注意	1. 右の欄を正確に記入すること。 2. 所属を○で囲むこと。 3. 前記「1.2」を守らない答案は採点されないことがある。	試験日		所属	部	情報科学部				学生番号	—
		座席番号	—		学科	IC	IS	IM	IN	フリガナ	組
					年次	1	2	3	4	氏名	

科目等履修生

微積分学I (真貝) 第3回中間テスト解答例 (Jセット)

$\boxed{1}$ ライプニッツの公式

$$(f\cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}\cdot g^{(n-k)}$$

を使う

$$f(x)=x^2+2x+1,\quad g(x)=\cos x$$

とすると

$$f'(x)=2x+2,\quad f''(x)=2,\quad f^{(k)}(x)=0\ (k\geq 3)$$

より

$$y^{(n)} = \binom{n}{0} f\, g^{(n)} + \binom{n}{1} f' g^{(n-1)} + \binom{n}{2} f'' g^{(n-2)}$$

$$= 1\cdot(x^2+2x+1)\cdot\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+\, n\cdot(2x+2)\cdot\cos\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+\, \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\cdot\cos\left(x+(n-2)\frac{\pi}{2}\right)$$

ここまででもOK.

$$= \{x^2+2x+1-n(n-1)\}\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right) + 2n(x+1)\cos\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right) \;/\!/$$

$\boxed{2}$ (1) $f(x)=e^{3x},\quad f(0)=1$

$f'(x)=3e^{3x},\quad f'(0)=3$

$f''(x)=3^2e^{3x},\quad f''(0)=9$

などから $f^{(n)}(0)=3^n$

したがって

$$e^{3x} = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k}{k!}x^k = 1+3x+\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x^3+\cdots$$

(2) $f(x)=(1+x)^n,\quad f(0)=1$

$f'(x)=n(1+x)^{n-1},\quad f'(0)=n$

$f''(x)=n(n-1)(1+x)^{n-2},\quad f''(0)=n(n-1)$

などから $f^{(k)}(x)=\dfrac{n!}{(n-k)!}$

したがって

$$(1+x)^n = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!\,k!}x^k = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots$$

(3) $\sqrt{10}=\sqrt{9+1}=\sqrt{9\left(1+\frac{1}{9}\right)} = 3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{1/2}$

$$\left(1+\frac{1}{9}\right)^{1/2} = 1+\frac{1}{2}\frac{1}{9}+\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^2+\cdots$$

$$= 1+\frac{1}{18}-\frac{1}{8}\frac{1}{81}+\cdots$$

$$= 1+\frac{1}{18}\left(1-\frac{1}{36}\right)+\cdots$$

$$= 1+\frac{1}{18}\,\frac{35}{36}+\cdots$$

$$= 1.0540\cdots$$

$\therefore\ \sqrt{10} \fallingdotseq 3\times 1.0540 = 3.162$

(本当の値は $3.16227\cdots$)

$\boxed{3}$ (1) $I_1 = -\cos x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}e^{3x}+C$

(Cは積分定数．以下同じ)

(2) $I_2=\displaystyle\int\frac{\cos x}{\sin x}dx = \int\frac{(\sin x)'}{\sin x}dx$

$= \log|\sin x|+C.$

(3) $I_3=\displaystyle\int\frac{(e^x+e^{-x})'}{e^x+e^{-x}}dx = \log(e^x+e^{-x})+C$

必ず真数は正なので絶対値不要

(4) 部分分数に分ける

$$\frac{1}{x^2-9}=\frac{1}{(x-3)(x+3)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+3}$$

として、A, Bを求める．

右辺を通分した分子 $=(A+B)x+3(A-B)$

より $\begin{cases}A+B=0\\3A-3B=1\end{cases}$ となるA, Bを求めると $A=\frac{1}{6},\ B=-\frac{1}{6}$

したがって

$$I_4=\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x-3}-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+3}$$

$$=\frac{1}{6}\log|x-3|-\frac{1}{6}\log|x+3|+C$$

$$=\frac{1}{6}\log\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$$

(5) 方針1 $x=\tan\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

$$I_5=\int\frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\,\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int\tan\theta\,d\theta=\int\frac{\sin\theta}{\cos\theta}d\theta$$

$$=\int\frac{-(\cos\theta)'}{\cos\theta}d\theta = -\log|\cos\theta|+C$$

θを使わずに答える

$$=-\log\left|\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\right|+C=\frac{1}{2}\log(1+x^2)+C.$$

方針2

$$I_5=\int\frac{\frac{1}{2}(x^2+1)'}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\log(x^2+1)+C.$$

(6) $x=\sin\theta$ とおくと

$\dfrac{dx}{d\theta}=\cos\theta$

x	$0\to 1$
θ	$0\to \pi/2$

$$I_6=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\pi/2}d\theta$$

$$=\left[\theta\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}$$

(7) 部分積分

$$I_7=\int\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'\cdot\log x\,dx$$ と考えて

$$=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\cdot\log x-\frac{1}{n+1}\int x^{n+1}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\cdot\log x-\left(\frac{1}{n+1}\right)^2x^{n+1}+C$$

$\boxed{4}$ 求める体積Vは

$$V=\int_0^{\pi}\pi\sin^2x\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2}\pi^2.$$

所属	科	年・科目等履修生	学生番号	—	氏名