

注 意	1. 右の欄を正確に記入すること。	試験日 —	所属 部 情報科学部	学生番号				科目 等 履 修 生	フリガナ	氏名	組
	2. 所属を○で囲むこと。			IC	IS	IM	IN				
	3. 前記「1.2」を守らない答案は採点されないことがある。			1	2	3	4				

微積分学Ⅰ 第3回中間テスト (Mゼミ) 解答例 <真実>

[1] $f(x) = x^2 - 2x - 1, g(x) = \sin x$ とし.

ライプニッツの公式 $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$ を使う.

$f'(x) = 2x - 2$) であり $k \geq 3$ には $f^{(k)} = 0$ である
 $f''(x) = 2$

また $g^{(n-k)}(x) = \sin(x + (n-k)\frac{\pi}{2})$ である.

よって

$$(f \cdot g)^{(n)} = \binom{n}{0} \cdot f \cdot g^{(n)} + \binom{n}{1} \cdot f' \cdot g^{(n-1)} + \binom{n}{2} \cdot f'' \cdot g^{(n-2)}$$

$$= 1 \cdot (x^2 - 2x - 1) \cdot \sin\left\{x + n\frac{\pi}{2}\right\} + n \cdot (2x - 2) \sin\left\{x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \cdot \sin\left\{x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$= (x^2 - 2x - 1 - n(n-1)) \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + 2n(x-1) \cdot \sin\left\{x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right\} //$$

[2] (1) $f(x) = (1-x)^{-1}$

$f(0) = 1, f'(x) = + (1-x)^{-2}, f'(0) = +1$
 $f''(x) = 2(1-x)^{-3}, f''(0) = 2$
 $f'''(x) = 2 \cdot 3(1-x)^{-4}, f'''(0) = 3 \cdot 2$ などより $f^{(n)}(0) = n!$

よって

$$(1-x)^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k!} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} x^k = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)$$

初項1, 公比xの等比級数の和に一致する.

(2) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$

$f(0) = 1, f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}, f'(0) = \frac{1}{3}$
 $f''(x) = -\frac{2}{9}(1+x)^{-\frac{5}{3}}, f''(0) = -\frac{2}{9}$ であり

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9} \frac{1}{2!} x^2 + \dots = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \dots //$$

$$\sqrt[3]{100} = \sqrt[3]{125 \left(1 - \frac{25}{125}\right)} = 5 \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\cong 5 \cdot \left\{1 + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{5}\right)\right\} = 4.667 \dots //$$
 (本当の値は 4.64158...)

注 意	1. 右の欄を正確に記入すること。	試験日 —	所属 部 情報科学部	学生番号				科目 等 履 修 生	フリガナ	氏名	組
	2. 所属を○で囲むこと。			IC(IJ)	IS	IM	IN				
	3. 前記「1.2」を守らない答案は採点されないことがある。			1	2	3	4				

[3] C を積分定数とする

(1) $I_1 = \int (\sin x + \cos 2x + e^{3x}) dx$

$$= -\cos x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} e^{3x} + C //$$

(2) $I_2 = \int \frac{dx}{\tan x} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$

$$= \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx = \log |\sin x| + C //$$

(3) $I_3 = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$

$$= \int \frac{(e^x + e^{-x})'}{e^x + e^{-x}} dx = \log(e^x + e^{-x}) + C //$$

(常微分法で絶対値不要)

$LT = \pi/2$

$$I_5 = \int \left\{ \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1} \right\} dx$$

$$= \frac{1}{2} \log|x-1| - \frac{1}{2} \log|x+1| + C //$$

$$= \log \sqrt{\left| \frac{x-1}{x+1} \right|} + C //$$

(6) $x = \tan \theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \left. \begin{array}{l} x | 0 \rightarrow 1 \\ \theta | 0 \rightarrow \pi/4 \end{array} \right\} \text{より}$$

$$I_6 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= \int_0^{\pi/4} d\theta = [\theta]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} //$$

(7) $x = \sin \theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta \quad \left. \begin{array}{l} x | 0 \rightarrow 1 \\ \theta | 0 \rightarrow \pi/2 \end{array} \right\} \text{より}$$

(4) $I_4 = \int x^n \cdot \log x dx$

$$= \int \left(\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right)' \cdot \log x dx$$

$$= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \cdot \log x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \log x - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} + C //$$

$$I_7 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta = [\theta]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} //$$

(5) 部分分数分解とす

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \quad \text{と可分}$$

右辺を通分して分子 = (A+B)x + A - B

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \therefore A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}$$

を得る.

[4] 求める面積Vは

$$V = \int_0^{\pi/2} \pi \cos^2 x dx = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) - (0 + 0) \right\} = \frac{1}{4} \pi^2 //$$

所属	科	年	科目等履修生	学生番号	フリガナ	氏名
----	---	---	--------	------	------	----

所属	科	年	科目等履修生	学生番号	フリガナ	氏名
----	---	---	--------	------	------	----