微積分学Ⅰ　第3回中間テスト（Nセット）　解答例　〈真貝〉

1　$f(x)=x^2+x-1$, $g(x)=\sin x$ として ライプニッツの公式

$$(f\cdot g)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}$$

を使う

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=2x+1 \\ f''(x)=2 \end{array}\right)$$ より $k\geqq 3$ に対して $f^{(k)}=0$ である

また $g^{(n-k)}=\sin\left(x+(n-k)\frac{\pi}{2}\right)$ である

ゆえに

$$(f\cdot g)^{(n)}=\binom{n}{0}\cdot f\cdot g^{(n)}+\binom{n}{1}\cdot f'\cdot g^{(n-1)}+\binom{n}{2}\cdot f''\cdot g^{(n-2)}$$

$$=1\cdot(x^2+x-1)\cdot\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)+n(2x+1)\sin\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+\frac{n(n-1)}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cdot\sin\left(x+(n-2)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\left(x^2+x-1-n(n-1)\right)\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)+n(2x+1)\cdot\sin\left(x+(n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\right) \quad /\!/$$

2　(1) $f(x)=(1-x)^{-1}$

$f(0)=1.$　$f'(x)=+(1-x)^{-2}$　$f'(0)=1$

$f''(x)=+2(1-x)^{-3}$　$f''(0)=2$

$f'''(x)=3\cdot2\cdot(1-x)^{-4}$　$f'''(0)=3\cdot2$　などより　$f^{(k)}(0)=k!$

したがって

$$(1-x)^{-1}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k!}x^k=1+\sum_{k=1}^{\infty}x^k\quad\left(=1+x+x^2+x^3+\cdots\right)$$

初項1, 公比xの等比級数の和になっている.

(2) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{2}}$

$f(0)=1.$　$f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$　$f'(0)=\frac{1}{2}$

$f''(x)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$　$f''(0)=-\frac{1}{4}$　より

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\frac{1}{2!}x^2+\cdots=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\cdots \quad /\!/$$

$$\sqrt{150}=\sqrt{144+6}=\sqrt{144\left(1+\frac{6}{144}\right)}=12\left(1+\frac{1}{24}\right)^{1/2}\fallingdotseq 12\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{24}\right)$$

$$=12.25$$

（本当の値は　12.2474⋯）

3　Cを積分定数とする

(1) $$I_1=\int(\sin x+\cos 2x+e^{3x})\,dx=-\cos x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}e^{3x}+C \quad /\!/$$

(2) $$I_2=\int\frac{dx}{\tan x}=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{(\sin x)'}{\sin x}dx=\log|\sin x|+C \quad /\!/$$

(3) $$I_3=\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx=\int\frac{(e^x+e^{-x})'}{e^x+e^{-x}}dx=\log(\underbrace{e^x+e^{-x}}_{\text{（常に正なので絶対値不要）}})+C \quad /\!/$$

(4) $$I_4=\int x^n\cdot\log x\,dx=\int\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'\cdot\log x\,dx$$

$$=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\cdot\log x-\int\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\cdot\log x-\frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1}+C \quad /\!/$$

(5) 部分分数分解として

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$ とすると

右辺を通分した分子 $=(A+B)x+A-B$.

なので $\begin{cases}A+B=0\\A-B=1\end{cases}$　$\therefore\ A=\frac{1}{2},\ B=-\frac{1}{2}$

を得る.

したがって

$$I_5=\int\left\{\frac{1/2}{x-1}-\frac{1/2}{x+1}\right\}dx=\frac{1}{2}\log|x-1|-\frac{1}{2}|x+1|+C \quad /\!/$$

$$=\log\sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}+C \quad /\!/$$

(6) $x=\tan\theta$ とおくと.

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}\qquad\begin{array}{c|c}x&0\to1\\\hline\theta&0\to\pi/4\end{array}$$ より

$$I_6=\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int_0^{\pi/4}d\theta=\left[\theta\right]_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{4} \quad /\!/$$

(7) $x=\sin\theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta\qquad\begin{array}{c|c}x&0\to1\\\hline\theta&0\to\pi/2\end{array}$$ より

$$I_7=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}d\theta=\int_0^{\pi/2}d\theta=\left[\theta\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2} \quad /\!/$$

4　求める体積Vは

$$V=\int_0^{\pi/2}\pi\cos^2x\,dx=\pi\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2x}{2}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/2}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{\left(\frac{\pi}{2}+0\right)-(0+0)\right\}=\frac{1}{4}\pi^2$$