微分方程式　第2回中間テスト (E)　解答例　〈真貝〉

$\boxed{1}$ (1) 接線の傾きが $-\frac{1}{\cos x}$ ということなので

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\cos x}$$

(2) 放射性元素の数を $x(t)$, 時間を t, 比例定数を $k(>0)$ として.

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

(3) 比例定数を A として

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{A}{x^2}$$

(4) 比例定数を $k(>0)$ として

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - k\frac{dy}{dt}$$

$\boxed{2}$ (1) $y''+9y=0$. …①

特性方程式は $\lambda^2+9=0$ であり, この解は $\lambda=\pm 3i$ となるので, ①の一般解は

$$y(x) = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x \quad \cdots ②$$

$(C_1, C_2：定数)$

(2) 一般解は②である.

$$y'(x) = -3C_1\sin 3x + 3C_2\cos 3x \quad \cdots ③$$

となるので, ②,③に与えられた初期条件を代入して.

$y(0) = 2 = C_1$

$y'(0) = 3 = 3C_2 \quad \therefore C_2 = 1$

と決まる. 故に

$$y(x) = 2\cos 3x + \sin 3x$$

(3) $y''-2y'+10y=0$

特性方程式 $\lambda^2-2\lambda+10=0$ の解は

$\lambda = +1\pm 3i$.

故に

$$y(x) = e^{+x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$$

$(C_1, C_2：定数)$

(4) $y''-y' = 2e^x$ …①

- 右辺をゼロとした同次式 $y''-y'=0$ …② の一般解は, 特性方程式 $\lambda^2-\lambda=0$ の解が $\lambda=0,1$ であることから $y_1(x) = C_1 + C_2e^x$ …③
- ①の特殊解として③と独立なものとして $\eta(x) = kxe^x$ を仮定し, ①に代入して, 係数 k を求める.

$\eta'(x) = ke^x + kxe^x$

$\eta''(x) = 2ke^x + kxe^x$ より

$① \Leftrightarrow \eta''-\eta' = 2e^x$

$(2k+\cancel{kx})e^x - (k+\cancel{kx})e^x = 2e^x$

$\therefore k=2$. 故に $\eta(x) = 2xe^x$

- 以上より ①の一般解は

$$y(x) = C_1 + C_2e^x + 2xe^x$$

(5) 右辺をゼロとした同次式の一般解は (1)で求めた. 特殊解として

$\eta(x) = k\cos x + l\sin x$

を仮定し, 与式に代入すると, $\eta''(x) = -\eta(x)$ より

与式 $\Leftrightarrow +8(k\cos x + l\sin x) = 24\sin x$

$\therefore k=0,\ l=3$ と決まる. 故に

$$y(x) = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + 3\sin x$$

注意	1. 右の欄を正確に記入すること。 2. 所属を○で囲むこと。 3. 前記「1.2」を守らない答案は採点されないことがある。	試験日		所属	部	情報科学部				科目等履修生	学生番号	—
		座席番号	—		学科	IC(IJ)	IS	IM	IN		フリガナ	組
					年次	1	2	3	4		氏名	

$\boxed{3}$ 2階の同次線形微分方程式の一般解は, 2個の1次独立な基本解の線形結合で表される. これは, 2次元空間が2個の1次独立なベクトルの線形結合で表されることと同様である.

$\boxed{4}$ (1) 比例定数を k とすると.

$$\frac{dI}{dx} = -kI$$

となる. 変数分離法により

$$\int\frac{dI}{I} = -k\int dx$$

$$\log|I| = -kx + C$$

$$\therefore I(x) = e^{-kx+C} = C_1e^{-kx}$$

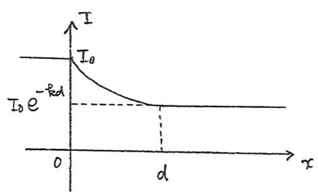
(2) $I(0) = I_0$ より

$I(0) = I_0 = C_1$.

すなわち

$I(x) = I_0e^{-kx}$ となる.

グラフは, 以下のようになる.



$\boxed{5}$ 与式は $\frac{d}{dt} = {}'$ として

$$mx'' + cx' + kx = F(t)$$

となっている.

(1) $x''+4x'+5x=0$ …① を解く. 特性方程式は.

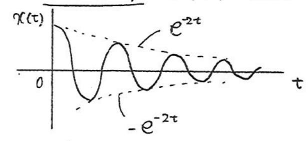
$\lambda^2+4\lambda+5=0$.

この解は $\lambda=-2\pm i$.

したがって①の解は　$C_1, C_2：定数$

$$x(t) = e^{-2t}(C_1\cos t + C_2\sin t).$$

これは減衰振動を表す解である.



(2) 解く式は

$$x''+4x'+5x = \sin 2t$$

となる. 右辺をゼロとした同次式の解は (1)と同じで減衰振動解. 右辺は振動数の異なる外力を加えているため, 運動はやがて外力の振動数に支配される強制振動となる.

(3) 解く式は

$$x''+4x = \sin 2t \quad \cdots ②$$

となる 右辺をゼロとした同次式 $x''+4x=0$ の解は

$$x(t) = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t \quad \cdots ③$$

の単振動解となる. 特殊解は③と独立な解として

$$\eta(t) = k\,t\cos 2t + l\,t\cdot\sin 2t$$

の形になる. これは時間と共に振幅が大きくなる破壊的な振動になる.

所属　科　年・科目等履修生　学生番号　—　氏名