをもとに独自に計算しているもので，詳細な計算方法はほとんど公開されていない．

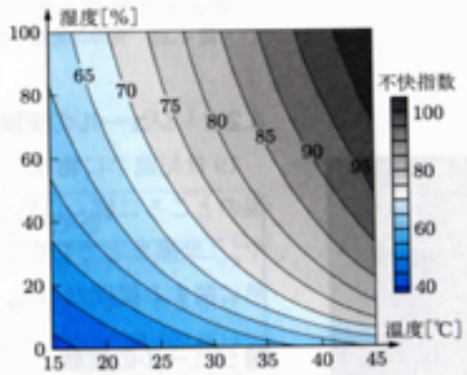


図 4.24　温度と湿度から不快指数を読み取る図　70 以上で一部の人が，75 以上で約半数，80 以上でほぼ全員が不快と感じ，85 以上で全員が苦痛を感じるという．

天気予報とXX指数

日常の「なぜ」に答える物理学

朝焼け，夕焼け，赤い月

皆既月食とコロンブス

5.3.4　光の散乱・偏光・干渉

■光の散乱

太陽から地球に届いた光線は，空気中の分子と衝突して一部は散乱してしまう．**レイリー散乱**とよばれるこの現象は，波長が長いほど散乱されやすい（正確には，散乱される確率は波長の4乗に反比例する†）．

散乱
(scattering)
レイリー散乱
(Rayleigh scattering)

レイリー
John W.S. Rayleigh
(1849–1919)

† 可視光線の赤色と紫色とでは波長が1.8倍違うので，紫色の光のほうが，$1.8^4 = 13$ 倍も散乱される．

図 5.64　朝焼け・夕焼けの空が赤い理由

Topic　朝焼け・夕焼けの空が赤いのは？

昼間の空は青くみえる．これは，波長の短い紫や青色の光がたくさん散乱しているからだ（紫色の空になりそうだが，人間の視覚細胞が青色に感度が高いため，青くみえる）．雲が白いのは，水滴の粒子が大きくて太陽光のどの色もほぼ同じ割合で散乱するからである．

逆に朝や夕方は，太陽からの光は，昼間よりも長く空気中を通って私たちの目に届く．そうなると，先に散乱された青い光は遠いところにあり，手前には赤色が多く散乱されることになって空が赤くみえることになる．

Topic　昼間にみえる白い月？ 皆既月食で赤くみえる月？

上弦の月は昼間に出て深夜に沈む．午後には白い月がみえる．これは，月からの光の色と青空の色が重なるためである．夜は無色の空を通ってくるので，黄色味を帯びた月になる．

満月で輝く月が地球の影にすっぽり入ると皆既月食になる．皆既月食中の月はうっすらと赤い．これは，地球の大気で屈折した光が月に当たり，その反射光をみている現象である．赤くなるのは，大気を通過する距離が長く，夕焼けや朝焼けと同じように赤い色の光だけが残っているからだ．

図 5.65　皆既月食で赤く光る月（写真提供：穂谷則夫）〔カラーページ参照〕

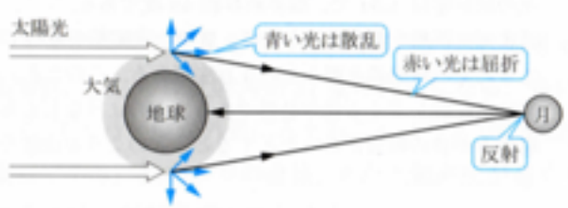


図 5.66　皆既月食が赤くみえるのは，地球の大気を長く通った光の反射をみることになるから

コラム 32　皆既月食で食糧を得たコロンブス

アメリカ大陸の存在をヨーロッパに伝えたコロンブス (Christopher Columbus, 1451–1506) は，4回目のアメリカ探検にて，船員のふるまいが悪く，原住民から食糧配給をもらえなくなり，窮地に立たされた．そこで，皆既月食が起きるのを利用して「月が血のように赤くなれば，君たちの行いに対して，神様が怒っている証拠だ」と脅して原住民を騙し，食糧をもらえるようにしたそうだ．真偽は不明だが，実際にコロンブスがアメリカ大陸にいた1504年3月1日には現地で皆既月食がみられ，当時でも月食予報はきちんとされていた．

■偏　光

光は横波である．太陽光や電球から出た光は，進行方向に対して横向きに（あらゆる方向に）振動している．このような光を**自然光**という．光を偏光シートに通すと，横向きの振動のうち，結晶構造に沿った一つの方向のみに振動する光を抽出できる．このように，振動の向きが偏っている光を**偏光**という．

偏光
(polarization)
自然光
(natural light)

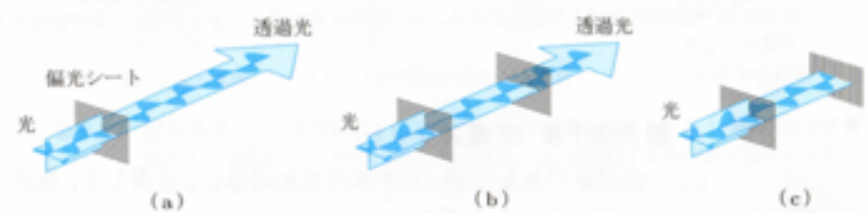


図 5.67　偏光シート　(a) 偏光シートは光の偏光方向を選び出す．(b) (c) 偏光シート2枚を通過するときは，偏光方向が合わないと通過できない．

Topic　立体映像をみせる偏光板メガネ

人間は左右の目の受け取る光のわずかな角度差で立体感覚をもつ．映画館などで配られる立体映像視聴用のメガネの中には，偏光板を利用したものがある．偏光の向きを縦方向と横方向に分けて右目用と左目用のレンズ代わりにする．そうすると，もとの映像に右目用の画像と左目用の画像を混ぜても分離されて目に届くしくみだ．

図 5.68　偏光板を用いた3D映画のメガネ

立体テレビのしくみ ⟹225ページ

偏光と立体メガネ

事例2：武庫川女子大学（物理）

力学，流体，熱，波（水，音，光），電磁気学，放射線

レポート2回と定期試験（何でも参照可）で成績評価

＊講義内容を発展させて考えたこと調べたことを説明せよ

＊寺田寅彦のエッセイを読み，自分で考えたことを報告せよ
＊ニセ科学の題材を調べ，騙されないためには何が必要か.

事例2：武庫川女子大学（宇宙物理）

宇宙の大規模構造，ケプラー・ニュートンからアインシュタインへ
相対性理論，量子力学，膨張宇宙論，現代の宇宙物理学

レポート2回と定期試験（何でも参照可）で成績評価

＊自分で問題をつくり，解答例を示せ.

＊地球外知的生命体はいるか，地球外生命体はいるか，考えよ
＊朝永「光子の裁判」をまとめ，不確定性原理を解説せよ.

http://www.oit.ac.jp/is/~shinkai/mukogawa/

事例3：西宮市生涯教育（物理）

「日常は物理で満ちている　～こんなところに自然法則～」

2015年度宮水学園マスター講座　前期

1クラス　40名（市内在住の60歳以上の方限定）

③日常は物理で満ちている～こんなところに自然法則～（西宮湯川記念事業30周年記念）

1．講師

真貝　寿明（しんかい　ひさあき）氏〔大阪工業大学　情報科学部教授〕

2．内容

夕空にひときわ明るく輝く金星が、星座盤に描かれていない理由は何でしょうか。足踏み揃えて吊り橋を渡
でしょうか。虹は何色からできているのでしょうか。

身近なところにあるトピックから、背後にある物理学を解説します。ほんの一握りの法則で、分子運動から
まで説明してしまう物理学の魅力をお伝えするとともに、最先端の物理学についても紹介します。

3．曜日・時間

金曜日　10:30 ～12:00

回	日程	テーマ
1	5/ 8	カレンダーの物理――惑星運動を巡って
2	5/22	おもちゃの物理――長く回転続けるコマ
3	6/ 5	乗り物の物理――空気抵抗と闘う乗り物
4	6/19	気象の物理――ペットボトルで雲を作る
5	7/ 3	台所の物理――山の上でご飯を炊く方法
6	7/17	音の物理――足踏み揃えて吊り橋渡るな
7	8/ 7	光の物理――光輪の正体は丸い虹なのか
8	8/21	電気製品の物理――ICカードに寿命なし
9	9/ 4	原子核の物理――核融合と核分裂の果て
10	9/18	タイムマシンの物理――相対性理論入門

http://www.oit.ac.jp/is/~shinkai/nishinomiya/

事例3：西宮市生涯教育（物理）

「日常は物理で満ちている　～こんなところに自然法則～」

2015年度宮水学園マスター講座　前期

1クラス　~~40~~名（市内在住の60歳以上の方限定）

60名

たいへん熱心．

（席が前から埋まる．

10分前に全員揃う．）

質問も多数．

（ただし講義内容とは無関係）

テキストをきちんと読んでくれる．

回	日程	テーマ
1	5/ 8	カレンダーの物理——惑星運動を巡って
2	5/22	おもちゃの物理——長く回転続けるコマ
3	6/ 5	乗り物の物理——空気抵抗と闘う乗り物
4	6/19	気象の物理——ペットボトルで雲を作る
5	7/ 3	台所の物理——山の上でご飯を炊く方法
6	7/17	音の物理——足踏み揃えて吊り橋渡るな
7	8/ 7	光の物理——光輪の正体は丸い虹なのか
8	8/21	電気製品の物理——ICカードに寿命なし
9	9/ 4	原子核の物理——核融合と核分裂の果て
10	9/18	タイムマシンの物理——相対性理論入門

http://www.oit.ac.jp/is/~shinkai/nishinomiya/

事例X：西宮市生涯教育（宇宙物理）

「宇宙はここまで理解された　～宇宙物理学入門～」

2016年度西宮市生涯学習ラジオ講座（全10回，FMさくら）

講義予定

第 1 回	6 月	湯川博士の業績と日本の宇宙物理学
第 2 回	7 月	宇宙の大規模構造
第 3 回	8 月	宇宙の理解 (1) ケプラーからニュートンへ
第 4 回	9 月	宇宙の理解 (2) アインシュタイン
スクール	10 月	相対性理論入門
第 5 回	10 月	トピック (1) 超新星爆発
第 6 回	11 月	トピック (2) ブラックホールと重力波
第 7 回	12 月	トピック (3) 膨張宇宙の発見とインフレーション宇宙
第 8 回	1 月	トピック (4) ダークマターとダークエネルギー
第 9 回	2 月	トピック (5) 第 2 の地球はあるのか
第 10 回	3 月	受講者の質問に答えて

http://www.oit.ac.jp/is/~shinkai/nishinomiya/radio.html

平成28年度 西宮市生涯学習大学ラジオ講座

宇宙はここまで理解できた
ー宇宙物理学入門ー

☞**講　　師**　真貝　寿明（しんかい　ひさあき）先生（大阪工業大学情報科学部　教授）

☞**募集対象**　どなたでも受講できます。

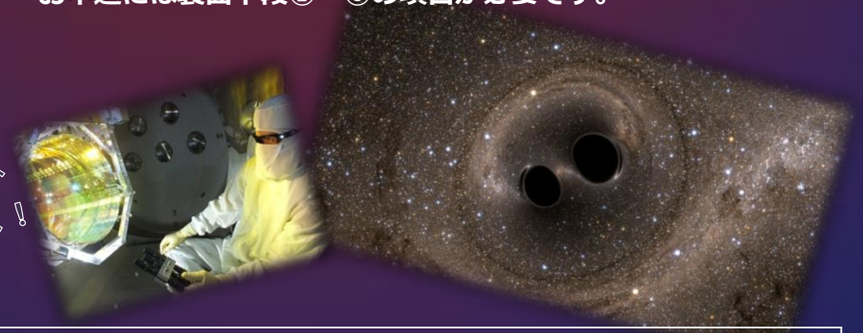
☞**講座内容（講師より）**
　巨大な望遠鏡や人工衛星による観測が進み、この20年間で私たちの宇宙に対する理解は大きく進展しました。アインシュタインが一般相対性理論を提唱して100年が経ち、本年2月には予言されていた重力波がようやく観測されて、初めてブラックホールの存在も確かめられました。
　本講座では、歴史的な経緯も含めて、宇宙がどこまでわかってきたのか、その概略をお話しします。

☞**学習方法**
(1)開講前（５月下旬）に送付される専用テキストで予習の上、
　①さくらＦＭ（78.7MHz）の放送を聴く（裏面放送日程参照）。
　　放送が入りにくい地域の方、開講後に申し込まれた方は、
　②事務局が貸し出す録音カセットテープを聴く。または、
　③インターネット上の音声配信を聴く。
　※録音カセットテープをご希望の方は、下記問合せ先までご連絡ください。
(2)講義の感想等を、テキストに同封のはがきで事務局にお送りください。
　　7回以上提出された方には、修了証書をお送りいたします。

☞**受 講 料**　3,000円（テキスト料・郵送料・スクーリング講座参加料を含みます）
　お申込み受付後、納付書をお送りいたします。
　指定の金融機関でご納付ください。

☞**申　　込**
(1)期間：平成29年3月下旬まで、随時受付いたします。
(2)方法：電話、郵便、またはインターネット（市ホームページ、または下部のQRコードから）でお申込みください。
　お申込には裏面下段①～⑥の項目が必要です。

受講者専用テキストには写真や資料が満載！講座が何倍にも楽しく、何倍にもわかりやすく！



ー問合せ・申込み先ー
〒662-0911　西宮市池田町11-1　フレンテ西宮4階
西宮市生涯学習推進課　ラジオ講座担当
【TEL】0798-35-5166　【E-mail】vo_daishou@nishi.or.jp
【市HP】「楽しむ・学ぶ」→「生涯学習」→「生涯学習ラジオ講座」

申込フォームへのQRコード

（画像出典） CALTECH / MIT / LIGO LABORATORY / REUTERS / AFLO　　（QRコードは(株)デンソーウェーブの登録商標です）

放送日程

回	テーマ	【本放送日】日曜 8:30～9:00	【再放送日】火曜 20:30～21:00
1	湯川博士の業績と日本の宇宙物理学	6/5	6/7
2	宇宙の大規模構造	7/3	7/5
3	宇宙の理解(1)ケプラーからニュートンへ	8/7	8/9
4	宇宙の理解(2)アインシュタイン	9/4	9/6
	スクーリング講座「相対性理論入門」 【日時】9/25（日）14:00～16:00 【会場】西宮市大学交流センター大講義室 （西宮市北口町　ACTA西宮東館6階）	講師のお話を直接聴ける教室講座です	
5	トピック(1)超新星爆発	10/2	10/4
6	トピック(2)ブラックホールと重力波	11/6	11/8
7	トピック(3)膨張宇宙の発見とインフレーション宇宙	12/4	12/6
8	トピック(4)ダークマターとダークエネルギー	1/8	1/10
9	トピック(5)第2の地球はあるのか	2/5	2/7
10	受講者の質問に答えて	3/5	3/7

講師紹介

真貝　寿明（しんかい　ひさあき）氏
大阪工業大学 情報科学部 情報システム学科 教授、
武庫川女子大学 非常勤講師、理化学研究所 客員研究員。
　主な研究分野は一般相対性理論・宇宙論。研究者としては湯川秀樹博士の曾孫弟子にあたる。最近の研究は、高次元ワームホール、修正重力理論のダイナミクスなど。
　平成27年度は、西宮市宮水学園マスター講座「日常は物理で満ちている」を担当した。一般向けでは、ボランティア団体『てんもんぶ』の組織員として、天体観望会やプラネタリウム解説などを行っている。
【著書】
- 『日常の「なぜ」に答える物理学』（森北出版）
- 『ブラックホール･膨張宇宙･重力波　一般相対性理論の100年と展開』（光文社新書）
- 『図解雑学 タイムマシンと時空の科学』（ナツメ社）
- 大学での数学教科書『徹底攻略』シリーズ（共立出版）

雑誌『ニュートン』『子供の科学』などへの編集協力も多数。

受講者特典

☞**読んで書き込んでよくわかる！**
ラジオ講座専用テキストをお送りいたします。

☞**繰り返し聴いてよくわかる！**
講座期間中、放送済みの講義はインターネット上で何度でもお聴きいただけます。
（受講者専用のパスワードが必要です）

☞**講師に聞いてよくわかる！**
講師のお話を直接聴ける「スクーリング」を受講できます（質疑応答実施予定）。また、受講者用はがきでご提出いただいた主な質問に対し、10回目の放送で講師が回答します。

受講申込用紙

電話、郵便、またはインターネットでお申込み下さい（下記6点が必要項目です）。
この用紙を切り取って郵送していただいても結構です。

①氏名(ふりがな) ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　②年齢 ＿＿＿＿ 歳

③郵便番号 ＿＿＿＿―＿＿＿＿　④住所 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

⑤電話番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

⑥当講座を知ったきっかけ　市政ニュース・市HP・チラシ・宮水学園・その他（　　）
（該当するものに○印をお願いします）

2	放送日	平成 28 年 7 月 3 日 (日)	再放送日	平成 28 年 7 月 5 日 (火)
	テーマ	**宇宙の大規模構造**		

太陽系から銀河系，そして銀河団へ．大きなスケールで階層構造をもつ宇宙を紹介します．巨大望遠鏡の建設や人工衛星による観測によって，より遠く・より詳細な・より多角的な観測が進み，日々，新しい事実が報告されています．

2.1 太陽系

■月

一番身近な天体である月は，直径が地球の約 1/4 で，地球からの距離は約 38 万 km（地球の直径の約 30 倍）にある．地球の大きさを 10cm のボールとすると，月はピンポン球程度の大きさで，地球から 3.8m 先にあることになる（表 2.1 にデータあり）．

月は地球のまわりを 1 ヶ月かけて周回している（正確には地球は太陽の周りを公転しているので，それとともに動いている）．月は，いつも同じ面を地球に向けているので，我々は月の裏側を見ることができない．これは，地球が月を引っ張る力（重力）が月にとって非常に大きく，月が自由に回転できないことが理由である（潮汐力固定という）．

宇宙航空研究開発機構 (JAXA) の人工衛星「かぐや」は，2007 年から 1 年半の間，月を周回して詳細な観測を行った．その映像によると，月の裏側は，隕石の落下が多くて，かなり凸凹である．

図 2.1: 月

表 2.1: 地球・月・太陽のデータ

		およその値	詳しい値	地球の何倍か
地球	赤道半径	6378 km	6378.137 km	–
	極半径	6357 km	6356.752 km	–
	質量	6.0×10^{24} kg	5.972×10^{24} kg	–
月	半径	1734km	1734.15 km	0.27 倍
	質量	7.3×10^{22} kg	7.347673×10^{22} kg	0.0123 倍
太陽	半径	70 万 km	696019 km	109 倍
	質量	2.0×10^{30} kg	1.9891×10^{30} kg	33 万 3000 倍
地球–月	平均距離	38 万 km	384400 km	–
太陽–地球	平均距離	1 億 5000 万 km	1 億 4960 万 km	–

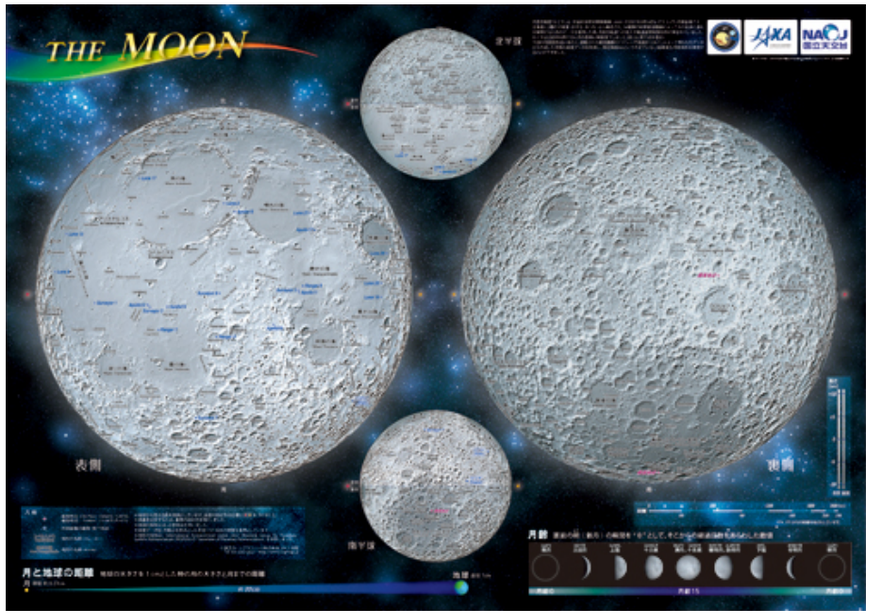


図 2.2: 月探査機「かぐや」のデータから作成された月面図（JAXA が提供しているポスター）

コラム

コラム 2 (月の裏側に『海』がないのは何故か)

月の表側（地球側）と裏側では凹凸が大きく異なっている．また，裏側には濃い色の『海』と呼ばれる部分がない．1959 年の旧ソビエト連邦が打ち上げた探査機「ルナ 3 号」の画像以来，「月の裏側高地問題（Lunar Farside Highlands Problem）」と呼ばれている問題である．この謎に対して最近，『月の表側と裏側では，月の形成および進化の過程で地殻の厚みに差ができたため，裏側には『海』が存在していないのだ』という研究が発表された．

月の起源として有力とされているのは，巨大衝突説である．地球が形成されて間もないころ，火星サイズの天体が地球に衝突して破壊され，その破片から月が生まれたとされている．形成されて間もないころの月は地球からの距離が現在の 20 分の 1 から 10 分の 1 ほどだったと考えられている．今回の研究は，この状況で，月が地球に向けた方向に潮汐力で固定され，月の表側だけが，2500°C 以上と高温だった地球からの放射熱を浴びた，とするモデルを提唱したことである．

月の裏側はゆっくりと冷えていった一方で，表側はどろどろに溶けた状態が続く．アルミニウムとカルシウムは冷たい月の裏側の大気中で凝縮し，それから数千年，数百万年経ち，それらの物質は月のマントル中でケイ酸塩と結合して斜長石を形成した．そして，それが最終的に表面に移動して，地殻が形成されたという．つまり月の裏側の地殻は，より鉱物が多く，より厚くなったのだ，という．

今では月は完全に冷えて，表面下も融解してはいない．だが，月の裏側に天体が衝突すると，厚い地殻に穴を開けることはなく，谷やクレーターや高地が作られるのみになった．一方で，地球の表側では，大量の玄武岩質溶岩が放出され，現在見られるような月の海が形成されたと考えられるという．

[A. Roy *et al.* 2014 Astrophys. J. 788, L42 (2014)]

■ブラックホールの発見

星の一生の最後には，大爆発を起こして，中性子星になったり，ブラックホールになる可能性がある．ブラックホールのような無限に大きな重力を持つ天体は，数式の上からは予言されてはいたが，天文学者たちが星の進化のシナリオとして認めるまでには長い年月を要した．1930 年代，若きチャンドラセカールが，相対性理論と量子論を駆使して白色矮星の星の質量に上限があること（つまり大きな質量の星は際限なく潰れていくこと）を導いた際，当時天文学の大御所であったエディントンがその結論を嫌って執拗に邪魔をしたエピソードも知られている．

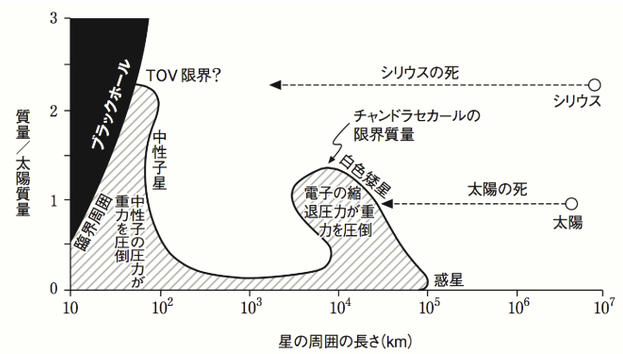


図 6.4: 横軸に星の半径、縦軸に星の質量を太陽の質量の何倍かで表した図．燃え尽きた星は、重力によって縮みはじめる。図では右から左へと移動してゆくことになる。電子の縮退圧で支える星を白色矮星といい，中性子の縮退圧で支える星を中性子星という．それぞれの星として支えられる質量には上限値がある．支えられないほど大きな星は，そのまま重力崩壊を続けることになる。([2] より)

図 6.3: Subrahmanyan Chandrasekhar (1910–1995)

シュヴァルツシルトのブラックホール解は，「球対称・静的」で「真空」という仮定のもとで得られた解だった．それから 50 年近く経って，1963 年にカーが回転しているブラックホール解を発見した．静止しているブラックホールよりも，回転しているブラックホールの方が現実的に存在していると考えられることから，カー解はその後のブラックホール研究を大きく前進させることになった．

ブラックホール自身は光を出さないので観測できない．しかし，周囲のガスや星を強い重力で引き寄せることから，間接的に発見することができる．1964 年には，はくちょう座に，強力な X 線を放つ謎の天体 X-1 が発見された．放出されるエネルギーから見積もると，この天体の中心にはブラックホールがあると考えられている．

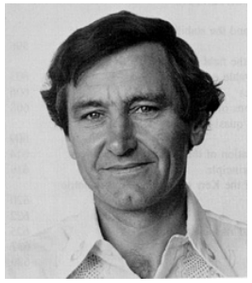


図 6.5: Roy P. Kerr (1932–)

【6. トピック (2) ブラックホールと重力波】 6.1. ブラックホール

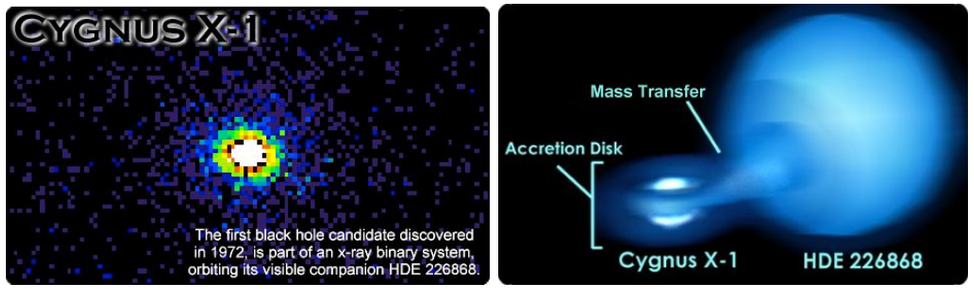


図 6.6: はくちょう座にある X-1 と呼ばれる強い電波源天体は，ブラックホールであると考えられている．(http://library.thinkquest.org/25715/discovery/binary.htm)

現在では，ブラックホールの候補天体は 30 個ほどある．また，最近では我々の銀河の中心（射手座の方向）にも巨大なブラックホールがあると考えられている．銀河中心の星が多数楕円運動していることが分かっており，中心のブラックホールの質量は太陽の 420 万倍と見積もられている．このような巨大ブラックホールは，星が潰れてできるブラックホールとは別のメカニズムでできるはずだが，今でも確実な理論はできておらず，研究が続いている．

OnePoint

ブラックホールは巻き込んでいく周囲のガスを激しく光らせるので，天文学的には明るい天体である．

コラム

コラム 9 (命名の達人　ホイーラー)

ジョン・アーチボルト・ホイーラーは，核融合・相対論・量子論の広い分野で活躍した伝説的な物理学者であり，ファインマン (Richard Feynman (1918–88)) (場の理論)， ソーン (Kip Thorne (1940–)) (相対論)，エヴェレット (Everett (1930–82)) (多世界解釈) らの指導教官だった． ボーア や アインシュタインと交流をもった最後の生き証人でもあった．

ホイーラーは，「ブラックホール」の命名者としても知られている．これ以外にも「ワームホール」や「時空の量子泡 (quantum foam)」，宇宙の初期に量子論が関わってくる「プランク時間」や「プランク長さ」など今では物理学者が誰でも使う言葉も命名している．また，「ブラックホールには 3 本しか毛がない (A BH has no hair)」とか，ファインマンの経路積分法を「歴史の和 (sum over histories)」と噛み砕いて表現し，物理のイメージを分かりやすく伝えることも得意だった．ちなみに彼は一般相対性理論を「空間が物質にどう動くかを教え，物質が空間にどう曲がるかを教える理論」と説明している．

図 6.7: John A. Wheeler (1911–2008)

8.2　ダークマター：見えていない質量の存在

■銀河回転速度の問題

1932 年，オランダの電波天文学者のオールトは，我々の銀河系近傍の星の運動を調べていて，銀河面には見えている以上の多くの星（質量）が存在する，と報告した．翌年には，アメリカの天文学者ツビッキーが，かみのけ座銀河団の運動を観測し，固有運動から，見えている星の 400 倍もの質量が存在するのではないか，と見積もっている．

Jan H. Oort (1900-92)
Fritz Zwicky (1898-1974)

このミッシングマス問題 (missing mass) を決定的にしたのは，アメリカのルービン である．彼女は，1970 年に，いくつもの楕円銀河の観測を行い，それぞれの銀河の回転速度から，光っている星の 6 倍以上の物質が存在している，と報告した（図 8.4）．見えていない物質のことを**ダークマター**と呼ぶ．その正体は現在のところ不明であるが，宇宙論を議論するうえで，重要な構成要素となっている．

図 8.3: Vera C. Rubin (1928–)

ダークマター
(dark matter)

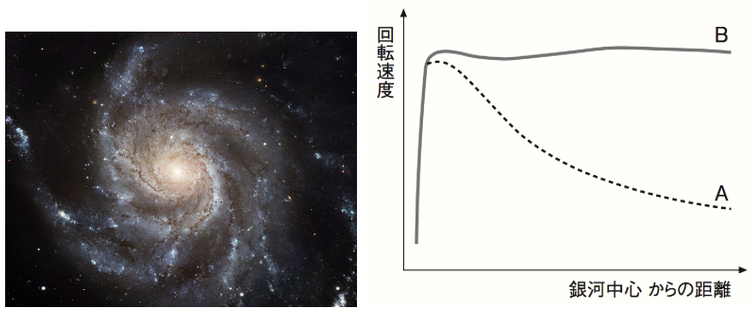


図 8.4: 〔左〕楕円銀河 Messier 101 (NGC 5457).〔右〕見えている星の質量から予想される銀河の回転速度は点線の (A) のグラフ．実際に観測されているのは (B) のグラフ．(B) を説明するためには，ダークマターの存在を仮定するのが自然である．

■重力レンズ効果によるダークマターの検出

最近では，ダークマターによる重力レンズ効果によって遠方の銀河の像が歪められる具合を観測できるようにもなってきた．重力レンズ効果は，大きな質量の近くを通る光の経路が曲がる現象である．図 8.5〔左〕は，シミュレーションで多数の銀河分布を計算したあと，光の経路を調べたものだ．銀河には見える星以上の質量のダークマターが含まれているため，光がゆらぐように進むことがわかる．銀河の像のゆがみ方から，ダークマターがどこにどの位あるのかを逆算しようとする作戦だ．

重力レンズ効果
⟹ §B.5

図 8.5〔右〕は，ハッブル宇宙望遠鏡と X 線天文衛星「チャンドラ」の観測をもとに，銀河どうしが衝突している場所の高温ガスとダークマターの分布を示したものだ．青い部分がダークマター分布である．ダークマターが銀河と離れずに分布していることや，ダークマター同士もあまりぶつからないことがわかる．

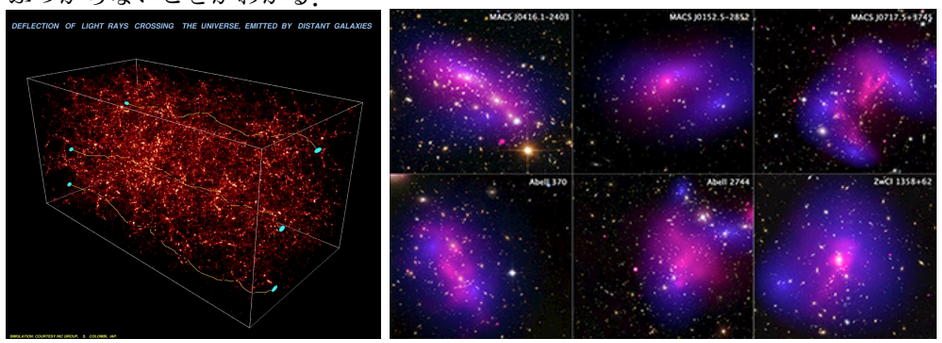


図 8.5: 〔左〕銀河団のシミュレーション結果に，光の進む様子を描き込んだ図．ダークマターを含んだ銀河によって，光の経路が歪む様子がわかる．
[http://www.cfht.hawaii.edu/News/Lensing/]
〔右〕銀河団の衝突による質量分布．ピンク色が高温ガスの分布，青い部分がダークマターの分布を表す．ダークマターが銀河と重なって分布していることがわかる．
[http://hubblesite.org/newscenter/archive/releases/2015/10/full/]

■ダークマターの検出実験

ダークマターの候補としては，素粒子論と天体物理学からさまざまなものが提案されている．宇宙マイクロ波背景放射が観測されるようになった**宇宙の晴れ上がり**の時（宇宙誕生後 38 万年の時）に，運動エネルギーが質量エネルギーを上回っていたものを熱い暗黒物質 (HDM)，そうではないものを冷たい暗黒物質 (CDM) と呼ぶ．現在の宇宙論の本命は CDM 優勢の宇宙である．

宇宙マイクロ波背景放射の発見 ⟹ §7.2

熱い暗黒物質 (hot dark matter, HDM)
冷たい暗黒物質 (cold dark matter, CDM)

しかし，実際にダークマターの正体は何なのかは不明である．以前はニュートリノが有力候補であったが，宇宙観測で得られる結果をニュートリノでは説明できないことから現在は候補から外されている．現在，多くの研究者は，未知の素粒子を見つけることがダークマターの直接検出にもつながると考えている．日本では，岐阜県神岡の地下施設に約 1 トンの液体キセノン (-100°C) を用いた検出器が設置され，ダークマターの直接検出実験が始まっている（**XMASS（エックスマス）実験**）．

講義メモ欄 .....

最近よく耳にする教育用語

「アクティブ・ラーニング」

座学で終わらせない．手を動かして学ばせよう．議論させよう．

「反転授業」

しっかり予習させて，授業ではその確認を主としよう．

「ICT教育」 Information and Communication Technology

オンライン教育と対面教育を融合させよう．

「教師+コーディネーター+ファシリテーター」

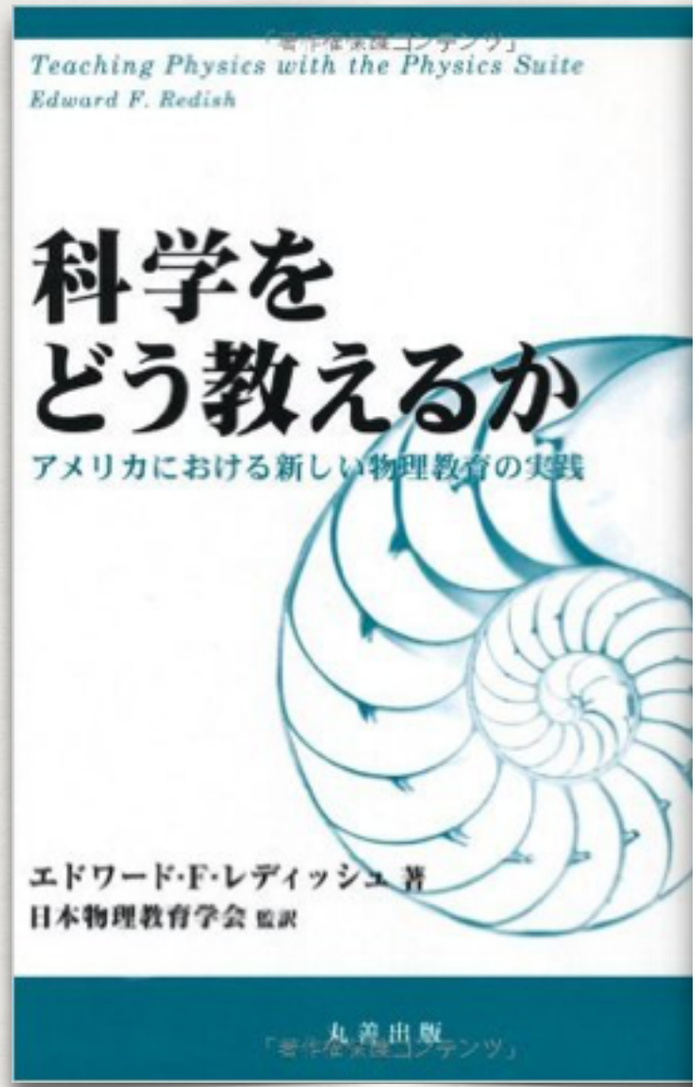
授業を上手く仕切るスキルを身につけよ．

学ぶ者が興味をもつ題材を豊富に

学習の流れがわかる

すぐわかる＋考えさせる

電子媒体をどう活かす？



科学をどう教えるか；アメリカにおける新しい物理教育の実践

E. F. Redish著，日本物理教育学会監訳

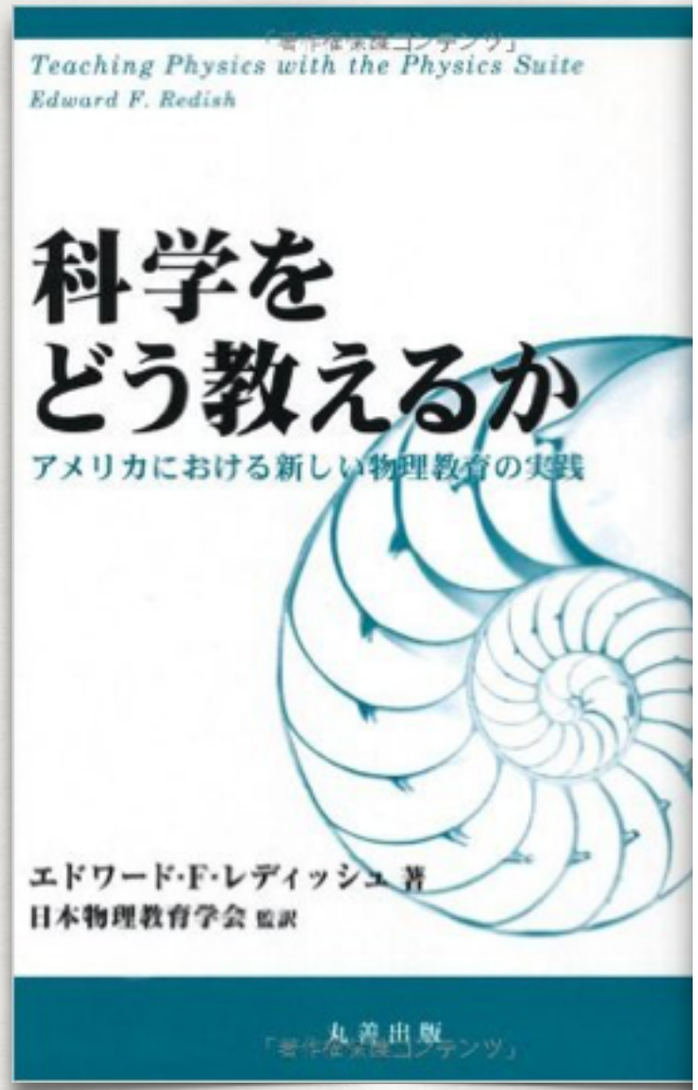
丸善出版，東京，2012，xiii＋327p，21×15 cm，本体3,800円［一般向］ISBN 978-4-621-08550-9

紹介者：真貝 寿明(大工大情)

原題は 「Teaching Physics with the Physics Suite」．ここでの「物理スイート」とは，著者が中心となってつくりあげた「活動を基盤とする物理 （activity-based physics）」の教材群を指す．本書は多岐にわたる教材群の紹介を目的としているが，前半では，物理教育の方法論や教育効果の評価手法について，調査と経験にもとづいた一般的な話を展開する． 教材開発の発端は，「科学者や技術者になることを目指してはいるが物理学者になるとは限らない学生に対して素養としての物理教育」の重要性が増したこと．及び，認知心理学から「個人の学習は，自らの手を動かしたり議論を通じることで，知識を再構築し，創造的な応答を効率的に生み出す」という原理が明らかになってきたこと，と述べる．そして，物理の授業ターゲットをおおまかに3つに分類（概念的な物理 / 代数ベースの物理 / 微積ベースの物理）し，授業の進行方法もおおまかに3つに分類（講義・演示実験を基本とする方法/演習・学生実験を基本とする方法/ワークショップによる探求型の方法）して，いずれの組み合わせでも利用できるような教材を提供しようとするプロジェクトとなっている． 著者は「理論原子核物理を専門としていたが，1991年に専門を物理教育研究に専念した」と自己紹介する．本書は「物理スイート」の理論的な武装書でもある．学生に「能動的な学習」をさせる機会を与え，実験したり議論をさせたりしても，物理教育の目的が達せられる保証はない．そこで，教員やチューターがいかに「橋渡し」をするかがキーになる．本書では，学生がどのような誤解や反応をするのか，を具体的な問題例から詳しく解説し，チューターの役割や授業に適した机の配置まで一連の「教育研究」の結果が紹介されている． 本書で登場する問題例は，中学・高校レベルの物理の内容だが，著者らによる「物理スイート」の他書1）には，現代物理の教材として量子力学のワークシートまで存在する．定性

物理学会誌
新著紹介
2013年5月
(webで読めます)

http://www.jps.or.jp/books/newbook/rev_2013.php



科学をどう教えるか；アメリカにおける新しい物理教育の実践

E. F. Redish著，日本物理教育学会監訳

丸善出版，東京，2012，xiii+327p，21×15 cm，本体3,800円［一般向］ISBN 978-4-621-085

紹介

原題
中心
本書
価手
術者
育」
じる
こと
の物
る方
合わ
核物
理ス
議論
に「
な問
果が
「物

「物理スイート」の他書1）には，現代物理の教材として量子力学のワークシートまで存在する．定性的な理解を中心とする内容であるが，1つの物理教育の方向を示す試みといえよう．カリキュラムに追われる日本の教育現場で，このような時間をかけた教育がどれだけ実施できるかは疑問だが，発見や驚きの体験がその後の学習の糧になることを否定する教育者はいないだろう．本書にちりばめられたヒントに応答する教育者も多いことだと思う．大学においても学生に学習意欲を持たせるように工夫を凝らす時代になった．評者の大学でも「PBL（project-based learning）」を揃えつつあるが，板書だけの講義よりも，何か1つでも学生の手を動かす・考える題材を与える講義が求められている．本書で，アメリカでなされているこのようなプロジェクトの先行事例を知れることは貴重である． 翻訳は，日本物理教育学会の有志の方が行い（30名の訳者と21名の監訳者リストあり），6年にわたる研究・調査・実践の後に出版に至ったという．読みやすい日本語/対応する英語表記の掲載/多くの訳注など，数々の工夫がなされている．ただ，（原著に忠実に）独特の略語が多用されているのが，本文を読みにくくしている感があるので，略語一覧表もあれば有用だった．また，原著にはCD-romが付属していて，ワークシートのサンプル（Action Research Kit）・宿題問題例・詳細な参考文献リスト等が集録されていた．翻訳版では残念ながらCD-romはなく，代わりにリンク先が紹介されている．（興味ある読者は，著者のグループのwebページ2）で一部が公開されているので，参照されたい．）今後，教材の翻訳が引き続いて行われるのかどうかは不明であるが，日本の学生に対して実践したノウハウが蓄積した暁には，まとまった報告書として公開されることを期待したい．

参考文献

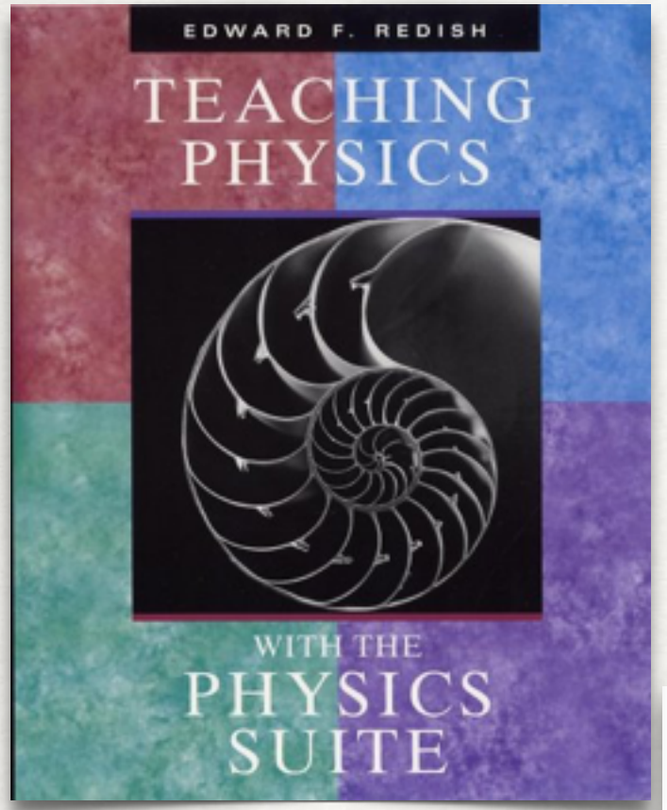
1）M. C. Wittman, R. N. Steinberg and E. F. Redish: The Physics Suite; Activity-based tutorials; vol. 2 Modern Physics （Wiley & Sons, 2004）.

2）http://www.physics.umd.edu/perg/

（2012年12月30日原稿受付）

物理学会誌
新著紹介
2013年5月
(webで読めます)

http://www.jps.or.jp/books/newbook/rev_2013.php



Teaching Physics with the Physics Suite

Edward F. Redish

Home | Action Research Kit| Sample Problems | Resources | Product Information

Problems Sorted by Type | Problems Sorted by Subject | Problems Sorted by Chapter in UP

Using the moon to find the density of the earth

a. Use your knowledge of circular motion and Newton's law of universal gravitation to find an equation expressing the mass of the earth, *M*, in terms of the distance from the center of the earth to the moon, *r*, the period of the moon in its orbit, *T*, and Newton's universal graviational constant, $G \approx 2/3 \times 10^{-10}$ N-m^2/kg^2.

b. Using your result for part (a), and the fact that the volume of a sphere is $(4/3)\pi R^3$, find an equation for the density of the earth ρ (rho) in terms of *G*, *T*, *r*, and *R* = the radius of the earth.

c. Using your result for part (b), estimate the density of the earth. (The distance from the center of the earth to the moon is about one-quarter of a million miles.) How does this compare to the density of water? a rock? a chunk of iron?

The fact that if you know *G*, that standard astronomical knowledge such as the distance to the moon and its period allows you to measure the mass of the earth is why the experiment to measure *G*, done by Cavendish in 1789, is often referred to as "weighing the earth."

The gravity of the situation

Answer each of the items below by selecting the best possible choice to complete the sentence.

(A) The moon orbits the Earth in a nearly circular path and does not fall to the earth because

1. It feels the Earth's gravitational pull.
2. The net force on it is zero.
3. It is beyond the pull of Earth's gravity.
4. It is being pulled by the Sun and planets as well as by the Earth.
5. It is moving with an appropriate velocity.
6. None of the above.

(B) A news station shows a video of an astronaut in a space station. She is demonstrating a tool that she used to make a repair to the station during a spacewalk. When she releases the tool it floats in the air next to her. The reason it does this is:

1. There is no gravity in the space station.
2. The tool and the astronaut are both in free fall.
3. The gravity of the astronaut cancels the gravity of the earth on the tool.
4. The net force on the tool is zero.
5. They are both moving at the same high velocity.

(C) In Star Wars IV, Luke Skywalker is seen dropping an object on the planet Tatooine. If the video is analyzed to determine the acceleration of the falling object, one discovers that g = 9.80 m/s^2, the same as one would find on earth. However, the radius of Tatooine is approximately twice that of the earth. A justification that $g_{Tatooine} \approx g_{Earth}$ is

1. The value of g is a constant in all situations.
2. Tatooine has 2 suns and 3 moons.
3. The mass of Tatooine is four times that of earth and cancels the effect of the larger radius.
4. Luke is using his Jedi powers to alter the value of g.
5. The movie was outsourced and actually filmed in Bollywood (Mumbai, India).

GR11

多人数で取り組む
公文式教材のよう

http://www.physics.umd.edu/perg/

これからの教科書・・・

学ぶ者が興味をもつ題材を豊富に

学習の流れがわかる

すぐわかる＋考えさせる

電子媒体をどう活かす？

一般向け概説書

ギャップを感じる

新たな試み必要

天文マニア養成マニュアル
福江純編
恒星社厚生閣，2010

ゼミナール宇宙科学
戎崎俊一，東京大学出版会，1995

大学生向け教科書

院生向け教科書

レビュー論文