注意	1. 右の欄を正確に記入すること。 2. 所属を○で囲むこと。 3. 前記「1.2」を守らない答案は採点されないことがある。	試験日		所属	部	情報科学部				科目等履修生	学生番号	—
		座席番号	—		学科	IC(IJ)	IS	IM	IN		フリガナ	組
					年次	1	2	3	4		氏名	

微積分学I 第1回中間テスト(Gセット) 解答例 真貝

1 (1) $\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = x$ とおくと

$\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Sin^{-1}の値域

$-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で、この式をみたす x は、$x = \dfrac{\pi}{3}$ である。

(2) $\mathrm{Tan}^{-1}(-\sqrt{3}) = x$ とおくと

$\tan x = -\sqrt{3}$.

Tan^{-1}の値域

$-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲では、$x = -\dfrac{\pi}{3}$.

2 (1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n + 1} = -1.$$

(2) $$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) \times \frac{\sqrt{n^2+n} + n}{\sqrt{n^2+n} + n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2} + n - \cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+n} + n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}$$

3

$$右辺 = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,\frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,\frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

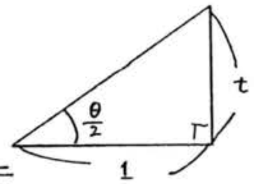
$$= \frac{1}{4}\left\{ e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y} \right\}$$

$$+ \frac{1}{4}\left\{ e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{x+y} - e^{-x-y} \right)$$

$$= \sinh(x+y) = 左辺 \quad /\!/$$

4 $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ は、右図の三角形の辺の比を表すので、



$\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

である。これらより

$$\begin{cases} \sin\theta = \sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right) = 2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2} = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos\theta = \cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right) = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{2t}{1-t^2} \end{cases}$$

となる。

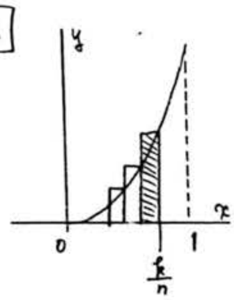
5 2項定理より

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \cdot x^{n-k}$$

$$= \binom{n}{0}\cdot x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} + \cdots$$

$$= x^n + n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} + \cdots$$

6



$x = [0, 1]$ を n 等分し、短冊状に分割して考える。左から k 番目の長方形の面積 a_k は $a_k = \left(\dfrac{k}{n}\right)^3 \cdot \dfrac{1}{n}$ であるから

長方形 n 個の和 S_n は、

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$n\to\infty$ の limit では

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad /\!/$$

(結局 $\displaystyle\int_0^1 x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}$ と同じ)

所属	科 年・科目等履修生	学生番号	—	氏名	