微分方程式（真貝）第 2 回中間テスト F

学生番号 ____-______ 氏名 ____________

【重要】解答は別紙に．答えだけではなく，導出の過程も記すこと．
解答順は自由．スペースが足りなければ，裏面を用いよ．

1 次の微分方程式を立式せよ．必要であれば，各自で文字を補え．

(1) xy 平面上の各点で，接線の傾きが $\cos x$ である曲線がみたす微分方程式．

(2) 時間に対して一定の割合で増加していくインフルエンザ感染者数を求める微分方程式．

(3) x 方向の加速度が，原点からの距離に比例することを示す微分方程式．

(4) 半径 r の球の体積 $V(r)$ は $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ である．球形の風船に毎秒一定量の体積の息を吹き込むとき，風船の半径 r がみたす微分方程式はどうなるか．
ヒント．微小量 Δr だけ半径が増加する時の体積は，$V(r+\Delta r)$ であり，体積差は $\Delta V = V(r+\Delta r) - V(r)$ で計算できる．$(\Delta r)^2$ は微小量として無視してよい．

2 $y(x)$ に対する次の微分方程式について，一般解を求めよ．初期条件が与えられているものは，特殊解を求めよ．

(1) $y'' = -4y$

(2) $y'' = -4y$ 　　初期条件：$y(0) = 5,\ y'(0) = 2$

(3) $y'' - 2y' + 10y = 0$

(4) $y'' - y' = 2e^x$

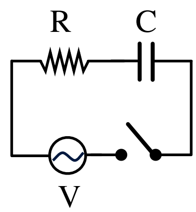
(5) $y'' + 9y = 24\sin x$

3 2 階微分方程式を求める際の「基本解の 1 次独立性」について説明せよ．

4 （1 階微分方程式）
抵抗値 R の抵抗と容量 C のコンデンサで構成される RC 直列回路に，起電力 $V = V_0 \sin\omega t$ の交流電源を接続し，時刻 $t = 0$ でスイッチを入れる．コンデンサに蓄電される電荷の量 $Q(t)$ は，微分方程式

$$V = R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$$

をみたす． $Q(t)$ を求め，$t \to \infty$ でのふるまいを説明せよ．



5 （2 階微分方程式）振動するブランコの運動方程式は，振れ角 x を時間 t の関数 $x(t)$ として，

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c\frac{dx}{dt} + F(t)$$

となる．ここで，$m, k, c\ F(t)$ は，それぞれ質量，振動の比例定数，空気抵抗の比例定数，加える外力である．なお，(2) と (3) は厳密に $x(t)$ を求める必要はない．

(1) $m = 1, k = 5, c = 4, F(t) = 0$ のとき，$x(t)$ を求め，初期値を適当に仮定して，グラフの概形を描け．

(2) $m = 1, k = 5, c = 4, F(t) = \sin 2t$ のとき，どのような運動になるかを数行で述べよ．

(3) $m = 1, k = 4, c = 0, F(t) = \sin 2t$ のとき，どのような運動になるかを数行で述べよ．