注意	1. 右の欄を正確に記入すること。 2. 所属を○で囲むこと。 3. 前記「1. 2」を守らない答案は採点されないことがある。	試験日		所属	部	情報科学部					学生番号	—
		座席番号	—		学科	ID	IC	IS	IM	IN	フリガナ	組
					年次	1	2	3	4	科目等履修生	氏名	

微分方程式 中間テスト(第1回, L) 解答例 <夏目>

1

(a) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\cosh x}$

(b) 感染者数を時間tの関数として $x(t)$ とすると

$$\frac{dx}{dt} = kx^3 \quad (k>0:\text{定数})$$

(c) (b)と同様に文字を定義して

$$\frac{dx}{dt} = kx^3 - lx^2 \quad (k>0,\ l>0:\text{定数})$$

(d)

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg + k\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \quad (k>0:\text{定数})$$

注: 抵抗力は上向きに働くのでプラス

2

$y(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$

tで微分して

$$y'(t) = \omega A\cos\omega t - \omega B\sin\omega t$$

$$y''(t) = -\omega^2 A\sin\omega t - \omega^2 B\cos\omega t = -\omega^2(A\sin\omega t + B\cos\omega t) = -\omega^2 y.$$

故に与式をみたす.

3

(a) $\dfrac{dy}{dx} = 5x$

積分して $y = \int 5x\,dx = \dfrac{5}{2}x^2 + C$ //

(Cは積分定数. 以下同じ)

(b) 変数分離法により

$\int \dfrac{dy}{y} = \int 5x\,dx$ と変形して

$\log|y| + C_1 = \dfrac{5}{2}x^2 + C_2$ ($C_1, C_2, \cdots$ は定数. 以下同じ)

$\log|y| = \dfrac{5}{2}x^2 + C_3$

$\therefore\ y = e^{\frac{5}{2}x^2 + C_3} = Ce^{\frac{5}{2}x^2}$ //

(c) 変数分離法により

$\int \dfrac{dy}{y} = -\int 5\,dx$ と変形して

$\log|y| + C_1 = -5x + C_2$

$\therefore\ y = Ce^{-5x}$ ……①

初期条件 $y(0)=3$ より $C=3$ と決まる.

$\therefore\ y = 3e^{-5x}$ //

(d) 方針1 積分因子法

e^{5x} を両辺に乗じると

$e^{5x}(y'+5y) = e^{10x}$

$\Leftrightarrow\ (ye^{5x})' = e^{10x}$

積分して $ye^{5x} + C_1 = \dfrac{1}{10}e^{10x} + C_2$

$\therefore\ y = \dfrac{1}{10}e^{5x} + Ce^{-5x}$ //

方針2 未定係数法

step1 与式の右辺をゼロとした同次形の

$\dfrac{dy_1}{dx} + 5y_1 = 0$

の一般解は (c)の① で与えられる.

step2 与式の特殊解として

$y_2 = ke^{5x}$

の関数形を考え, 与式に代入して k を求めると

$(ke^{5x})' + 5ke^{5x} = e^{5x}$

$\therefore\ 10k = 1 \quad \therefore\ k = \dfrac{1}{10}$

これより特殊解は $y_2 = \dfrac{1}{10}e^{5x}$.

step3 以上より求める一般解は

$y = \dfrac{1}{10}e^{5x} + Ce^{-5x}$.

(e) 未定係数法

step1 (d)と同じ.

step2 特殊解を

$y = k\cos x + l\sin x$ と仮定する.

与式に代入すると,

$(k\cos x + l\sin x)' + 5(k\cos x + l\sin x) = 26\sin x$.

これより sin, cos の係数を比べて

$\begin{cases} 5k + l = 0 \\ -k + 5l = 26 \end{cases} \quad \therefore\ k = -1,\ l = 5$

step3 以上より求める一般解は

$y = Ce^{-5x} - \cos x + 5\sin x$ //

(f) 未定係数法

step1 (d)と同じ.

step2 特殊解を ①と独立なものとして

$y_2 = kxe^{-5x}$ と仮定する.

与式に代入すると

$(kxe^{-5x})' + 5kxe^{-5x} = 2e^{-5x}$

$k\cdot 1\cdot e^{-5x} - \cancel{5kxe^{-5x}} + \cancel{5kxe^{-5x}} = 2e^{-5x}$

$\therefore\ k = 2$.

step3 以上より

$y = Ce^{-5x} + 2xe^{-5x}$ //

4

$\dfrac{dT}{dt} = -k(T-20)$

変数分離法により

$\int \dfrac{dT}{T-20} = -\int k\,dt$

$\therefore\ \log|T-20| = -kt + C_1$

$T - 20 = Ce^{-kt}$

したがって一般解は

$T(t) = 20 + Ce^{-kt}$ ……①

初期条件 $T(0)=70$ より $C=50$ と決まる.

また $T(3)=60$ より

$60 = 20 + 50e^{-3k}$

より $e^{-3k} = \dfrac{4}{5}$ となる.

$t=6$ のときの T は

$T(6) = 20 + 50e^{-6k} = 20 + 50\cdot\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = 52$.

$\therefore$ 52°C //

所属	科	年・科目等履修生	学生番号	—	氏名

所属	科	年・科目等履修生	学生番号	—	氏名