微積分学I（真貝） 中間テスト 第2回（M/i） 解答例.

1

(1) $y_1' = e^x + 0 + 12x^3 + 5\cos x - 6\sin x$

(2) $y_2' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 3e^{-3x} + \frac{1}{x} + \frac{5}{\cos^2 x}$

$(\log 4x)' = \frac{1}{4x}(4x)'$

(3) $y_3' = \frac{0-(\sin x)'}{(\sin x)^2} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$

(4) $y_4' = \{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\}'$
$= \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1-x^2)' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(5) $y_5 = \cos^{-1}x \iff x = \cos y$

$\frac{dx}{dy} = -\sin y$

$\therefore \frac{dy_5}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(6) $y_6' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)'$
$= \frac{(\sinh x)'\cosh x - \sinh x(\cosh x)'}{\cosh^2 x}$
$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$

2

$y = x\log x$

$y' = 1\cdot\log x + x\cdot\frac{1}{x} = \log x + 1$

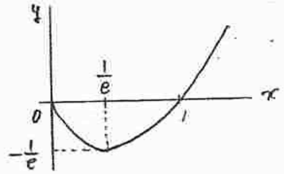
$y' = 0$ となるのは $\log x = -1$ のとき

$\therefore x = e^{-1}$ のとき

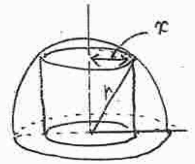
増減表は

x	0		$\frac{1}{e}$	
y'		$-$	0	$+$
y	0	↘	$-\frac{1}{e}$	↗

これよりグラフは次のようになる



3



直円柱の底面の半径を x とすると、直円柱の高さは $\sqrt{r^2-x^2}$ となる。

したがって、直円柱の体積 $V(x)$ は、

$V(x) = \pi x^2\sqrt{r^2-x^2}$ ……①

①の最大値を与える x は、①を2乗した関数で考えても同じなので、

$f(x) = \left(x^2\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 = x^4(r^2-x^2)$ ……②

が最大となる x を求める。

$f'(x) = 4x^3(r^2-x^2) + x^4\cdot(-2x)$
$= 2x^3\{2(r^2-x^2)-x^2\}$
$= 2x^3(2r^2-3x^2)$

$f'(x)=0$ となるのは $x=0, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}r$

$0\le x\le r$ での増減表は

x	0		$\sqrt{\frac{2}{3}}r$		r
f'		$+$	0	$-$	
f		↗		↘	

これより $x=\sqrt{\frac{2}{3}}r$ で最大値をとる。

したがって直円柱の最大の体積は

$V\left(\sqrt{\frac{2}{3}}r\right) = \pi\cdot\frac{2}{3}r^2\sqrt{r^2-\frac{2}{3}r^2}$
$= \frac{2}{3\sqrt{3}}\pi r^3$

4

$y = (x^2-x)\cos x$.

$f(x) = x^2-x$, $g(x) = \cos x$ と置いて

ライプニッツの公式を用いる。

$f'(x) = 2x-1$

$f''(x) = 2$

$f^{(k)}(x) = 0$ $(k=3,4,5,\cdots)$

および

$g^{(k)}(x) = \cos\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ より

$y^{(n)} = \binom{n}{0}f(x)\cdot g^{(n)}(x) + \binom{n}{1}f'(x)\cdot g^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2}f''(x)g^{(n-2)}(x) + 0 + 0 + \cdots$

$= 1\cdot(x^2-x)\cdot\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right) + n(2x-1)\cdot\cos\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right) + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\cdot\cos\left(x+(n-2)\frac{\pi}{2}\right)$

$= \{x^2-x-n(n-1)\}\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right) + n(2x-1)\cdot\cos\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)$.

注意 1.右の欄を正確に記入すること。 2.所属を○で囲むこと。 3.前記「1.2」を守らない答案は採点されないことがある。
試験日 座席番号 —
所属 部 情報科学部 学科 ID IC IS IM IN 年次 1 2 3 4 科目等履修生
学生番号 — フリガナ 氏名 組
所属 科 年・科目等履修生 学生番号 — 氏名