教科書の例題・問題のすべてと，章末問題からの抜粋です．

第 1 章　微分方程式概説

1.1　微分方程式の定義

例題 1.1
物体の位置 x を時間 t の関数として $x(t)$ で表すと，速度 $v(t)$ と加速度 $a(t)$ は，それぞれ $v(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$, $a(t) = \dfrac{dv(t)}{dt}$ である．

- 加速度がゼロのとき
  (1) 速度 $v(t)$ を求めよ．
  (2) 位置 $x(t)$ を求めよ．
  (3) 初速度を v_0 として，速度 $v(t)$ を求めよ．
  (4) 初期の位置を x_0，初速度を v_0 として，位置 $x(t)$ を求めよ．
- 加速度が一定値 a のとき
  (5) 位置 $x(t)$ を求めよ．
  (6) 初期の位置を x_0，初速度を v_0 として，位置 $x(t)$ を求めよ．

問題 1.2
物体が重力だけを受けて鉛直方向に運動することを，自由落下運動という．自由落下運動には一定の重力加速度 g が働く．初速度ゼロ，高さ H から 自由落下する物体の位置を表す方程式を立てて解け．

1.2　代表的な微分方程式

例題 1.3　k, A, B は定数とする．

(1) $y = e^{kx}$ が，$\dfrac{dy}{dx} = ky$ の微分方程式をみたすことを示せ．

(2) $y = Ae^{kx} + Be^{-kx}$ が，$\dfrac{d^2y}{dx^2} = k^2 y$ をみたすことを示せ．

問題 1.4　k, A, B は定数とする．

(1) $y = Ae^{-kx}$ が，微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = -ky$ をみたすことを示せ．

(2) $y = A\sin kx + B\cos kx$ が，$\dfrac{d^2y}{dx^2} = -k^2 y$ をみたすことを示せ．

1.3　微分方程式の種類

1.3.1　常微分方程式と偏微分方程式

1.3.2　線形微分方程式と非線形微分方程式

1.3.3　同次微分方程式と非同次微分方程式

$\boxed{1.2}$ （微分方程式の分類）
関数 $y(x)$ に対する次の微分方程式の階数・「同次／非同次」の別・「線形／非線形」の別を述べよ．

(1) $y' = x$　(2) $y' = x^2$

(3) $y'' = y^2$　(4) $y'' = y + 1$

(5) $y'' + 2y' - y = e^x$　(6) $y'' + 3y' = \sin x$

(7) $y^{(3)} - y^2 = 0$　(8) $y'' + y = y^{(3)}$

(9) $y^{(3)} = e^x \cos x$

1.4　初期値問題と境界値問題

1.4.1　初期値問題

1.4.2　境界値問題

$\boxed{1.1}$ 次の語句の意味を説明せよ．

(1) 一般解・特殊解・特異解・基本解
(2) 常微分方程式・偏微分方程式
(3) 初期条件・初期値問題
(4) 境界条件・境界値問題

1.5　解軌道と勾配場

1.6　連立微分方程式

1.7　モデル化・微分方程式を作る方法

例題 1.5
必要であれば文字を補って，微分方程式を立式せよ．

(1) xy 平面上の各点で，接線の傾きが $\sin x$ である曲線がみたす微分方程式．

(2) 時間に対して一定の割合で増加していくバクテリアの数がしたがう微分方程式．

(3) その時の感染者の 2 乗に比例して増加するインフルエンザ感染者数を求める微分方程式.

(4) 質量 m のパラシュートが重力 mg を受けて落下するとき，高さの時間変化 $y(t)$ は運動方程式 $m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -mg$ にしたがう．さらに，速度の 2 乗に比例する抵抗力が加わるときの運動方程式.

問題 1.6
必要であれば文字を補って，微分方程式を立式せよ．

(1) xy 平面上の各点で，法線の傾きが $\sin x$ である曲線がみたす微分方程式.

(2) 原点から，距離の逆 2 乗で比例する力を受ける物体の運動方程式.

(3) その時の総数に比例して崩壊していく原子核の数を求める微分方程式.

(4) 時間に対して一定の割合で成長してゆくが，自分自身の大きさに比例して成長率が鈍化する雪の結晶の大きさを求める微分方程式.

例題 1.7

(1) 円の式 $x^2 + y^2 = r^2$ で，r を変化させる曲線群を考える．これらが，1 つの微分方程式から出てきた解だとすると，元の微分方程式は何か.

(2) 同様，原点を通る傾き k の直線群 $y = kx$ が解となる微分方程式を求めよ．

章末問題

$\boxed{1.3}$ （円の面積・球の体積）

(1) 半径が r の円の面積を $S(r)$ とする．微分の定義

$$\frac{dS}{dr} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{S(r + \Delta r) - S(r)}{\Delta r}$$

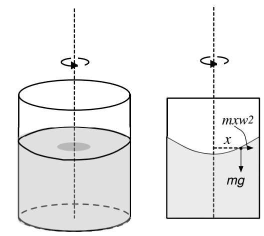
を用いると，$S(r)$ のみたす微分方程式が $\dfrac{dS}{dr} = 2\pi r$ となることを示せ．

(2) (1) で得られた微分方程式は，
「面積の増加分 $dS =$ 円周 $\times\, dr$」
と解釈できる．半径が r の球の体積を $V(r)$ とするとき，
「体積の増加分 $dV =$ 表面積 $\times\, dr$」
と解釈して微分方程式を立てよ．また，$V(r)$ を積分して求めよ．

$\boxed{1.4}$ （回転する液体表面）
ビーカーに液体を入れて，中心を軸に全体を回転させる．液体の表面は重力と遠心力のつりあいによって中心がくぼみ，外側が盛り上がる．回転の角速度を ω とすると，中心から半径 x の位置にある液体の素片（質量 m）は，重力 mg と遠心力 $mx\omega^2$ のつりあいから，液体表面の高さ y は，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{mx\omega^2}{mg}$$

をみたす．液体表面の形状は何か.



第 2 章　1 階微分方程式

2.1　変数分離法

2.1.1　変数分離法

例題 2.1　$y(x)$ に対する次の微分方程式を解け.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = x - 1$　(2) $\dfrac{dy}{dx} = -xy^2$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = y - 1$　(4) $\dfrac{dy}{dx} = y(y-1)$

(5) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y(x^2+1)}$　(6) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}$

問題 2.2　$y(x)$ に対する次の微分方程式を解け.

(1) $y' = xy$　(2) $y' = \dfrac{x}{y}$

(3) $y' = \dfrac{y}{x}$　(4) $y' = \tan x$

(5) $y' = \tan y$　(6) $y' = \dfrac{\sin x}{\cos y}$

(7) $y' = e^{x-y}$　(8) $y' = y^2 \log x$

(9) $y' = y(y+1)$

応用例　**放射性元素の崩壊**

例題 2.3
放射性物質は一定の確率で崩壊を起こすことが知られている．したがって，単位時間に崩壊してゆく原子の数は，その瞬間の原子の数に比例する．

(1) 時刻 t における原子の数を $N(t)$ とする．崩壊する割合（比例定数）を $\lambda(>0)$ として，$N(t)$ に対する微分方程式を作れ．

(2) この微分方程式の解として，$N(0)=N_0$ をみたすものを求めよ．

(3) 崩壊定数 λ と半減期 T との関係を求めよ．$\log 2 = 0.6931$ とする．

(4) $t=1$ のとき，$N(t)$ が N_0 の 99%となっていた．この物質の半減期を求めよ．$\log 100 = 4.605, \log 99 = 4.595$ とする．

応用例　**放熱現象**

例題 2.4
沸かし終えた風呂の温度の時間変化率は，そのときの室温との差に比例する．すなわち，室温が 10 [°C] のとき，時刻 t における風呂の温度 $T(t)$ [°C] は，

$$\frac{dT}{dt} = -k\,(T-10) \qquad (k>0; \text{定数})$$

となる．いま，$t=0$ で 60 [°C] だった風呂が，10 分後に 55 [°C] になった．40 [°C] になるのは何分後か．$\log 2 = 0.6931$, $\log 3 = 1.099$, $\log 5 = 1.609$, $\log 10 = 2.303$ とする．

応用例　**人口予測の 2 つのモデル**

例題 2.5
Malthus は，著書『人口論』の中で「人口は制限されなければ幾何級数的に増加する」と述べている．「食料などの生活環境が良好で，出生率・死亡率が安定しているならば，人口の増加速度は，そのときの総人口に比例する」という主張である．人口 x を時間 t の関数として式を立てて解け．初期条件は，$t=0$ で $x=x_0$ とする．

例題 2.6
Verhulst は，Malthus の人口爆発モデル（例題**??**）を改良し，「人口の増加率は人口が増えると減少する」というモデルを考えた．あまりにも同一種の生物が増えすぎると食糧が枯渇して種の個体数の増加率が下がるだろう，という理由である．Malthus のモデル $\dfrac{dx}{dt}=kx$ における比例定数 k を定数ではなく，

$$k = a - bx \qquad (a, b \text{ は，正の定数})$$

として，

$$\frac{dx}{dt} = (a-bx)x$$

と考えるモデルである（これをロジスティック方程式という）．これを解け．

2.1.2　変数分離型へ変換できるもの

例題 2.7　$y=xu$ と置換して次の微分方程式を解け．

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy+y^2}{x^2} \quad (x>0)$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$

例題 2.8

(1) $u=x+y+1$ とおき，$y' = x+y+1$ を解け．

(2) $u=x+y$ とおき，$y'=(x+y)^2$ を解け．

2.2　積分因子法

2.2.1　定数係数微分方程式の場合

例題 2.9　次の $y(x)$ に対する微分方程式を解け．

(1) $y'+2y=0$　　(2) $y'+2y=e^{2x}$

(3) $y'+2y=3x+4$

例題 2.10　次の $y(x)$ に対する初期値問題を解け．

(1) $y'-3y=0,\ y(0)=3$

(2) $y'-3y=0,\ y(0)=-1$

応用例　**雨滴の終端速度**

例題 2.11
雨滴が無限大の速さにならないのは，空気抵抗により減速されるからである．ここでは，空気抵抗が物体の速度 v に比例すると考えよう．すなわち，抵抗の比例定数を k，雨滴の質量を m，重力加速度を g とすれば，運動方程式は，鉛直上向きを正として

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - kv$$

となる．速度 v の振舞いを論じ，初速をゼロとして雨滴の終端速度（最終的に一定となる速度）を求めよ．

応用例 **空気抵抗のある場合のボールの軌跡**

例題 2.12
水平方向を x 軸，鉛直方向を y 軸（上向きが正）に取り，ボールを投げる位置を原点とする．抵抗の比例定数を k，粒子の質量を m，重力加速度を g，時刻 t での速度を $(v_x(t), v_y(t))$ とすれば，運動方程式は，

$$\begin{aligned} m\frac{dv_x}{dt} &= -kv_x \\ m\frac{dv_y}{dt} &= -mg-kv_y \end{aligned}$$

となる．初速度を v_0，投げ上げる角度を θ とすれば，初速度の x, y 成分は $(v_0\cos\theta, v_0\sin\theta)$ となる．

(1) 時刻 t での ボールの速度 $(v_x(t), v_y(t))$ を求めよ．

(2) 時刻 t での ボールの位置 $(x(t), y(t))$ を求めよ．

(3) 水平方向の到達点 X を，そこへ到達するまでの時間 T を用いて X を T の関数として（θ を用いずに）表せ．

$X(T)$ の式は，k と T を与えないと値が定まらない．簡単のため，以下では $k^2v_0^2-m^2g^2=0$，すなわち $k=mg/v_0$ としよう．

(4) $X(T)$ の最大値を与える T の値が，$T=m/k$ であることを確かめよ．

(5) $k=mg/v_0$, $T=m/k$ の条件から，ボールを投げ上げる角度は，45 度より高い方がよいか，それとも低い方がよいかを示せ．

2.2.2　係数が関数の微分方程式の場合

例題 2.13　$y(x)$ に対する次の微分方程式を解け．

(1) $y'+xy=0$

(2) $y'+xy=2x$

(3) $y'-\dfrac{y}{x}=3$

(4) $y'+\dfrac{y}{x}=3x+4$

問題 2.14
$y(x)$ に対する次の微分方程式を解け．初期条件が与えられたものは特殊解を求めよ．

(1) $y'+\dfrac{y}{x}=3\cos x$

(2) $xy'+2y=4x^2$,　$y(1)=2$

(3) $xy'+2y=x\sin 2x$,　$y(\pi)=0$

(4) $y'+(\tan x)\,y=3\sin x$

(5) $y'+\dfrac{1}{\tan x}\,y=2\sin x$

2.3　非同次微分方程式の一般解

2.3.1　未定係数法

例題 2.15　$y(x)$ に対する次の微分方程式を解け．

(1) $y'+2y=e^{2x}$

(2) $y'+2y=3x+4$

(3) $y'+2y=3\sin 4x$

(4) $y'+2y=3\sin 4x+3\cos 4x$

(5) $y'+2y=e^{-2x}$

(6) $y'+xy=2x$

問題 2.16
$y(x)$ に対する次の微分方程式を解け．初期値が与えられているものは初期値問題の解を求めよ．

(1) $y'+2y=3x^2+4x+5$

(2) $y'+2y=4\cos 2x$

(3) $y'-2y=4e^{-2x}$

(4) $y'-2y=4e^{2x}$

(5) $y'-y=-2e^{x}$,　$y(0)=3$

(6) $y'-y=-2e^{-x}$,　$y(0)=2$

応用例 **積立定期貯金モデル**

例題 2.17
毎月 r%の複利で利子がつく積立定期貯金がある．毎月 k 円を積み立てるとすると，貯金総額 $S(t)$ 円 [ただし t の単位は 1 ヶ月] の増加分は，次式で与えられる．

$$\frac{dS}{dt}=\frac{r}{100}S+k$$

(1) はじめの貯金額を S_0 として，$S(t)$ を求めよ．

(2) 月利 $r=$0.5%，$S_0=$0 円，毎月 $k=$1 万円の積み立てを 10 年間行った場合，利子として受け取る総額はいくらか．

(3) 100 万円を年利 $r=$5% の複利で預けたままにするとき，倍額になるのは何年後か．

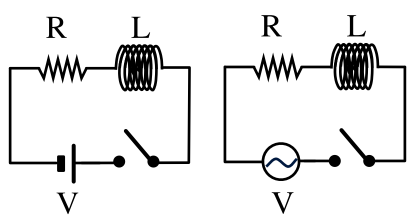
例題 2.18
住宅資金として 3000 万円を年利 2%で借りた．25 年で完済するには，毎年いくら返済すればよいか．

応用例　RL 回路・RC 回路の過渡現象

例題 2.19
抵抗値 R の抵抗とインダクタンス L のコイルで構成される RL 直列回路を考える．

(1) 回路に加える起電力が一定値 V のとき，電流 I に関する微分方程式を書け．時刻 $t=0$ で $I=0$ とすると，解はどうなるか．

(2) 回路に加える電圧が交流起電力 $V=V_0\sin\omega t$ のとき，定常状態の回路の電流を求めよ．



問題 2.20
抵抗値 R の抵抗と容量 C のコンデンサで構成される RC 回路を考える．

(1) 回路に加える起電力が一定値 V のとき，電荷 Q に関する微分方程式を書け．時刻 $t=0$ で $Q=0$ とすると，解はどうなるか．

(2) 回路に加える電圧が交流起電力 $V=V_0\sin\omega t$ のとき，定常状態の回路の電荷を求め，流れる電流を求めよ．

2.3.2　定数変化法

例題 2.21　$y(x)$ に対する次の微分方程式を解け．

(1) $y'+xy=2x$　　(2) $y'-\dfrac{y}{x}=3$

(3) $y'+\dfrac{y}{x}=3x+4$

問題 2.22　$y(x)$ に対する次の微分方程式を解け．

(1) $y'+\dfrac{y}{x+1}=e^x$

(2) $y'+(\tan x)\,y=0$

(3) $y'+(\tan x)\,y=3\sin x$

(4) $y'+(\tan x)\,y=3\sin x+4\cos x$

2.4　Bernoulli 型，Riccati 型，Clairaut 型

例題 2.23　$y(x)$ に対する次の微分方程式を解け．

(1) $y'+2y=e^{3x}y^2$

(2) $xy'+y=x^2\sqrt{y}\quad(x>0)$

例題 2.24
von Bertalanffy による魚の成長モデルは，魚の体重 $w(t)$ を時間 t の関数，α,β を定数として，

$$\frac{dw}{dt}=\alpha\,w^{2/3}-\beta\,w$$

とするものである．右辺第 1 項は栄養分による体重の増加で魚の表面積に比例するもの．第 2 項は呼吸による体重のロスの割合で魚の体重に比例するものである．$w(0)=0$ として $w(t)$ を求めよ．

例題 2.25
接線の両座標軸にはさまれる部分が一定の長さ a であるような曲線を求めよ．

2.5　完全微分形

例題 2.26　次の微分方程式を解け．

(1) $(4x+3y)dx+(3x+2y)dy=0$

(2) $(\cos x+\cos y)dx+(e^y-x\sin y)dy=0$

(3) $(2x+\dfrac{1}{y})dx+(2y-\dfrac{x}{y^2})dy=0$

応用例　保存則の導出

例題 2.27
RLC 直列回路では，回路を流れる電流 $I(t)$ の時間変化を決める微分方程式は

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{Q}{C}=V(t)$$

である．ここで，L はコイルのインダクタンス，R は抵抗値，C はコンデンサの電気容量である．Q はコンデンサに蓄えられる電荷で $I=\dfrac{dQ}{dt}$ の関係がある．完全微分形にして保存則を求めよ．

例題 2.28
次の式の積分因子は x だけの関数であるとして，解け．

$$(y+xy+\sin y)\,dx+(x+\cos y)\,dy=0$$

問題 2.29
次の微分方程式の積分因子が右に示された関数 $P(x,y)$ であることを利用して一般解を求めよ．

(1) $(x^3+2xy+y)dx+(y^3+x^2+x)dy=0$, $P(x,y)=1$

(2) $3x^2ydx+(2x^3-4y^2)dy=0$, $P(x,y)=y$

(3) $(xy-y)dx+(xy+x)dy=0$, $P(x,y)=\dfrac{1}{xy}$

(4) $(3x-y)dx+(x-3y)dy=0$, $P(x,y)=x+y$

応用例 断熱変化

例題 2.30
一定量の単原子分子理想気体を容器に入れ，断熱変化（$\Delta Q=0$）を行ったとき，気体の体積 V と温度 T の間に成り立つ関係を求めよ．

2.6 発展的応用

2.6.1 年代測定と贋作鑑定

例題 2.31
1947 年，Vermeer の絵画として持ち込まれた絵が贋作かどうか鑑定することになった．顔料に含まれている鉛 (^{210}Pb) の含有量で年代を判定することになった．

- ほとんどの絵に使われる顔料は，半減期 22 年の放射性物質である ^{210}Pb を含む．^{210}Pb は，ラジウム (^{226}Ra) が半減期 1600 年で崩壊してできる．
- ^{210}Pb に崩壊する ^{226}Ra の総量は，単位時間ごとに，崩壊・減少する ^{210}Pb の総量と等しい．すなわち，^{210}Pb と ^{226}Ra は時間が経つと平衡状態になる．
- 顔料の製造過程では，ラジウムはほとんど除去されるが，完全には除去されない．顔料となった ^{210}Pb は崩壊を始めるが，やがて除去されずに残った微量のラジウムと平衡状態に達する．

以上の過程を微分方程式のモデルにすると，

$y(t)$ = 時刻 t における通常の鉛 1g ごとの ^{210}Pb の量

$r(t)$ = 通常の鉛の中における毎分 1g ごとの ^{226}Ra の崩壊数

とし，λ を ^{210}Pb の崩壊定数として，次の式になる．

$$\frac{dy}{dt}=-\lambda y+r(t)$$

(1) この微分方程式を，$y=\cdots$ の積分形にせよ．

(2) ラジウムの半減期 1600 年に対して、フェルメールの絵かどうかは 350 年くらいの話なので、ラジウムの崩壊数 r はほぼ一定と考えてよい．r を定数として，顔料製造の時刻を t_0，$y(t_0)=y_0$ を用いて，y について解け．

(3) y, r は測定可能, $\lambda=3.151\times10^{-2}$ は既知である．顔料を作る前の鉱石もラジウムと鉛の平衡状態であり，$\lambda y_0=R$ は，$0<R<200$ 程度であることが知られている．判定を依頼された絵は，$\lambda y=8.5$, $r=0.8$ であった．本物だろうか．

2.6.2 ロケットの燃料はどれだけ必要か

例題 2.32
ロケットが，燃料を噴射しながら一定の推進力を得て加速している状況を考える．ロケットの速度が v のとき，ロケットの質量を $m(v)$ とする．質量 Δm の燃料を速度 u で放出しながらロケット本体の速度を v から Δv だけ加速させたとすると，どのような微分方程式が成り立つか．

例題 2.33
$v=0$ のときのロケットの質量を M_0 とする．

$$\frac{dm}{dv}=-\frac{m}{V}\quad(V:\text{定数})$$

を解いてロケットの運動を論ぜよ．

2.6.3 水時計の設計

例題 2.34
半径 R の円柱容器を使って水時計を作る．円柱に等間隔に目盛をつけておくと，容器中の液体の表面が目盛を通過する時間間隔はどのようになるだろうか．

例題 2.35
流出する流体の量が時間と共に常に一定になるようにするためにはどのような容器の形状にすればよいか．

2.6.4 研究課題 1:空気抵抗

質量の増加する雨滴

研究課題 2.1
雨滴は小さな水滴が合体しながら大きく成長して落下してくると考えられる．はじめに質量 m_0 の雨滴が初速度ゼロで落下を始めたとして，次の 2 つの場合で雨滴の終端速度を考えよ．雨滴は粒子の速度 v に比例する抵抗を受けて落下する．

(1) 雨滴の質量 m が一定の割合で増加するとき，すなわち

$$\frac{dm}{dt}=\alpha\qquad(\alpha:\text{定数})$$

とするときはどうか．

(2) 雨滴の質量 m が速度 v に比例して増加するとき，すなわち

$$\frac{dm}{dt} = \beta v \qquad (\beta : \text{定数})$$

とするときはどうか．

ただし，質量が変化するときの運動方程式は，鉛直上向きを正として

$$\frac{d}{dt}(mv) = -mg - kv \qquad (k : \text{定数})$$

で与えられる．

速度の 2 乗に比例する抵抗

研究課題 2.2
例題??で扱った，抵抗力が働くときのボールの軌跡を，速度の 2 乗に比例する抵抗力の場合に置き換えて調べよ．抵抗力の大きさは，単位質量あたりの比例定数を K として，$-Kmv^2$ とする．

2.6.5　研究課題 2:広告の威力

研究課題 2.3
ある商品の売り上げ $S(t)$ は，時間 t の関数として微分方程式

$$\frac{dS}{dt} = -kS + a(t)\frac{M-S}{M} \qquad (k > 0 : \text{定数})$$

で与えられる．右辺第 1 項は広告を打たないと売り上げが次第に落ちることを示し，第 2 項は広告の効果で売り上げ限界 M に達するまでに，まだ売れていない客層にアピールすることを示す．関数 $a(t)$ は広告がもたらす効果の関数とする．

(1) $a(t)$ が，初めの時刻 T まで一定値，時刻 T 以降はゼロ，すなわち

$$a(t) = \begin{cases} a \quad (\text{一定}) & (0 \leq t \leq T) \\ 0 & (T \leq t) \end{cases}$$

とするとき，S はどのような関数になるか．

(2) 長期間の一定したキャンペーンと，短期間の大規模キャンペーンを複数回行うのとでは，どちらが効果が高いだろうか．適当な関数を仮定して論ぜよ．

2.6.6　研究課題 3:伝染病の流行モデル

章末問題

$\boxed{2.1}$ つぎの微分方程式の解を求めよ．ただし，α, β は定数とする．

$$\frac{dy}{dt} + \alpha y = \beta, \quad y(0) = 0.$$

$\boxed{2.2}$ （コーヒーの温度）
室温が 10 [°C] の部屋に置いたコーヒーの温度の変化率は，時刻 t におけるコーヒーの温度 $T(t)$ [°C] と室温との差に比例する．すなわち，

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 10) \quad (k > 0; \text{定数})$$

となる．$t = 0$ で，90 [°C] であったコーヒーが，2 分後に 60 [°C] になったとき，40 [°C] になるのは何分後か．$\log 2 = 0.6931, \log 3 = 1.099, \log 5 = 1.609$ とする．

$\boxed{2.3}$ （慣性抵抗）
落下傘・スカイダイビングなど落下速度 v（あるいは運動量 mv）が大きい物体には，速度の 2 乗で効く空気抵抗が働く．質量 m の物体が自由落下するとき，抵抗の比例定数を単位質量あたり K，重力加速度を g とすれば，運動方程式は，鉛直上向きを正として

$$m\frac{dv}{dt} = -mg + Kmv^2$$

となる．初速度をゼロとして速度 v の振舞いを論ぜよ．

$\boxed{2.4}$ （化学反応の速度）
化学反応 A+B→C の速度は，混合する 2 つの反応物質の濃度に関係する． A,B の濃度をそれぞれ $A(t), B(t)$ とすると，時刻 t における C の量 $x(t)$ は，

$$\frac{dx}{dt} = kAB \quad (k > 0; \text{定数})$$

となる．初期濃度を $A(0) = a, B(0) = b, x(0) = 0$ とすると，反応式から，$A = a - x, B = b - x$ なので，

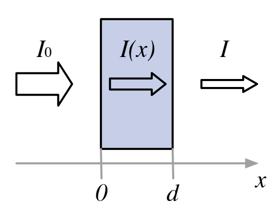
$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$$

となる．x を時刻 t の関数として求めよ．ただし，$a \neq b$ とする．

$\boxed{2.5}$ （**Lambert-Beer** の法則）
光が薄い膜を通過するときに吸収される率は，層の厚さと光の強度に比例する．膜に入射する位置を $x = 0$，膜内の通過距離を x とする．この法則を微分方程式で表現し，任意の位置 x における光の強度 $I(x)$ を求めたい．

(1) 必要な文字を補い，微分方程式を立てて $I(x)$ を求めよ．

(2) 光の強度 $I(x)$ のグラフを描け．ただし，入射する光の強さを I_0，層の厚さを d とする．



第 3 章　2 階および高階微分方程式

3.1　2 階の定数係数同次線形微分方程式

3.1.1　概略

3.1.2　解の重ね合わせ

3.1.3　解の存在と一意性

3.1.4　関数の 1 次独立・1 次従属

例題 3.1
次の関数の組は 1 次独立か．a, b は定数とする．

(1) $(e^{ax},\, e^{bx})$　　(2) $(e^{ax},\, xe^{ax})$

(3) $(\sin x,\, \cos x)$　　(4) $(1,\, x,\, x^2)$

問題 3.2
次の関数の組は 1 次独立か，そうでないか．

(1) $(\sin x,\, \sin 2x)$　　(2) $(\sin x,\, x\sin x)$

(3) $(\sin ax,\, \cos ax)$　　(4) $(e^x \sin x,\, e^x \cos x)$

3.1.5　特性方程式

例題 3.3
複素数 λ に対する微分公式　$\dfrac{d}{dx}e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$　を示せ。

例題 3.4　$y(x)$ に対する次の微分方程式を解け．

(1) $y'' - 9y = 0$　　(2) $y'' + 9y = 0$

(3) $y'' + 2y' - 3y = 0$　　(4) $y'' + 2y' + y = 0$

(5) $y'' + 2y' + 5y = 0$　　(6) $y'' = 0$

問題 3.5　$y(x)$ に対する次の微分方程式を解け．

(1) $y'' - 5y' + 6y = 0$　　(2) $y'' - y' = 0$

(3) $y'' + y = 0$　　(4) $y'' + 4y' + 4y = 0$

(5) $y'' - 2y' + 2y = 0$　　(6) $y'' + 4y' + 13y = 0$

問題 3.6
次の条件をみたす，2 階の微分方程式 $y'' + ay' + by = 0$ の係数 a, b を定めよ．

(1) 基本解が e^{-2x} と e^{3x} である．

(2) 基本解に xe^{3x} を含む．

(3) 基本解に $e^{-x}\sin 2x$ を含む．

3.1.6　初期値問題

例題 3.7
次の初期条件のもとで，$y(x)$ に対する微分方程式を解け．

(1) $y'' - 4y = 0,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$

(2) $y'' - 4y = 0,\ \ y(0) = 2,\ y'(0) = 0$

問題 3.8
次の初期条件のもとで，$y(t)$ に対する微分方程式を解け．

(1) $y'' + 4y = 0,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = -2$

(2) $y'' + 4y = 0,\ \ y(0) = 2,\ y'(0) = 0$

(3) $y'' + 4y = 0,\ \ y(0) = 2,\ y'(0) = 2$

$\boxed{\text{応用例}}$　単振動

例題 3.9
ばね定数 k のばねに，質量 m のおもりをつけて，摩擦のない水平面上で運動させる．おもりの位置 $x(t)$ を振動方向を x 軸，振動中心を $x = 0$ とした軸で表すことにすると，ばねにつけたおもりの運動方程式は，

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

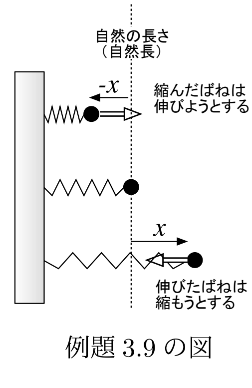
となる．

(1) この方程式の一般解を求めよ．

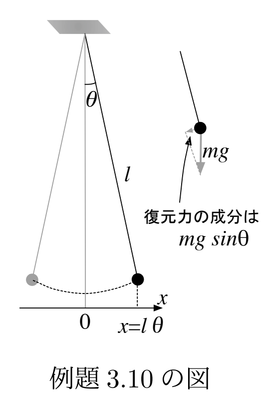
(2) この単振動の周期（1 往復する時間）を求めよ．

(3) 時刻 $t = 0$ で，位置 $x = x_0$ にあったおもりが，静かに固定を放たれたときの解を求めよ．

(4) 時刻 $t = 0$ で，位置 $x = 0$ にあったおもりが，初速度 $v = v_0$ を与えられたときの解を求めよ．



例題 3.9 の図



例題 3.10 の図

応用例　**振り子**

例題 3.10
質量 m のおもりをつけた長さ ℓ の振り子を考える．時刻 t における振り子が鉛直方向となす角度 $\theta(t)$ は，おもりの変位 x と，$x=\ell\theta$ の関係になるので，おもりの加速度 a は，$a=\dfrac{d^2x}{dt^2}=\ell\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ となる．したがって，おもりに働く運動方程式は，

$$m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\sin\theta$$

となる．θ が微小であれば，$\sin\theta\simeq\theta$ と近似できるので，次の微分方程式になる．

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{\ell}\theta=0$$

一般解を求め，運動の周期 T を求めよ．

応用例　**減衰振動**

例題 3.11
ばね定数 $k(>0)$ のばねにつながれた質量 m の物体が，抵抗力を受けながら運動する状況を考える．抵抗力は速度 v に比例すると考えて cv（ただし，c は正の定数）とする．ばねの自然長の位置を原点とする x 座標を考えると，運動方程式は，時間を t として

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-c\,\frac{dx}{dt}$$

となる．この微分方程式の一般解を論じよ．また，初期に自然長の位置から x_0 引きのばして静かに手を放した場合（すなわち $x'(0)=0$）の解をグラフで表せ．

3.2　2 階の定数係数非同次線形微分方程式

3.2.1　解の構造

3.2.2　未定係数法

例題 3.12
$y(x)$ に対する次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $y''-5y'+6y=4e^x$　(2) $y''-4y'-5y=13\sin x$

(3) $y''-y'=4e^x$　(4) $y''+2y'+5y=5x-3$

(5) $y''+y=4\cos x$

問題 3.13
$y(x)$ に対する次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $y''-3y'+2y=12e^{-x}$　(2) $y''-3y'+2y=e^{2x}$

(3) $y''+4y'+4y=8x^2$　(4) $y''+4y'+4y=2e^{-2x}$

(5) $y''+4y=2\sin x$　(6) $y''+y=6\sin x$

問題 3.14
$y(x)$ に対する次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $y''-3y'+2y=x+x^2$

(2) $y''-3y'+2y=4e^{2x}+3e^x$

(3) $y''-4y=\sinh x$

(4) $y''+2y'+5y=e^{-x}\sin 2x$

(5) $y''+y'+y=(1+x)xe^x$

(6) $y''+4y'+5y=4e^{-2x}\cos x$

応用例　**RLC 直列回路（直流・交流）**

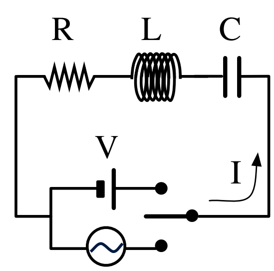
例題 3.15
抵抗値 R の抵抗，インダクタンス L のコイル，容量 C のコンデンサで構成される RLC 直列回路を考える．V を回路の起電力とすると，Kirchhoff の法則により，時間 t を変数にする電流 $I(t)$ に対して次の微分方程式が成り立つ．

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=\frac{dV}{dt}$$

R,L,C は正の定数とする．

(1) 与式の右辺をゼロとした同次微分方程式の一般解 $I_1(t)$ を求めよ．

(2) $V=V_0\sin\omega t$ のとき，与式の特殊解 $I_2(t)$ を求めよ．ただし，V_0,ω は正の定数である．



応用例　**強制振動**

例題 3.16
ばね定数 $k(>0)$ のばねにつながれた質量 m の物体が，速度に比例する抵抗力 $-c\dfrac{dx}{dt}$（c は定数で $c\geq 0$）と，時間に依存する外力 $F(t)$ を受けながら運動する状況を考える．ばねの自然長の位置を原点とする x 座標を考えると，運動方程式は，

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-c\,\frac{dx}{dt}+F(t)$$

となる．$F(t)=F_0\cos\omega t$ であるとして，運動を論ぜよ．

3.2.3 定数変化法

例題 3.17
$y(x)$ に対する次の微分方程式を定数変化法で解け．

$$y'' + y = \tan x \quad (-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$$

問題 3.18
$y(x)$ に対する次の微分方程式の一般解を定数変化法で求めよ．

(1) $y'' - y = e^x$ (2) $y'' + 3y' + 2y = x$

3.3 2階の変数係数非同次線形微分方程式

3.3.1 一般的な議論

3.3.2 変数係数の同次微分方程式

3.3.3 変数係数の非同次微分方程式

例題 3.19
$y(x)$ に対する微分方程式

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = \sqrt{x}$$

の一般解を求めよ．ただし，右辺をゼロとする同次方程式の基本解が

$$y_1(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad y_2(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

であることを用いてよい．

問題 3.20
$y(x)$ に対する微分方程式

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{9}{4x^2}\right)y = x\sqrt{x}$$

の一般解を求めよ．ただし，右辺をゼロとする同次方程式の基本解が

$$y_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right), \quad y_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\cos x}{x} + \sin x\right)$$

であることを用いてよい．

3.3.4 Euler の微分方程式

例題 3.21
$y(x)$ に対する微分方程式 $x^2y'' - 4xy' + 6y = 8x^4$ を解け．

3.4 高階の定数係数同次線形微分方程式

例題 3.22 次の微分方程式を解け．

(1) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$

(2) $y''' - 3y' + 2y = 0$

(3) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

(4) $y''' - 4y'' + 5y' = 0$

(5) $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$

問題 3.23 次の微分方程式を解け．

(1) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

(2) $y''' - 3y'' - 3y' + y = 0$

(3) $y''' - y = 0$

(4) $y''' + y = 0$

(5) $y^{(4)} - 4y'' + 4y = 0$

(6) $y^{(4)} - 4y''' + 10y'' - 12y' + 5y = 0$

(7) $y^{(4)} - 8y''' + 32y'' - 64y' + 64y = 0$

問題 3.24
次の条件をみたす，もとの微分方程式を求めよ．

(1) 基本解に e^{-2x} と $\sin 3x$ を含む 3 階の微分方程式．

(2) 基本解に x^3e^{-2x} を含む 4 階の微分方程式．

3.5 境界値問題

例題 3.25 次の Dirichlet 境界値問題の解を求めよ．

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0 \quad (0 < x < \dfrac{\pi}{2}) \\ y(0) = a_1, \ y(\pi/2) = a_2 \end{cases}$$

例題 3.26 次の Dirichlet 境界値問題の解を求めよ．

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0 \quad (0 < x < \pi) \\ y(0) = 0, \ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

例題 3.27 次の Dirichlet 境界値問題の解を求めよ．

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = 0 \quad (0 < x < \pi) \\ y(0) = 1, \ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

例題 3.28
自然数 k を含む微分方程式

$$y''(x) + k^2y(x) = 0 \quad (0 < x < \pi)$$

の解のうち，次の境界条件を満たす解を求めよ．

(1) Dirichlet 境界条件 $y(0) = 0, \ y(\pi) = 0$

(2) Neumann 境界条件 $y'(0) = 0, \ y'(\pi) = 0$

3.6　発展的応用

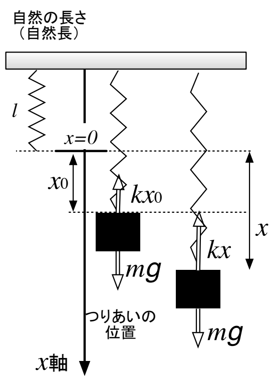
3.6.1　重力による単振動

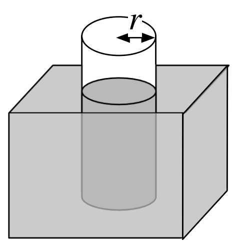
例題 3.29
鉛直面上で上下に振動するばねに取り付けられた物体の運動を考えよう．長さ ℓ のばねを天井に取り付け，鉛直に垂らす．ばねの最下点を原点とし，下向きに x 軸を取る．質量 m の物体を取り付けると，物体には鉛直下向きに重力 mg が働くとともに，ばねの伸びが x のときには弾性力 kx を受ける．

(1) 重力と弾性力がつりあって，おもりが静止するとき，ばねの伸びを x_0 とする．x_0 を求めよ．

(2) おもりが位置 x のときの運動方程式を立式せよ．

(3) 一般解を求め，振動の中心・振動の周期を求めよ．





例題 3.29 の図　　例題 3.30 の図

3.6.2　重力と浮力による単振動

例題 3.30
半径 r，質量 m の円柱があり，密度 ρ の液体中に浮かべる．重力加速度を g とする．円柱が完全に沈むことはないとする．

(1) 円柱が縦のまま途中まで沈んで静止しているとする．円柱に加わる重力 mg と液体から受ける浮力のつりあいから，円柱の液体表面より下の部分の高さ h を求めよ．

(2) (1) のつりあいの位置を原点 $x = 0$ とする x 軸を上向きに考える．つりあいの位置からわずかにずれた円柱は単振動を行うが，どのような周期になるか．

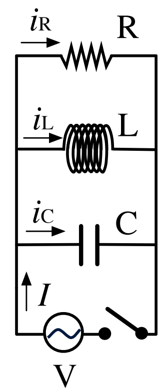
問題 3.31
例題??と同様の設定で，正三角柱のときを考えよう．

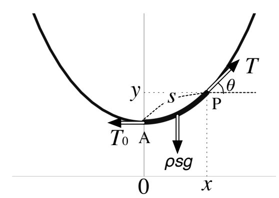
(1) 正三角柱の断面は，一辺の長さが $2r$ の正三角形であるとする．全体の質量は m で，密度 ρ の密度 ρ の液体中に浮かべる．重力加速度を g とする．正三角柱が完全に沈むことはないとする．縦のまま重力と浮力の平衡点にあり，わずかにずれたとき，どのような周期で単振動を行うか．

(2) 例題??の円柱も，本問の正三角柱も真横から見れば同じ横幅 $2r$ である．周期を観測して形状を決定することができるだろうか．

3.6.3　RLC 並列回路

例題 3.32
抵抗（抵抗値 R），コンデンサ（容量 C），コイル（インダクタンス L）の素子を図のようにつなぎ，流れる電流をそれぞれ i_R, i_C, i_L とする．電源電圧 $V = V_0 \sin \omega t$ をかけるとき，回路全体を流れる電流 $I = i_R + i_C + i_L$ を求めよ．





例題 3.32 の図　　例題 3.33 の図

3.6.4　懸垂線

例題 3.33
ロープの両端を持ったとき，重力をうけてたわむロープの曲線の形は，方程式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a}\int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

で与えられる．両辺をさらに微分し，$z(x) = \dfrac{dy}{dx}$ と置換することにより，微分方程式を解いて曲線の式 $y(x)$ を求めよ．

3.6.5　最速降下線：(変分法の紹介)

例題 3.34
最速降下線問題は，

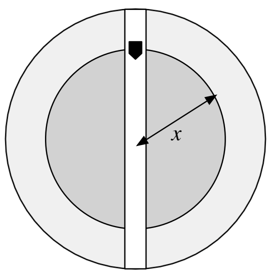
$$T = \int_0^x f(x, y(x), y'(x))\, dx, \qquad f(x, y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{-2gy}}$$

の T を最小化する $y(x)$ を求めればよい．y の関数形を仮に $y(x) + \varepsilon\phi(x)$ とずらしたものを考えるとき，T を最小化する y の解の付近では，$\dfrac{dT}{d\varepsilon} = 0$ であることを用いて，$y(x)$ を求めよ．ただし，「仮想的な変位」$\phi(x)$ は端点で $\phi = 0$ としてよい．

3.6.6　研究課題:地球を貫くトンネル

研究課題 3.4
北極から南極まで一直線にトンネルを掘り，北極から初速度ゼロで質量 m の物体を落下させる．この物体はどのような運動をするだろうか．また，南極に到達するのは何分後か．物体が受ける力は地球からの万有引力のみとする．

物体が受ける万有引力の向きは常に地球の中心を向き，その大きさは地球中心から距離 x の位置にあるとき $G\dfrac{M(x)\,m}{x^2}$ である．ここで，$M(x)$ は，地球内部の半径 x の球内の質量である．地球内部の密度は一様であるとし，地球の質量を 5.9×10^{24} kg，地球の半径を 6400 km，万有引力定数 $G = 6.7\times 10^{-11}\mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{s}^{-2}$ とする．



章末問題

$\boxed{3.1}$ 次の語句の意味を説明せよ．

(1) 関数の 1 次独立性
(2) 基本解の 1 次独立性
(3) 減衰振動
(4) 共振

$\boxed{3.2}$ $y(t)$ に対する 2 階の微分方程式

$$y'' + 2ay' + by = 0 \ \ (a, b : \text{定数})$$

について，

(1) 特性方程式を導け．
(2) 一般解を導出せよ．

$\boxed{3.3}$ 質量 m の人が長さ L のゴムひもをつけて，バンジージャンプを行う．ゴムひもは L より伸びているときには，伸びた長さ Δx に比例して縮もうとする力 $k\Delta x$ (k は正の定数)を及ぼす．働く力は，重力・ゴムひもからの力・速度に比例する空気抵抗の 3 つとする．

(1) 運動方程式を立てよ．ただし，飛び降りる点を $x = 0$ として下向きに x 軸を考え，重力加速度の大きさを g (したがって重力の大きさは mg)，速度 v のときの空気抵抗の大きさは cv (c は正の定数)とする．
(2) どのような運動になるか概略を論ぜよ．

第4章　連立微分方程式と解の定性的分類

4.1　連立微分方程式の例

4.2　線形連立微分方程式

例題 4.1
$x(t), y(t)$ に対する次の連立微分方程式の一般解を求めよ．

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -2x + 4y \end{cases} \tag{4.2.1}$$

4.3　微分方程式の大域理論

4.3.1　臨界点

4.3.2　安定性

4.3.3　固有値が 2 つの異なる実数の場合

例題 4.2
例題**??**において，初期条件 $x(0) = 2,\ y(0) = 1$ をみたす解を求めよ．

問題 4.3
$x(t), y(t)$ に対する次の連立微分方程式の一般解を求めよ．(4)(5) は与えられた初期条件での特殊解も求めよ．

(1) $\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -2x - 4y \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 4x + y \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = 3x - 4y \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = -1 \\ y(0) = -3 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 4x + 2y \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 6 \end{cases}$

4.3.4　固有値が共役な複素数の場合

例題 4.4
$x(t), y(t)$ に対する次の連立微分方程式の一般解を求めよ．

$$\begin{cases} x' = x + 5y \\ y' = -2x + 3y \end{cases}$$

問題 4.5
$x(t), y(t)$ に対する次の連立微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\begin{cases} x' = -x + 5y \\ y' = -2x - 3y \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -2x - y \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$

4.3.5　固有値が縮退する場合

4.3.6　まとめ

4.4　定数係数連立微分方程式の一般的な取り扱い

4.4.1　解核行列

例題 4.6
次の行列に対する解核行列を求めよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

4.4.2　対角化可能な行列の場合

例題 4.7
連立微分方程式 $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$ を解け．

4.4.3　一般スペクトル分解を用いた表現

4.5　非同次連立微分方程式

4.5.1　一般解導出の方針

例題 4.8
$x(t), y(t)$ に対する次の連立微分方程式を解け．

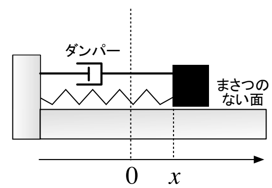
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 20\cos 2t \end{pmatrix}$$

4.5.2　システム制御と安定性解析

例題 4.9
例題**??**で扱った抵抗力を伴う振動システム

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\,\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

(m, c, k は正の定数) で，適当な Lyapunov 関数を定義し，安定性を議論せよ．



4.6　発展的応用

4.6.1　軍備競争モデル

例題 4.10
A 国と B 国の軍備規模をそれぞれ時間 t の関数として $x(t)$, $y(t)$ とする．この量が増大すれば戦争へ，減少すれば平和になると考えて，次のように数学モデルを構築しよう．

- 両国とも相手の国が軍備規模を増大させるならば，それに対抗して自国も軍備増強を行うとする．この効果は，a_1, $a_2\,(\geq 0)$ を比例定数として，次式で表される．

$$\frac{dx}{dt} = a_1 y, \qquad \frac{dy}{dt} = a_2 x.$$

- 自国の軍備規模が異常に拡大すれば，それを抑制する作用が働くだろう．この効果は，b_1, $b_2\,(\geq 0)$ を比例定数として，

$$\frac{dx}{dt} = -b_1 x, \qquad \frac{dy}{dt} = -b_2 y.$$

- 相手国に潜在的な不満があれば，軍備を拡張する基盤が生じる．この効果は，c_1, $c_2\,(\geq 0)$ を比例定数として，

$$\frac{dx}{dt} = c_1, \qquad \frac{dy}{dt} = c_2.$$

以上 3 つの効果をすべて含めると，次の連立微分方程式になる．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -b_1\,x + a_1\,y + c_1 \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = a_2\,x - b_2\,y + c_2 \end{cases}$$

(1) 相手国に潜在的な不安がない $(c_1 = c_2 = 0)$ とき，非武装の平和（$x = y = 0$）が成り立つことを確かめよ．

(2) 相手国に潜在的な不安があると，相互非武装は長続きしないことを確かめよ．

(3) A, B 両国の軍備拡張が平衡状態になった $(\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dy}{dt} = 0)$ とする．このときの (x, y) の値 $(\overline{x}, \overline{y})$ を求めよ

(4) $u = x - \overline{x}, v = y - \overline{y}$ として，(u, v) に対する微分方程式を求め，それらの解は，どちらも共通の微分方程式

$$\frac{d^2z}{dt^2} + (b_1 + b_2)\frac{dz}{dt} + (b_1\,b_2 - a_1\,a_2)z = 0$$

の解であることを示せ．

(5) (4) の微分方程式を解いて，平和を得るための条件を論ぜよ．

4.6.2 連成振動

例題 4.11
質量が同じ m の 2 つの物体が，3 本のばね（ばね定数は k_1, k_2）で図のようにつながれている．それぞれの物体の位置 x_1, x_2 は，時間 t を変数とする連立微分方程式

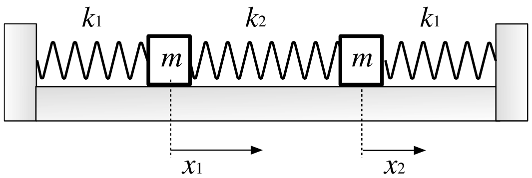
$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x_1}{dt^2} &= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2 \\ m\dfrac{d^2x_2}{dt^2} &= k_2x_1 - (k_1 + k_2)x_2 \end{cases}$$

にしたがう．

(1) 速度 $v_1 = \dfrac{dx_1}{dt}, v_2 = \dfrac{dx_2}{dt}$ も変数にもちいて，1 階の微分方程式の組にして解け．

(2) 次の初期条件のもとでの運動を論じよ．

(1) $t = 0$ で，$x_1 = x_2 = a, v_1 = v_2 = 0$ のとき．
(2) $t = 0$ で，$x_1 = a, x_2 = -a, v_1 = v_2 = 0$ のとき．
(3) $t = 0$ で，$x_1 = a, x_2 = 0, v_1 = v_2 = 0$ のとき．



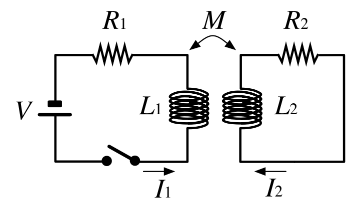
例題 4.12
例題??(1) を $q_1 = x_1 + x_2, q_2 = x_1 - x_2$ という変数に変えて解け．（q_1 は重心座標の 2 倍，q_2 は相対座標の意味をもつ）．

4.6.3 相互誘導回路

例題 4.13
図に示すような相互誘導回路で，時刻 $t = 0$ でスイッチを入れたとき，回路に流れる電流 $I_1(t), I_2(t)$ を求めよ．回路の方程式は，

$$\begin{cases} V = L_1\dfrac{dI_1}{dt} + M\dfrac{dI_2}{dt} + R_1I_1 \\ 0 = M\dfrac{dI_1}{dt} + L_2\dfrac{dI_2}{dt} + R_2I_2 \end{cases}$$

である．ただし，L_1, L_2, M は正の定数であり，$L_1L_2 - M^2 \neq 0$ とする．



4.6.4 捕食者/被食者モデル

例題 4.14
ウサギ（個体数 x）とキツネ（個体数 y）は，捕食者/被食者の関係にあり，次の連立微分方程式で関係づいている．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= x(a_1 - b_1y), \\ \dfrac{dy}{dt} &= -y(a_2 - b_2x). \end{cases}$$

ここで，a_1, a_2, b_1, b_2 は正の定数とする．

(1) ウサギもキツネも個体数に増減のない平衡状態の解 (x_0, y_0) を 2 つ求めよ．

(2) (x_0, y_0) の点の微小量の摂動を考えることにより，平衡状態の解 (x_0, y_0) の相図上での位置づけを述べよ．

(3) xy 平面での相図を描け．